

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)

**На правах рукописи**



Борщев Никита Олегович

**Методы исследования тепловой модели многоугольного элемента  
конструкции спускаемого космического аппарата на примере  
анизотропного шпангоута**

Специальность:  
05.07.03 Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

кандидат технических наук, доцент

Антонов Виктор Алексеевич

**Москва - 2020**

## Оглавление

Глава 1 Состояние проблемы и постановка исследования.....	11
1.1 Тепловые математические модели. Общие сведения .....	11
1.2 Общие сведения об обратных задачах теплообмена и их основные виды .....	19
1.3 Объект исследования и постановка задачи моделирования теплового состояния конструкции.....	20
Выводы по главе 1.....	28
Глава 2 Методика идентификации симметричного тензора теплопроводности.....	29
2.1 Представление исследуемых характеристик .....	29
2.2 Метод регуляризации А. Н. Тихонова.....	32
2.3 Алгоритм итерационной регуляризации.....	35
2.4 Организация останова итерационного процесса.....	40
2.5 Составление целевого функционала невязки .....	44
2.6 Составление вариации целевого функционала .....	45
2.7 Компоненты градиентов теплофизических параметров.....	52
2.8 Выбор шага спуска.....	57
2.9 Алгоритм метода сопряженных градиентов.....	58
Выводы по главе 2.....	61
Глава 3 Модернизация численного метода для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твердых телах .....	62
3.1 Численное решение поставленной задачи .....	62
3.2 Алгоритм численного решения задачи вариации температурного поля .....	75
3.3 Вычисление функционала от полученного решения .....	85
Выводы по главе 3.....	89
Глава 4 Тепловая отработка объекта исследования и результаты экспериментального температурного состояния конструкции .....	90
4.1 Исходные данные для проектирования стенда для проведения наземной тепловой отработки изделия .....	90
4.2 Численное моделирование и результаты расчетов обратной задачи радиационного теплопереноса.....	93
4.3 Методика проведения теплостатических испытаний .....	100
4.4 Экспериментальная установка.....	101
4.5 Результаты теплостатических испытаний активного стыковочного агрегата и теплозащитного покрытия.....	106
Выводы по главе 4.....	113
Глава 5 Анализ свойств разработанного вычислительного алгоритма .....	114
5.1 О существовании, единственности и устойчивости решений обратных задач теплопроводности в анизотропных твердых телах.....	114

5.2 Оценка сходимости итерационного процесса .....	118
5.3 Результаты расчетов компонент симметричного тензора теплопроводности .....	124
Выводы по главе 5.....	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	129
Список использованной литературы .....	131

## Введение

**Актуальность темы исследования.** При создании новых образцов ракетно-космической техники, функционирование которых сопровождается интенсивными процессами тепло-массопереноса, особое внимание уделяется исследованию их теплофизическим характеристикам, тепловому проектированию и экспериментальной отработке тепловых режимов.

Повышенное внимание к указанным исследованиям связано прежде всего с ужесточением условий теплового нагружения конструкции во время эксплуатации, уменьшением температурных допусков на целевую аппаратуру, повышенными требованиями к надежности, прочности, экономии топливно-энергетических ресурсов.

Создание современной космической техники требует большого объема экспериментальных исследований, включающих тепло-вакуумные испытания. Важным моментом является создание эффективных методов диагностики и идентификации теплообменных процессов на основе экспериментальных данных и результатов испытаний.

Важное место в исследовании теплообменных процессов заняла методология решения обратных задач теплопроводности (ОЗТ). Решение обратной задачи заключается в определении краевых условий или коэффициентов уравнения (физических свойств вещества) для заданного распределения температур в пространстве и во времени.

Методы обратных задач теплопроводности дают возможность исследовать сложные нестационарные процессы теплопереноса в элементах конструкции, обладают высокой информативностью и позволяют принимать обоснованные решения для проектирования ракетно-космической техники. В настоящее время методы исследований, основывающиеся на принципах решения обратных задач теплопроводности, находят всё более широкое применение. Большой вклад в разработку методов и алгоритмов решения обратных задач теплообмена внесли академик А.Н. Тихонов, Е.А. Сенкевич, О.М. Алифанов, В.Ф. Формалев, А.К. Алексеев, Е.А. Артюхин, В.Н. Елисеев, И.С. Кабанихин, Л.А. Коздоба, Ю.М. Мацевитый, Ю.В. Полежаев, С.В. Резник, В.М. Юдин, А.Г. Яголой, J.V. Beck, G. Chaven, Y. Jarny.

Подходы к параметрической идентификации коэффициентов математических моделей, базирующиеся на методах решения некорректных задач широко

анализировались в нашей стране, а также в других странах и показали свою эффективность при разработках и исследованиях в космической, авиационной, автомобильной отраслях техники, металлургии, энергетике и т.д.

В настоящей работе рассматривается комплексный подход к определению теплофизических характеристик твердых материалов в целях обеспечения уточнения физико-математических моделей расчета теплонагруженных конструкций ракетно-космической техники на всех ее этапах эксплуатации. Элементами комплексного подхода являются:

1. На первом этапе решается обратная граничная задача идентификации радиационного теплообмена по воспроизведению теплового аэродинамического падающего потока на конструкцию активного стыковочного агрегата (АСА). Решение данной задачи позволяет получить данные для разработки и создания экспериментального стенда, позволяющего имитировать условия спуска возвращаемого аппарата. Результатом тепловой обработки АСА на созданном стенде является температурное поле стыковочного агрегата.

2. На втором этапе по полученному температурному полю решается обратная задача по поиску компонентов тензора теплопроводности.

**Степень разработанности темы исследования.** Существует ряд работ и исследований в области теплового проектирования конструкций ракетно-космической техники, выполненных из композиционных материалов. Данные материалы обладают явно выраженной анизотропией. В настоящее время огромный вклад в исследование теплового состояния анизотропных твердых тел внесли В.Ф. Формалев и С.А. Колесник. В указанных работах расчеты проводились в декартовой системе координат при заданных граничных условиях первого рода (заданных температур).

В представленной работе рассмотрена реальная конструкция активного стыковочного агрегата (АСА), исследуемая в граничных условиях второго рода (падающий тепловой поток). Задача решена в цилиндрической системе координат в связи с осесимметричностью объекта исследования – АСА.

Одной из задач диссертационной работы, является составление методики по определению компонентов тензора теплопроводности композиционных материалов с учетом данных теплофизических экспериментов.

**Целью данной работы** является составление методики по определению компонентов тензора теплопроводности анизотропного материала шпангоута стыковочного агрегата спускаемого аппарата по данным теплофизического эксперимента.

Для достижения цели поставлены и решены следующие **основные задачи**:

1. Проанализировать существующие математические модели распространения тепловых потоков в сплошной однородной анизотропной среде с целью создания обобщенной математической модели для идентификации компонентов тензора теплопроводности, удовлетворяющей инженерным требованиям.

2. Разработать алгоритм решения обратной задачи параметрической идентификации математической модели распространения тепловых потоков в сплошной однородной анизотропной среде.

3. Модернизировать численный метод для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твердых телах, позволяющего вычислить компоненты тензора теплопроводности.

4. Решить обратную задачу радиационного теплопереноса по воспроизведению теплового аэродинамического падающего потока на конструкцию АСА для создания специального экспериментального стенда, позволившего имитировать тепловую аэродинамическую нагрузку лучистым тепловым диффузным потоком.

5. Выбрать проектные параметров ИК – имитаторов стенда для моделирования аэродинамического теплового нагрева шпангоута лучистым тепловым диффузным потоком.

**Объектом исследования является** тепловое состояние шпангоута АСА по данным датчиков температур

**Предмет исследования:** распределение тепловых потоков в элементе шпангоута АСА

**Научную новизну работы определяют:**

Разработаны методы исследования тепловой модели многоугольного элемента конструкции спускаемого космического аппарата на примере анизотропного шпангоута, а именно:

1. Разработана обобщенная математическая модель шпангоута стыковочного агрегата, позволяющая провести идентификацию компонентов симметричного тензора теплопроводности.

2. Разработан алгоритм для решения задачи параметрического определения компонентов вектора теплопроводности элемента шпангоута АСА, позволяющий определить ориентацию вектора теплопроводности в обеспечении уточненного теплового состояния конструкции.

3. Получены проектные параметры ИК – имитаторов стенда (задаваемые на них тепловые потоки, их геометрические характеристики и расположение в пространстве) для воспроизведения условий эксплуатации АСА на основе решения обратной задачи радиационного теплопереноса стохастическим методом моделирования Монте-Карло.

#### **Методология и методы исследования**

При решении поставленных задач использовались метод итерационной регуляризации, а также метод регуляризации А.Н. Тихонова, градиентный метод сопряженных направлений, метод переменных направлений с экстраполяцией В.Ф. Формалева, программная среда Fortran для решения поставленной задачи, стохастический метод Монте-Карло для моделирования тепловой лучистой нагрузки, программная среда «Therm» для оценки теплового состояния ОИ.

#### **Теоретическая и практической значимость работы составляет:**

Теоретическая значимость заключается в том, что полученные выводы дополняют теорию теплового проектирования изделий ракетно-космической техники с явно выраженной анизотропией теплопроводности. Основные теоретические результаты могут стать основой для дальнейшего изучения теплового состояния конструкций спускаемых космических аппаратов при сверхкритическом тепловом нагружении.

Практическая значимость:

1. Методика по определению компонент симметричного тензора теплопроводности элемента шпангоута АСА

2. Разработка прикладного программного обеспечения по определению ориентации главных осей тензора теплопроводности для материалов с явно-выраженной анизотропией

3. Выбор тепловой мощности ИК – имитаторов и их пространственного расположения для экспериментального стенда по моделированию внешнего теплосилового нагружения шпангоута АСА.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Обобщенная математическая модель шпангоута стыковочного агрегата;
2. Алгоритм идентификации симметричного тензора теплопроводности шпангоута АСА по данным замеров температур;
3. Обобщенная методика идентификации симметричного тензора теплопроводности шпангоута АСА по данным замеров температур;
4. Проектные параметры ИК – имитаторов стенда для моделирования аэродинамического теплового нагрева шпангоута АСА многоразовых спускаемых космических аппаратов лучистым тепловым диффузным потоком.

**Достоверность и обоснованность полученных результатов** подтверждается строгой постановкой задачи исследования с принятыми допущениями, четкой формулировкой применяемых формализованных описаний, результатами программной реализации и хорошей сходимостью результатов теоретического исследования симметричного тензора теплопроводности шпангоута АСА с их реальными значениями.

**Личный вклад автора.**

1. Формулировка цели и задач исследования
2. Обобщенная методика идентификации симметричного тензора теплопроводности
3. Модернизация численного метода для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твердых телах
4. Выбор проектных параметров стенда для моделирования аэродинамического теплового нагрева шпангоута АСА многоразовых спускаемых космических аппаратов лучистым тепловым диффузным потоком.

**Внедрение результатов работы.**

Результаты работы внедрены в АО НПО «Энергомаш» в части создания алгоритма и методики по определению ориентации вектора теплопроводности. Отдельные разделы работы используются в учебном процессе при чтении лекций по дисциплине «Конструирование и расчет аппаратов систем обеспечения жизнедеятельности», а также при проведении курсового и дипломного проектирования.

**Апробация работы.**

Промежуточные результаты работы многократно апробированы, путем обсуждения с ведущими специалистами в данной отрасли на различных конференциях.

Результаты обсуждались на следующих конференциях и заседаниях: 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» – г. Москва 2017; 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» – г. Москва 2018; 15-ая Российская конференция по теплофизическим свойствам веществ – г. Москва 2018; 7-ая Российская национальная конференция по теплообмену – г. Москва 2018; 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» – г. Москва 2019; 44-ые академические чтения по космонавтике – г. Москва 2020 г.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликованы 8 работ, отражающие основные положения исследования, в том числе 3 статьи в ведущих научных изданиях, включенных в перечень ВАК и международные системы цитирования Web of Science и Scopus, тезисы трудов конференций,

**Структура и объем работы.** Диссертация включает в себя введение, пять глав, заключение, список литературы, приложения. Общий объем работы составляет 139 страницу, включая 55 рисунков, 2 таблицы и список литературы из 98 наименований.

**Во введении** сформулированы цель и задачи работы, обоснована актуальность диссертационного исследования, научная новизна, достоверность и обоснованность результатов, а также теоретическая и практическая значимость работы. Кратко охарактеризованы методы теоретического и экспериментального исследований.

**В первой главе** диссертационной работы проведен анализ построения тепловых физико-математических моделей твердых тел с явно выраженной анизотропией. Приведены основные виды кристаллографических систем, для которых характерен тот или иной вид анизотропии. Даны основные определения «прямой» и «обратной» задач теплопроводности, а также приведены основные численные методы решения «прямых» задач теплопроводности, такие как метод тепловых балансов или изотермических узлов, а также метод конечных элементов. Описаны основные виды обратных задач теплообмена и их отличие от «прямых».

**Во второй главе** рассматривается методика идентификации симметричного тензора теплопроводности по данным замеров температур. В качестве критерия адекватности расчетной модели реальному процессу в работе предлагается среднеквадратичный функционал невязки, характеризующий среднеквадратичное

отклонение рассчитанных температур, полученных в ходе решения прямой задачи теплопроводности в точках установки термопар от экспериментально измеренных температур.

**В третьей главе** рассматривается модернизация численного метода для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твердых телах, позволяющего вычислить компоненты тензора теплопроводности.

**В четвертой главе** представлены результаты решения граничной обратной задачи радиационного теплопереноса для создания экспериментального стенда по моделированию аэродинамического теплового нагрева шпангоута (условия эксплуатации ОИ) лучистым тепловым диффузным потоком с помощью Ик-имитаторов.

**В пятой главе** представлены результаты моделирования температурного режима конструкции на примере элемента металлического шпангоута АСА для двух расчетных методов регуляризации среднеквадратичной ошибки.

**В заключении** представлены конкретные результаты диссертационного исследования и выводы по проделанной работе.

## **Глава 1 Состояние проблемы и постановка исследования**

### **1.1 Тепловые математические модели. Общие сведения**

Математическое моделирование - это замена реального объекта исследования (ОИ) абстрактным математическим объектом с сохранением основных черт его поведения. Каждому ОИ можно сопоставить некоторое множество математических моделей. Отличающихся числом учета различных факторов. Работа не с самим ОИ, а с его моделью дает возможность относительно быстро и без больших затрат исследовать его свойства и прогнозировать поведение в любых ситуациях и для широкого спектра воздействий различной природы. Благодаря математической модели и стремительному развитию вычислительных технологий можно натуральный эксперимент заменить вычислительным. Математические модели могут быть как простыми, так и сложными, однако при использовании простейших моделей ОИ можно получить аналитическое решение в виде определенной зависимости от конкретных параметров, выявить некоторые качественные свойства или несколько характерных параметров ОИ, а на основе явных решений задачи произвести оптимизацию. По этому пути развивалась наука и техника XIX и XX веков. Ярким примером такой модели являлось уравнение теплопроводности - дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, позволяющие определить при различных видах воздействий на ОИ изменение температуры конструкции. Для более сложной (многофакторной) модели, например модели термоупругости, термопластичности часто аналитическое исследование краевой задачи невозможно, ее необходимо анализировать численно [1-12]. При выборе числа факторов и размерности модели во внимание принимаются различные соображения; главное же правило при создании математической модели - адекватность модели изучаемому процессу.

Таким образом, математическое моделирование это один из самых простых и дешевых способов дать обоснованные рекомендации по исследованию какого-либо эффекта оптимальному конструированию ОИ или прогнозированию его поведения в будущем при некоторых типах воздействий.

Постановка вопроса о математическом моделировании порождает следующую последовательность действий, условно состоящую из трех этапов: модель-алгоритма-программа.

Пусть  $Au = f$  – математическая модель ОИ, где  $A: U \rightarrow F$  некоторый оператор,  $U, F$  – функциональные пространства. Для построения математической модели ОИ на основании установленной связи между входом и выходом ОИ необходимо выбрать вид этой связи или определить структуру оператора  $A$ , осуществляющего отображение входа  $u$  на выход  $f$ . Фактически исследовать всегда при составлении модели решает проблему «черного ящика», на который можно действовать и регистрировать отклик на воздействие.

Для построения физико-математической модели решаются две задачи:

Прямая задача. При заданном операторе  $A$  и воздействии (заданном  $f$ ) необходимо определить  $u$ .

Обратная задача. В рамках выбранной модели, при заданном воздействии и решении определить некоторые характеристики оператора  $A$ .

Отметим, что в реальном моделировании процесс создания модели как раз начинается с этапа решения обратной задачи. Так, например, сформулировать начальные условия, например, теплоемкость, теплопроводность, а уже потом решать прямую задачу по определению температурного поля конструкции.

Далее приводятся некоторые наиболее популярные методы моделирования тепловых процессов анизотропных конструкций при их известной ориентации главных осей тензора теплопроводности.

### 1.2.1 Метод тепловых балансов

При использовании метода тепловых балансов (метода сосредоточенных параметров [13]) конструкция разбивается на  $L$  изотермических узлов, для которых задаются их массы, теплоемкости и внутренние тепловыделения. Между узлами задаются тепловые связи. Каждому из узлов могут быть поставлены в соответствие одна или несколько поверхностей, на которых происходит лучистый теплообмен. Между поверхностями рассчитываются лучистые связи (угловые коэффициенты). Для каждого узла составляется уравнение теплового баланса. В результате получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m_i C_i(T_i) \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} = Q_{ki} + Q_{ni} + Q_{ri} + Q_{vi} + Q_{ai} \quad (1.7)$$

с начальными условиями  $T_i = T_i^0; 1 \leq i \leq L$ ;

где  $T_i$  – масса и теплоемкость узла  $i$ , соответственно;

$T_i$  - температура узла  $i$ , К;

$\tau$  - время, с;

$Q_{ki}$  - кондуктивный тепловой поток к узлу  $i$ , Вт;

$Q_{ni}$  - нелинейный тепловой поток к узлу  $i$ , Вт;

$Q_{ri}$  - результирующий лучистый тепловой поток к узлу  $i$ , Вт;

$Q_{vi}$  - внутренних тепловыделений в узле  $i$ , Вт;

$Q_{ai}$  - атмосферный тепловой поток, к узлу  $i$ , Вт.

В результате решения системы уравнений находятся температуры всех расчётных узлов. Увеличивая число узлов можно получить температурное поле по конструкции с требуемой степенью детализации.

В расчётной модели (1.7) могут быть заданы узлы, температура которых постоянна или является известной функцией времени.

Кондуктивный (линейный) тепловой поток  $Q_{ki}$  к узлу  $i$  определяется выражением:

$$Q_{ki} = \sum_{k=1}^n P_{ik}(T_k - T_i); \quad (1.8)$$

где  $P_{ik}$  — проводимость тепловой связи между узлами  $i$  и  $k$ , Вт/К;

$T_k$  - температура узла  $k$ , связанного с узлом  $i$  тепловой связью  $P_{ik}$ , К;

$n$  - количество кондуктивных тепловых связей узла  $i$ .

Нелинейный и результирующий лучистые тепловые потоки  $Q_{vi}$  и  $Q_{ri}$  к узлу  $i$  определяются по формулам, приведённым в разделе 2 по описанию расчета лучистого теплообмена.

Атмосферный тепловой поток  $Q_{ai}$  к узлу определяется следующим образом:

$$Q_{ai} = \sum_{j=1}^n F_j(q_{mj} + q_{rj}) \quad (1.9)$$

где  $q_{mj}$ ,  $q_{rj}$  - молекулярный и рекомбинационный тепловые потоки.

Внутренние тепловыделения в узлах задаются циклограммой – значениями  $Q_{vi}(\tau_0), Q_{vi}(\tau_1), \dots, Q_{vi}(\tau_q)$  в моменты времени  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_q$ . По этим значениям  $Q_{vi}$  аппроксимируется линейной или ступенчатой функцией времени. При этом на интервале  $\tau_{q-1} \leq \tau \leq \tau_q$  либо меняется линейно от значения  $Q_{vi}(\tau_{q-1})$  до  $Q_{vi}(\tau_q)$ , либо сохраняет постоянное значение  $Q_{vi}(\tau_{q-1})$ .

### 1.2.1.1 Кондуктивные тепловые связи

Величина  $P_{ik}$  для кондуктивной передачи тепла может быть найдена, если известно термическое сопротивление  $R_{ik}$  между узлами, по формуле:

$$P_{ik} = \frac{1}{R_{ik}} \quad (1.10)$$

где  $R_{ik}$  выражается на основе закона Фурье:

$$R_{ik} = \frac{1}{Q} \int_{l_i}^{l_k} \frac{Q(l)dl}{\lambda(l)F_{ik}(l)}; \quad (1.11)$$

Если между точками  $l_i$  и  $l_k$  отсутствуют источники и стоки тепла, то  $Q_l = Q = const$  и тогда:

$$R_{ik} = \frac{1}{Q} \int_{l_i}^{l_k} \frac{dl}{\lambda(l)F_{ik}(l)}; \quad (1.12)$$

где  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $\frac{Вт}{мК}$ ;

$F_{ik}$ - площадь теплового контакта узлов  $i$  и  $k$ ,  $м^2$ ;

$l$ - длина пути теплового потока,  $м$ .

Для постоянных  $\lambda$  и  $F_{ik}$ :

$$R_{ik} = \frac{l_k - l_i}{\lambda F_{ik}}; \quad (1.13)$$

С помощью слагаемого  $P_{ik}$  можно учесть конвективный теплообмен при постоянном коэффициенте теплоотдачи элемента  $i$  с окружающей средой, имеющей температуру  $T_k$ .

В этом случае:

$$P_{ik} = \alpha_{ik}(T_i)F_{ik} \quad (1.14)$$

где  $\alpha_{ik}(T)$ - коэффициент теплоотдачи от элемента  $i$  к среде  $k$ , Вт/м<sup>2</sup>К;

$F_{ik}$ - площадь поверхности теплообмена, м<sup>2</sup>.

Тепловые связи не могут быть вычислены по приведенным формулам (1.10)-(1.14). В этих случаях расчёты обычно проводятся для хороших (больших) и плохих (малых) тепловых связей или величина тепловой связи подбирается по результатам расчётов температур, тогда для реальной конструкции должна быть обеспечена полученная из расчётов тепловая связь или значения связей, которые не удастся получить расчётным путём с достаточной точностью, должны быть определены из эксперимента. Так, например, в местах контакта различных деталей фактическая площадь контакта, как правило, не известна и может отличаться от номинальной площади контакта в десятки раз, поэтому величину тепловых связей в таких случаях можно определить с достаточной точностью только экспериментально. После этого можно провести расчёты для различных условий теплового нагружения конструкции.

В результате решения системы уравнений находятся температуры всех расчётных узлов. Увеличивая число узлов, можно получить температурное поле по конструкции с требуемой степенью детализации.

### 1.2.2 Конечно-разностные методы и метод конечных элементов

Для расчёта температурных полей сложных конструкций в современной практике используется также метод конечных элементов (МКЭ) [13-31], который позволяет учесть реальную конфигурацию рассматриваемых областей, различие их теплофизических свойств, переменность тепловой проводимости в различных направлениях (анизотропность). Данный метод еще часто называют- метод рассредоточенных параметров.

Перенос тепла по конструкции описывается уравнением Фурье:

$$C(T)\rho(T)\frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} = \operatorname{div}[\vec{\lambda}(T)\operatorname{grad}T(M, \tau)] + q(M, \tau); \quad (1.15)$$

$$M \in G(x, y, z); 0 \leq \tau \leq \infty;$$

где  $G$  – двух или трехмерная область;

$C(T)\rho(T), \lambda(T)$  – теплоемкость, плотность и теплопроводность материала, соответственно;

$q(M, \tau)$  – распределение объемной плотности внутренних источников тепла.

Уравнение теплопроводности дополняется условиями однозначности: геометрическими характеристиками области, значениями теплофизических параметров, начальными и граничными условиями.

Область  $G$  разбивается на конечные элементы, в пределах которых можно принять допущение:

$$q(M, \tau) \approx q(\tau); \quad (1.16)$$

На каждом элементе вводится пространственная сетка и распределение температуры  $T(M, \tau)$  аппроксимируется кусочно-непрерывными функциями в виде:

$$T(M, \tau) = \tilde{T}(M, \tau) = \sum_{i=1}^n T_i(\tau) N_i(M); \quad (1.17)$$

где  $n$  – число узлов пространственной сетки на элементе,

$T_i(\tau)$  – значение температуры в  $i$ -ом узле в момент времени  $\tau$ ,

$N_i(M)$  – базисные функции пространственных координат, равные единице в соответствующих им узлах и нулю – в остальных узлах.

Для анализа процесса теплопроводности в трёхмерной области  $G(x, y, z)$ , имеющей произвольную криволинейную границу, область разбивается на элементы таким образом, чтобы они наилучшим образом описывали ее форму. На любом из элементов уравнение теплопроводности (1.15) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} - \frac{1}{C(T)\rho} \left[ \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} \right] + \frac{d\lambda_{xx}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \frac{d\lambda_{yy}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} = \frac{q_v}{C(T)\rho}; \quad (1.18)$$

где  $q_v$  – объемный источник тепловыделения

$\lambda_{xx}, \lambda_{yy}, \lambda_{zz}$ , – значения коэффициента теплопроводности вдоль координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , соответственно;

Система уравнений МКЭ строится в соответствии с методом взвешенных невязок. Уравнение теплопроводности (3.0) умножается на базисные функции элемента (4)  $N_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  ( $n$  равно 9 в двумерном, 20 или 27 – в трехмерном случае) и интегрируется по его объему  $V_e$ . В результате получается система  $n$  уравнений:

$$\begin{aligned}
& \int_{V_e} \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} dV_e - \frac{1}{C(T)\rho} \int_{V_e} N_i \left\{ \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} \right\} + \\
& \quad + \frac{d\lambda_{xx}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \frac{d\lambda_{yy}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \\
& \quad \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} ] dV_e = \int_{V_e} \frac{q_v}{C(T)\rho} dV_e; M \in x, y, z; 1 \leq i \leq n;
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Интеграл левой части в (6) по формуле Грина преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
& \int_{V_e} N_i \left[ \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} + \frac{d\lambda_{xx}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial x^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{d\lambda_{yy}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial y^2} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial^2 T(M, \tau)}{\partial z^2} \right] dV_e = \\
& \quad = \int_{S_e} N_i [\vec{\lambda}] (\vec{\nabla} T, d\vec{S}) - \int_{V_e} N_i [\vec{\lambda}] (\vec{\nabla} N_i, \vec{\nabla} [\vec{\lambda}] T(M, \tau)) dV_e
\end{aligned} \tag{1.20}$$

где  $d\vec{S}$  векторный элемент площади поверхности элемента,

$S_e$  – площадь поверхности элемента.

Для элемента, расположенного внутри области  $G$ , интеграл по  $S_e$  равен нулю и после преобразований (1.19-1.20) получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
& \int_{V_e} N_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} dV_e + \frac{1}{C(T)\rho} \int_{V_e} \left\{ \lambda_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right\} dV_e + \\
& \quad \frac{1}{C(T)\rho} \int_{V_e} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{d\lambda_{xx}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{d\lambda_{yy}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{d\lambda_{zz}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right\} dV_e = \int_{V_e} \frac{q_v}{C(T)\rho} dV_e
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где  $\tilde{T}$  – аппроксимационная функция  $T$ .

Далее вводится сетка по времени, производная  $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau}$  заменяется конечно-разностным аналогом:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} \approx \frac{\tilde{T}^{j+1} - \tilde{T}^j}{\Delta \tau};$$

Система уравнений записывается для  $j+1$ -го временного слоя:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta\tau} \sum_{k=1}^n T_k^{j+1} \int_{V_e} N_i N_k dV_e + \frac{1}{C(T)\rho} \sum_{k=1}^n T_k^{j+1} \int_{V_e} \left[ \lambda_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{d\lambda_{xx}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{d\lambda_{yy}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{d\lambda_{zz}}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right] dV_e = \\
& \frac{1}{\Delta\tau} \int_{V_e} N_i N_k dV_e + \int_{V_e} N_i \frac{q_v}{C(T)\rho} dV_e, 1 \leq i \leq n
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Базисные функции  $N_i$  зависят от координат  $x, y, z$ , связанных с областью  $G$ , но  $N_i$  определены в локальной системе координат  $\xi, \eta, \mu$ . Необходимо выполнить переход из локальной системы  $\xi, \eta, \mu$  в глобальную  $x, y, z$ . При этом область правильной формы, куб или квадрат, могут быть отображена в криволинейную, границами которой являются поверхности 2-го порядка. Для отображения используются те же базисные функции  $N_i$ , что и для аппроксимации функции температуры  $T$ :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i N_i(\xi, \eta, \mu), \tag{1.23}$$

$$y = \sum_{i=1}^n y_i N_i(\xi, \eta, \mu), \tag{1.24}$$

$$z = \sum_{i=1}^n z_i N_i(\xi, \eta, \mu), \tag{1.25}$$

где  $x_i, y_i, z_i$  – значения глобальных координат в соответствующих узлах криволинейного элемента.

Получаемые в результате подобного отображения конечные элементы называются изопараметрическими. Производные от базисных функций в глобальной системе координат выражаются следующим образом:

## 1.2 Общие сведения об обратных задачах теплообмена и их основные виды

Теперь же рассмотрим основные этапы идентификации ОИ, Пусть

$$Au = f(\text{математическая модель ОИ}), \quad (1.26)$$

где  $A: U \rightarrow F$  некоторый оператор, а  $U, F$ -функциональные пространства. Задача определения оператора  $A$  может быть разделена на 2 этапа:

- 1 этап-структурная идентификация,
- 2 этап - параметрическая идентификация

На первом этапе определяется структура параметра оператора  $A$ , которая зависит как от самого ОИ, так и от целей моделирования. На этапе структурной идентификации используются фундаментальные законы природы, присущие той или иной области естественных наук, вариационные принципы, статические закономерности, причем одному и тому же ОИ можно сопоставить целую иерархию математических моделей.

Наиболее часто в математическом моделировании используются следующие основные виды операторов:

- конечномерный оператор ( $A$ -матрица,  $Au = F$ -система линейных алгебраических уравнений)
- дифференциальный оператор (или матричный дифференциальный)
- дифференциальный оператор в частных производных (или матричный дифференциальный оператор в частных производных)
- более сложные операторы – интегральные, интегрально-дифференциальные.

На втором этапе параметрической идентификации определяются числовые параметры или функции, входящие в описание оператора  $A$  (элементы матриц, коэффициенты дифференциальных операторов и граничные условия).

С точки зрения соотношения причина следствие все задачи математического моделирования можно разбить на два класса: прямые и обратные задачи.

Для прямых задач требуется найти следствия по их известным причинам. В качестве этих причин могут фигурировать следующие факторы:

1. начальные условия для (например, температура в начальный момент времени при расчете теплового состояния ОИ)
2. коэффициенты дифференциальных операторов, моделирующих ОИ
3. граничные условия (внешнее тепловое воздействие при расчете теплового состояния ОИ)

4. область, занятая ОИ (геометрия области).

В качестве следствия обычно используются компоненты физических моделей (температура, напряжения, деформации).

Прямые задачи об отыскании следствий, т.е. расчете компонент физических полей составляют суть современной классической математической физики. Для таких задач разработаны аналитические и численные методы решения, доказаны теоремы существования и единственности решения.

Для обратных же задач в рамках выбранной физико-математической модели известны причины, требуется найти причины и причинно-следственные связи. В этом суть параметрической идентификации [5].

Обратные задачи обладают рядом неприятных с точки зрения обработки информации свойств. Во-первых, обратные задачи являются нелинейными, во-вторых, возможна неединственность решения при одной и той же входной информации. В третьих является их неустойчивость при малых возмущениях искомых параметров. Задачи обладающие такими свойствами являются некорректными. Стоит отметить огромное количество работ связанных с различными аспектами обратных задач [14-30].

В начале 20-го века Адамар ввел понятие корректности: задача (1.26) нахождения элементов и считается корректно поставленной по Адамару, если:

1. область значений оператора  $A$  совпадает с  $F$  (решение операторного уравнения (1.26) существует для любой его правой части-условие разрешимости);
2. равенство  $Au_1 = Au_2$  для некоторых  $u_1, u_2 \in D_A$  влечет за собой  $u_1 = u_2$ .
3. Обратный оператор непрерывен на  $F$ .

Научное направление, посвященное исследованию некорректных задач, связано с работами крупных советских математиков: А.Н. Тихонова, Г.И. Марчука, М.М. Лаврентьева, А.А. Самарского, В.Г. Романова, С.И. Кабанихина [31].

### **1.3 Объект исследования и постановка задачи моделирования теплового состояния конструкции**

Объектом исследования является передний шпангоут активного стыковочного агрегата (АСА) возвращаемого аппарата (ВА) перспективного транспортного корабля (ПТК) «Орел» для которого проведены в 2019 году теплостатические испытания (ТСИ) по определению экспериментального нестационарного температурного поля по известному внешнему тепловому воздействию.

«Орел» — многоразовый пилотируемый космический корабль (рис.1), который должен прийти на смену пилотируемым кораблям серии «Союз» и автоматическим

грузовым кораблям серии «Прогресс». Производится ОАО «РКК «Энергия» им. С.П.Королева». Планируется выводить на орбиту с помощью ракеты-носителя среднего класса «Феникс».



Рисунок 1 – «ПТК НП» «Орел»

Целью создания нового корабля является обеспечение национальной безопасности, технологической независимости, обеспечение доступа России в космос со своей территории, доставка людей и грузов на орбитальные станции, полёт на полярную и экваториальную орбиту, исследование Луны и посадки на неё.

Данный ОИ выбран с целью апробацию разрабатываемого алгоритма по определению коэффициентов симметричного тензора теплопроводности его металлической части. Принципиальный вид ОИ приведен на рисунке 2.

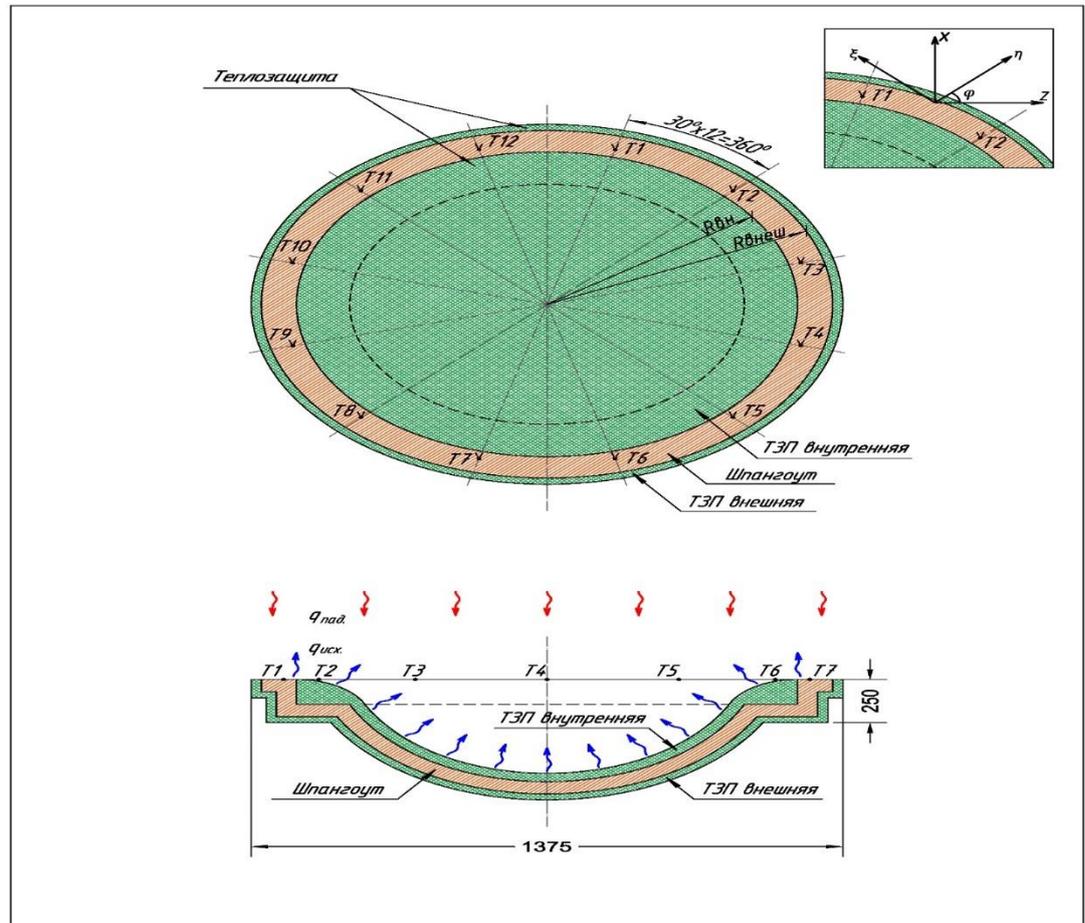


Рисунок 2 – Расчетная схема АСА в одной плоскости симметрии

При спуске в плотных слоях атмосферы Земли на АСА воздействует аэродинамический тепловой поток (приходящие стрелки). Одновременно происходит излучение тепловой энергии (уходящие стрелки) в атмосферу.

По торцу стыковочного агрегата (рис. 2) расположен шпангоут шириной 200 мм. На корабль и стыковочный агрегат нанесено теплоизолирующее покрытие для предотвращения перегрева при прохождении плотных слоев атмосферы. На переднюю часть шпангоута теплоизоляция не наносится, т.к. этой частью шпангоута стыковочного агрегата транспортный корабль сопрягается при стыковке со станцией.

При спуске корабля в плотных слоях атмосферы на него воздействует аэродинамический тепловой поток, достигающий  $70 \text{ кВт/м}^2$ . Под воздействием теплового потока температурное поле шпангоута изменяется в широком диапазоне, что может приводить к значительной его деформации.

При проведении термосиловых испытаний на передний торец шпангоута симметрично установлены 12 термопар. По данным термопар идентифицируется его тепловая математическая модель шпангоута для нахождения ориентации главных осей теплопроводности относительно выбранной системы координат (рис. 2).

Для идентификации теплофизических характеристик первоочередной задачей является составление тепловой физико-математической модели, по которой будет происходить восстановление целевых характеристик.

Запишем для этого уравнение теплопроводности [9] для полностью анизотропного материала в общем виде при решении задачи Неймана, то есть задании теплового потока на его границах в трехмерной постановке в декартовых координатах:

$$C(T)\rho \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{xx}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{xy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{yy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{xz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} \right), M \in (x, y, z); \quad (1.27)$$

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\lambda_{xx}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{xy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} + \lambda_{xz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} = q_1, M \in \Gamma_1; \quad (1.28)$$

$$\lambda_{xx}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{xy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} + \lambda_{xz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} = q_2, M \in \Gamma_2 \quad (1.29)$$

$$\lambda_{yy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} + \lambda_{xy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{zy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} = q_3, M \in \Gamma_3; \quad (1.3)$$

$$-[\lambda_{yy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} + \lambda_{xy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{zy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z}] = q_4, M \in \Gamma_4; \quad (1.31)$$

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} + \lambda_{zx}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{zy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} = q_5, M \in \Gamma_5; \quad (1.5)$$

$$-\left[ \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial z} + \lambda_{zx}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial x} + \lambda_{zy}(T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial y} \right] = q_6, M \in \Gamma_6; \quad (1.32)$$

$C(T)$  – удельная теплоемкость материала,  $\frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}$

$\rho$  – плотность материала,  $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

$\lambda_{xx}(T), \lambda_{xy}(T), \lambda_{zz}(T)$  – компоненты тензора теплопроводности,

$T$  – температура, К

$q_i$  – тепловой удельный поток,  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$

Примем следующие допущения:

1. Будем считать в силу симметрии конструкции, что распределение температурного поля по конструкции будет тоже симметрично. Таким образом можно принять нулевые условия сопряжения по угловой координате и рассматривать постановку

задачи испытуемого ОИ в цилиндрических криволинейных координатах при наличии симметричного тензора теплопроводности в декартовых координатах.

2. Так как оба боковых торца теплоизолированы аблирующей теплозащитой, то целесообразно принять двумерную постановку задачи при нулевом перетекании тепла вдоль радиуса.

$$\begin{aligned}
& H_1 H_2 H_3 C(T) \rho \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} \\
&= \frac{\partial}{\partial p_1} \left[ H_2 H_3 \left( \lambda_{p_1, p_1} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_1, p_2} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_1, p_3} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_3 \partial p_3} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial p_2} \left[ H_1 H_3 \left( \lambda_{p_2, p_1} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_2, p_2} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_2, p_3} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_3 \partial p_3} \right) \right] + \\
&\frac{\partial}{\partial p_3} \left[ H_2 H_3 \left( \lambda_{p_3, p_1} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_1 \partial p_1} + \lambda_{p_3, p_2} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_2 \partial p_2} + \lambda_{p_3, p_3} \frac{\partial T(M, \tau)}{H_3 \partial p_3} \right) \right], M \in (p_1, p_2, p_3) \quad (1.33)
\end{aligned}$$

Где компоненты тензоры теплопроводности определяются выражением:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \lambda_{p_1, p_1} & \lambda_{p_1, p_2} & \lambda_{p_1, p_3} \\ \lambda_{p_2, p_1} & \lambda_{p_2, p_2} & \lambda_{p_2, p_3} \\ \lambda_{p_3, p_1} & \lambda_{p_3, p_2} & \lambda_{p_3, p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial y}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial z}{H_1 \partial p_1} \\ \frac{\partial x}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial y}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial z}{H_2 \partial p_2} \\ \frac{\partial x}{H_3 \partial p_3} & \frac{\partial y}{H_3 \partial p_3} & \frac{\partial z}{H_3 \partial p_3} \end{pmatrix} \times \\
& \times \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial x}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial x}{H_3 \partial p_3} \\ \frac{\partial y}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial y}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial y}{H_3 \partial p_3} \\ \frac{\partial z}{H_1 \partial p_1} & \frac{\partial z}{H_2 \partial p_2} & \frac{\partial z}{H_3 \partial p_3} \end{pmatrix} \quad (1.34)
\end{aligned}$$

В цилиндрической системе координат для двумерной постановки задачи:

$$p_1 = 0, p_2 = \theta, p_3 = z \quad (1.35)$$

$$x = r \cos(\theta), y = 0, z = z; \quad (1.36)$$

Таким образом, можем переписать рассматриваемую постановку задачи в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \right) = C(T) \rho \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \tau}; z \in [0; l_z], \theta \in [0; \pi], \tau > 0; \quad (1.37)
\end{aligned}$$

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$-\left[\lambda_{\theta z}(T)\frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r}\frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial\theta}\right] = 0, z \in [0; l_z], \theta = 0, \tau > 0; \quad (1.38)$$

$$\left[\lambda_{\theta z}(T)\frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial r} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r}\frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial\theta}\right] = 0, z \in [0; l_z], \theta = \pi, \tau > 0; \quad (1.39)$$

$$-\left[\lambda_{zz}(T)\frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r\partial\theta}\right] = 0, z = 0, \theta \in [0; \pi], \tau > 0; \quad (1.4)$$

$$\left[\lambda_{zz}(T)\frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r\partial\theta}\right] = q^{\text{эф}}(T^4) - q^k(T), z = l_z, \theta \in [0; \pi], \tau > 0; \quad (1.41)$$

Расчетные формулы по определению эффективного теплового потока имеют вид [31-37]:

$$q^{\text{pez}}(T^4) = \sum_{i=1}^N q_m^{\text{эф}} - \varepsilon_m \sigma T(M, \tau)^4, \quad (1.42)$$

где эффективный тепловой поток определяется выражением:

$$q_m^{\text{эф}} = \sum_{j=1}^N q_j^{\text{uszl}} + \frac{(1 - \varepsilon_j)}{F_j} \int_{F_j} q_j(M, \tau) \varphi_{m \rightarrow j} dF_j \quad (1.43)$$

Угловой коэффициент переизлучения или ядро интегрального уравнения (7.1) определяется выражением:

$$\varphi_{m \rightarrow j} = \frac{\cos\theta_m \cos\theta_j}{\pi l^2} \quad (1.44)$$

$\theta_m$  – угол между нормалью к рассматриваемой площадке конструкции и направлением на ИК-имитатор;

$\theta_j$  – угол между нормалью к рассматриваемой площадкой конструкции и направлением на ОИ;

$N$  – количество ИК – имитаторов,

$\varepsilon_m$  – интегральная степень черноты поверхности материала  $i$  – ой поверхности;

$T$  – средняя температура  $i$  – ой поверхности;

Тепловой конвективный поток определяется следующими зависимостями:

$$q_{i,j}^k = \alpha_k(T)(T(r, \theta, \tau) - T_c), \quad (1.45)$$

где  $\alpha_k(T)$  – коэффициент теплоотдачи нагреваемого объекта в окружающую среду.

Вычисляется этот коэффициент из решения критериального уравнения вида:

$$\alpha_{\kappa}(T) = Nu_l(T) \frac{\lambda_g(T_c)}{l_{\phi}}; \quad (1.46)$$

$\lambda_{\text{в}}$  – коэффициент теплопроводности воздуха,  $\frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$ ;

$l_{\phi}$  – характерный размер (размер, вдоль которого движется тепловой конвективный поток, м);

$T_c$  – температура окружающей среды, К;

$Nu_l(T)$  – критерий Нуссельта;

Для определения коэффициента теплоотдачи воспользуемся критериальными соотношениями, полученными при решении задач обтекания равновесным воздухом конструкций при схожих условиях окружающей среды. Локальное число Нуссельта при решении уравнений движения газа и закона сохранения энергии определяется выражением Ида[38].

Для ламинарного пограничного слоя:

$$Nu_l = \frac{3}{4} \left( \frac{2Pr(T_c)}{5(1 + 2Pr(T_c))^{\frac{1}{2}} + 2Pr(T_c)} \right)^{\frac{1}{4}} (Gr_r Pr(T_c))^{\frac{1}{4}} \text{ при } Re < 2300; \quad (1.47)$$

Для переходного и турбулентного пограничного слоя:

$$Nu_l = 0.17(Gr_r Pr)^{\frac{1}{4}} \text{ при } Re > 2300; \quad (1.48)$$

$Re$  – безразмерный критерий Рейнольдса;

$Pr$  – безразмерное число Прандтля;

$Gr_l$  – безразмерный критерий Гросгоффа:

$$Gr_l = \frac{U_c^2(r) \Delta r^2}{\nu(T_c)^2} \equiv \frac{g \beta r^3 (T(r, \theta, \tau) - T_c)}{\nu(T_c)^2}; \quad (1.49)$$

в котором

$$U_c = \sqrt{\beta r T((r, \theta, \tau) - T_c)}; \quad (1.5)$$

$\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ ;

Коэффициент температурного расширения идеального газа:

$$\beta = \frac{1}{T_c}; \quad (1.6)$$

## **Выводы по главе 1**

В первой главе диссертационной работы проведен анализ построения тепловых физико-математических моделей твердых тел с явно выраженной анизотропией. Приведен краткий обзор существующих кристаллографических систем. Приведены основные методы решения задач проектирования теплового режима анизотропных твердых конструкций, используемых в настоящее время во всем мире. Даны общие сведения об обратных задачах теплообмена. Приведен схематический вид АСА. Сформулирована постановка задачи диссертационного исследования.

## Глава 2 Методика идентификации симметричного тензора теплопроводности

### 2.1 Представление исследуемых характеристик

Рассмотрим задачу восстановления функций:  $\lambda_{zz}(T), \lambda_{\theta z}(T), \lambda_{\theta\theta}(T)$  на основании информации о мгновенных значениях температур в определённых точках замеров тепловых потенциалов цилиндрической области.

Подлежащие определению искомые теплофизические функции  $\lambda_{zz}(T), \lambda_{\theta z}(T), \lambda_{\theta\theta}(T)$  будем искать в следующем виде [26]:

$$\lambda_{\theta\theta}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T), \quad (2.0)$$

$$\lambda_{\theta z}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \quad (2.1)$$

$$\lambda_{zz}(T) \approx \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T), \quad (2.2)$$

Для аппроксимации компонент вектора теплопроводности воспользуемся линейно-непрерывными базисными функциями:

$$N_m^\lambda(T) = \begin{cases} 0, & T < T_{m-1} \\ \frac{T - T_{m-1}}{T_m - T_{m-1}}, & T_{m-1} \leq T \leq T_m, \\ \frac{T_{m+1} - T}{T_{m+1} - T_m}, & T_{m-1} \leq T \leq T_m, \\ 0, & T > T_m, \quad m = \overline{1, M} \end{cases}$$

В узле с номером  $m$ , она имеет значение равное единице ( $N_m(T) = 1$ ), в остальных узлах она равна нулю ( $N_m(T) = 0$ );  $m$ -число участков разбиения области определения искомых функций при осуществлении их сплайн-аппроксимации;

Для конечно-разностной аппроксимации по времени введем временную сетку с равномерным шагом [9]:

$$\omega^\tau = \left\{ \tau^k = k\tau, k = \overline{0, K}, \tau = \frac{t_{max}}{K} \right\}$$

и пространственную сетку с шагами  $h_\theta$  по переменной  $\theta$  и  $h_z$  по переменной  $z$ :

Определим количество  $M$  временных блоков, в каждом из которых одинаковое число  $K_m$  ( $m = 1, M$ ) шагов  $\tau$  по времени и на каждом из которых коэффициенты  $\lambda_m^s$   $s = \theta\theta, \theta z, zz$  в линейных комбинациях постоянны.

Это количество определим из верхней оценки функциональной невязки

$$6K_m \delta_f^2 \leq \delta_{\text{sum}}, \quad (2.3)$$

где  $6$  – число узлов с замерами температуры по времени,  $K_m$  – число временных слоев в каждом блоке,

Из (15.0) получаем количество  $K_m$  временных шагов  $\tau$  в каждом  $m$ -м блоке,  $m = 1, M$ , для всех характеристик

$$K_m = \frac{\delta_{\text{sum}}}{6\delta_f^2}; \quad (2.4)$$

Если теперь весь временной промежуток  $[0, \tau_{\text{max}}]$  разделить на число  $K_m$  временных слоев в каждом блоке, получим количество  $M$  конечных элементов в (13.0) – (13.2), а длина  $\Delta T_m$  каждого конечного элемента  $m = 1, M$  равна

$$\Delta T_m = \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{M}, \quad m = 1, M \quad (2.5)$$

$$M = \frac{\tau_{\text{max}}}{K_m}, \quad m = 1, M \quad (2.6)$$

Таким образом, равномерной сетке по времени ставится в соответствие более крупная (блоковая, с числом слоев  $K_m$  в каждом блоке) сетка по времени с одинаковым числом слоев по времени внутри каждого блока. Который в свою очередь, ставится в соответствие неравномерная сетка по функции  $T$  (рис. 3), причем эта сетка может быть построена после численного решения прямой задачи с граничными условиями второго рода или третьего родов. Когда станет известно значение максимальной температуры  $T_{\text{max}}$ , а минимальная температура ставится равной значению температуры окружающей среды в начальный момент времени.

Для граничных условий первого рода эти значения уже известны, и величину  $\Delta T_m$  можно определить а priori (до решения прямой задачи) [9].

Для граничных условий второго рода необходимо сперва оценить максимальную возможную температуру, для этого целесообразно решить задачу для одного наиболее термонапряженного узла (в зависимости от величины падающей тепловой нагрузки) до времени пика теплового потока  $\tau_{max}$ .

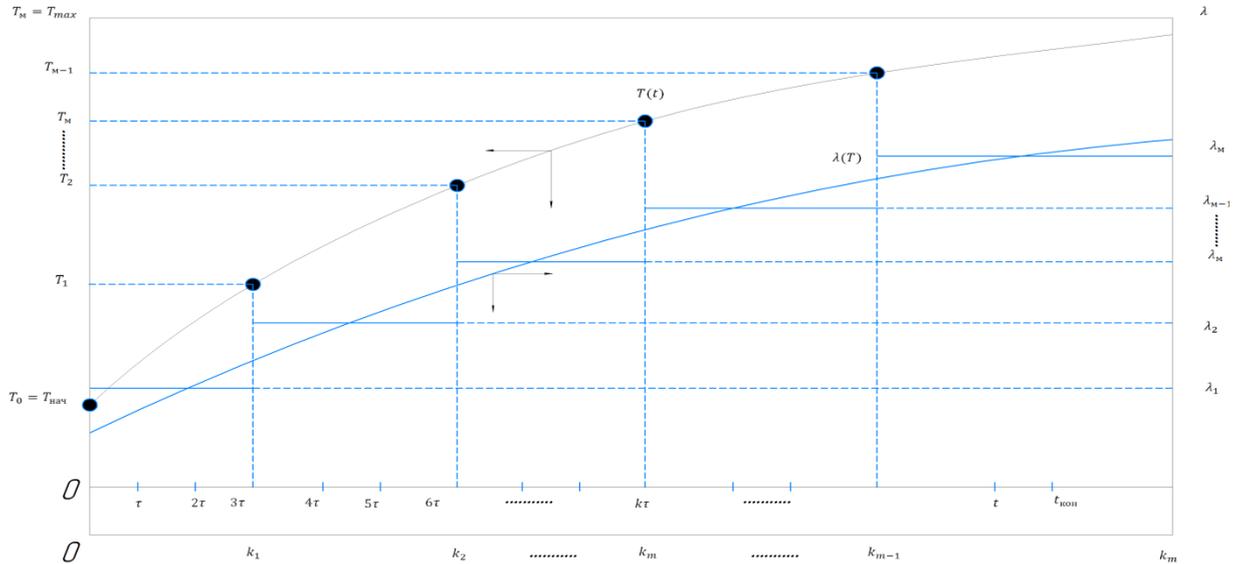


Рисунок 3 - Согласование равномерной блоковой сетки по времени с неравномерной сеткой по функции T

Выражение для оценки максимальной температуры конструкции может быть получено из следующего выражения:

$$T_{max} = T_{min} + \frac{2q_{sum}\tau_{max}}{C(T)\rho h_z}, \quad (2.7)$$

где

$$q_{sum} = q^{рез}(T^4) - q^к(T); \quad (2.8)$$

## 2.2 Метод регуляризации А. Н. Тихонова

Рассмотрим некорректную задачу (1.26), причем  $A$ -непрерывный оператор. Из анализа приведенного в следует. Что использовать функционал невязки для построения регуляризирующего решения нельзя и необходимо сформировать другой, более общий функционал по сравнению с функционалом невязки. Таким функционалом является стабилизирующий функционал А.Н. Тихонова:

$$M^\alpha[u] = \|Au - f\|_F^2 + \alpha\|u\|^2, \alpha > 0. \quad (2.9)$$

**Определение 1.** Оператор  $M^{\alpha'}[u]$  называется производной функционала  $M^\alpha$  по Фреше, если

$$M^\alpha[u + \Delta u] - M^\alpha[u] = M^{\alpha'}[u]\Delta u + \gamma(u, \Delta u), \quad (2.10)$$

Причем:

$$\lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(u, \Delta u)\|}{\|\Delta u\|} = 0$$

**Теорема 1.**[22]. Для любого  $\alpha > 0 \forall f \in F$  задача об отыскании минимума функционала (2.9) разрешима и имеет единственное решение  $T^\alpha \in D(A)$ , где  $D(A)$  – область определения оператора  $A$ ; кроме того если  $0 \in D(A)$ , то справедливо соотношение корректности:

$$\|u^\alpha\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|f\|_F; \quad (2.11)$$

Доказательство данной теоремы представлено в [25].

**Теорема 2.**[25]. Пусть  $A$  - взаимнооднозначный оператор, точное решение  $\bar{T} \in D(A)$ ; тогда  $u_\eta^\alpha \rightarrow \bar{u}$  при  $\eta \rightarrow 0$ , если  $\alpha(\eta) \rightarrow 0$  таким образом, что  $\frac{(h+\eta)^2}{\alpha(\eta)} \rightarrow 0$ .

**Теорема 3.**[25]. Если  $\|\bar{f} - f_\delta\| < \delta$ ,  $\bar{f} = A\bar{u}$ ,  $\|\bar{A} - A_h\| < h \rightarrow \mu_\eta(f_\delta, A_h) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

Введем в рассмотрение функцию:

$$\zeta_\eta(\alpha) = \|A_h u_\eta^\alpha - f_\delta\|^2 - (\delta + h\|u_\eta^\alpha\|)^2 - (\mu_\eta(f_\delta, A_h))^2; \quad (2.12)$$

На основании теоремы имеет место следующий критерий.

1. Если  $\|f_\delta\| < \delta^2 + (\mu_\eta(f_\delta, A_h))^2$ , то полагаем  $u_\eta^\alpha = 0$ .

2. Если  $\|f_\delta\| \geq \delta^2 + (\mu_\eta(f_\delta, A_h))^2$ , то :

а). если  $\zeta_\eta(\alpha)$  имеет корень  $\alpha^*$ , то в качестве решения полагаем  $u_\eta^\alpha = u_\eta^{\alpha^*}$

б) если  $\zeta_\eta(\alpha) > 0$ , то полагаем  $\mu_\eta = \lim u_\eta^\alpha, \alpha \rightarrow 0$ .

### 2.2.1 Составление целевого функционала невязки

Рассмотрим общий подход к построению устойчивых вычислительных алгоритмов решения некорректных задач, предложенный А.Н. Тихоновым [7,8]. Метод основан на переходе от исходного уравнения первого рода к задаче минимизации целевого функционала невязки между теоретическими величинами и экспериментальными с дополнительным стабилизирующим слагаемым:

$$S(\lambda_p) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K ([T(\lambda_p^{(n)}, z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2 d\tau, p = \theta\theta, z\theta, zz; \quad (2.13)$$

Приближенное решение исходной задачи есть экстремаль этого функционала:

$$S(\lambda_p) = \min S(T);$$

$\gamma$  – параметр регуляризации, величина которого согласуется с погрешностью задания входных данных, а именно

Функционал имеет вид:

$$S(\lambda_p) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K ([T(\lambda_p^{(n)}, z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2 + \frac{1}{2} \gamma(\delta) \|\lambda_p\|^2) d\tau; \quad (2.14)$$

Где норма вычисляется из стабилизирующего функционала первого порядка:

$$\|\lambda_p\|^2 = \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [|\lambda(S)|^2 + \left| \frac{\partial \lambda(S)}{\partial S} \right|^2] d\tau, p = \theta\theta, z\theta, zz \quad (2.15)$$

где

$$|\lambda(S)| = \lambda_{\theta\theta}(T)^2 + \lambda_{z\theta}(T)^2 + \lambda_{zz}(T)^2; \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \lambda(S)}{\partial S} = \frac{\lambda^{n+1} - \lambda^{(n)}}{S^{n+1} - S^{(n)}}; \quad (2.17)$$

Это позволяет гарантировать сходимость приближенных решений к точному в выбранной метрике пространства, а, следовательно, и равномерную сходимость.

### 2.2.2 Вычисление регуляризирующего параметра

Параметр регуляризации производится в соответствии с обобщенным функционалом невязки [7,8]:

$$\theta(\gamma) = [T(\lambda^{(n)}) - \tilde{T}]^2 - (\delta + h\|\lambda\|^2)^2 - \mu_\eta^2(\tilde{T}) = 0 \quad (2.18)$$

Для отыскания корня обобщенной невязки на каждом итерационном шаге используется метод хорд для решения нелинейных алгебраических уравнений.

Пусть  $\gamma_0 = \frac{1}{\mu_0}, \gamma_1 = \frac{1}{\mu_1}$  таковы, что  $\theta(\gamma_0) > 0$  и  $\theta(\gamma_1) < 0$ , и пусть  $\gamma_1 > \gamma_0$ . Тогда последовательность метода хорд, построенная по формулам:

$$\mu_n = \mu_0 - \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma(\mu_0) - \sigma(\mu_1)} \sigma(\mu_0), \quad \gamma_n = \frac{1}{\mu_n}, \mu_0 = \mu_1, \mu_1 = \mu_n \quad (2.19)$$

Будет монотонной  $\mu_{n+1} > \mu_n$  и при этом  $\sigma(\mu_n) \geq 0$  для всех  $n$ . Сходимость метода хорд в этом случае не гарантируется.

Если же и  $h \neq 0$  и оператор задан с погрешностью, то выпуклость обобщенной невязки  $\sigma(\mu) = \theta(1/\mu)$  может нарушаться и гарантировать монотонность и сходимость последовательности метода хорд в этом случае нельзя. Однако, если  $\sigma(\mu_n) = \theta\left(\frac{1}{\mu_n}\right) > 0$  для всех  $\mu_n$ , построенных по формулам, то в силу монотонности обобщенной невязки  $\mu_{n+1} > \mu_n$ . Таким образом, если значения обобщенной невязки во всех точках  $\mu_n$  положительны, то можно утверждать, что метод хорд сходится. Если же  $\sigma(\mu_{n_0})$  при каком-либо  $n_0$ , то дальнейшее применение метода хорд в формуле необоснованно. Поэтому в этом случае для решения уравнения  $\sigma(\mu) = 0$  при  $n > n_0$  применяется модификация метода хорд:

$$\mu_n = \mu_0 - \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma(\mu_0) - \sigma(\mu_1)} \sigma(\mu_0), \quad \gamma_n = \frac{1}{\mu_n} \quad (2.20)$$

Если  $\sigma(\mu_0)\sigma(\mu_n) < 0$ , то  $\mu_0 = \mu_n$

Если  $\sigma(\mu_1)\sigma(\mu_n) < 0$ ,  $\mu_1 = \mu_n$

Выполнение одного из этих условий всегда можно гарантировать.

### 2.3 Алгоритм итерационной регуляризации

Практическое применение для определения характеристик теплообмена методологии идентификации выдвигает целый ряд требований к используемым методам и вычислительным алгоритмам решения обратных задач. Эти требования обусловлены, прежде всего, некорректностью обратных задач, а также весьма большим многообразием их возможных постановок [39-42].

В силу некорректности обратных задач для их решения необходимо использовать специальные регуляризирующие методы и алгоритмы, обеспечивающие устойчивые приближенные решения [14-31]. Широкое многообразие возникающих на практике постановок обратных задач требует применения таких методов, которые могут быть использованы для решения различных типов обратных задач, включая линейные и нелинейные, с минимально необходимым объемом экспериментальных данных и в переопределенных постановках, с подвижными границами и другие. Кроме того, возникает достаточно широкий спектр разнообразных требований с точки зрения программной реализации вычислительных алгоритмов. К ним можно отнести возможность создания универсальных, применимых к различным типам обратных задач программных комплексов, относительно низкая трудоемкость модификации программ и ряд других.

Сравнительный анализ показывает, что одним из наиболее универсальных методов, на основе которого возможна разработка удовлетворяющих перечисленным выше требованиям вычислительных алгоритмов, а также соответствующего программного обеспечения для решения некорректных обратных задач теплообмена различных типов является метод итерационной регуляризации [40-54].

Суть метода итерационной регуляризации заключается в следующем [48]: рассмотрим некоторую абстрактную обратную задачу, записанную в операторной форме. Пусть математическая модель процесса нестационарного теплообмена при взаимодействии анализируемой системы (элемента конструкции) с окружающей средой имеет вид

$$L(x, \tau, T, \bar{u})T(x, \tau) = 0, x \in \Omega, \tau \in (0, \tau_m],$$

$$T(0, \tau) = T_0(x), x \in \bar{\Omega}$$

$$B(x, \tau, T, \bar{u})T(x, \tau) = 0, x \in \partial\Omega, \tau \in (0, \tau_m]$$

Пусть вектор характеристик неизвестен, однако имеются данные измерений температуры в некотором числе  $M$  точек области. Обратная задача заключается в определении  $\bar{u}$  из условий (3.1) - (3.4).

Математическая модель (3.1) - (3.3) при заданных значениях вектора характеристик  $\bar{u}$  позволяет вычислить температуры в точках установки термодатчиков. Другими словами, эта модель позволяет осуществить преобразование характеристик в температуру в точках измерений. В результате измерений формируется векторная функция  $f = \{\tilde{T}(\tau)\}_1^M$ . Пусть элементы  $\bar{u}$  и  $f$  принадлежат некоторым пространствам  $U$  и  $F$  соответственно. Тогда анализируемую обратную задачу можно представить в виде уже знакомого (1.26) операторного уравнения первого рода [14-31]:

$$A\bar{u} = f, u \in F, A: U \rightarrow F, \quad (2.21)$$

где оператор  $A$  строится на основании модели исследуемого процесса (3.1) - (3.3), а правая часть формируется с использованием экспериментальных данных. Пространства  $U$  и  $F$  выбираются, исходя из особенностей рассматриваемой задачи. Они должны содержать достаточно широкие классы функций, и включать в себя все возможные решения и любые правые части  $f$  с учетом искажений, вносимых измерительными приборами. Чаще всего в качестве  $U$  и  $F$  берется пространство  $L_2$  функций с интегрируемым квадратом.

Так как правая часть уравнения (3.5) формируется на основании результатов измерений, то элемент  $f$  всегда известен с некоторой погрешностью:

$$\delta = \|f - \tilde{f}\| \quad (2.22)$$

где  $\tilde{f}$  — точное значение этого элемента. Кроме того, при численном построении оператора  $A$  также возникают погрешности, связанные с использованием различных приближений, аппроксимирующих зависимостей и других операций, а также с погрешностями округления при проведении вычислений. В результате и оператор  $A$  известен неточно. Погрешность задания оператора  $A$  можно характеризовать величиной:

$$h = \|A - \bar{A}\|, \quad (2.23)$$

где  $A$  - точный оператор. Таким образом, исходные данные при практическом решении обратной задачи заданы с погрешностью, которая может быть записана в виде точностного параметра  $f(h, \delta)$  формируем функционал невязки:

$$L(u) = \|A\bar{u} - f\|_F \quad (2.24)$$

и рассмотрим задачу его минимизации относительно  $\bar{u}$ . При решении конкретной обратной задачи в пространстве  $U$  искомым характеристикам, вообще говоря, необходимо выделить область допустимых решений  $D \in U$ . Однако, во многих практических задачах какая-либо конструктивная априорная информация об области  $D$  отсутствует. Поэтому обычно полагается, что  $D=U$ , т.е. полученное в результате минимизации (3.6) решение  $\bar{u}$  удовлетворяет всем возможным ограничениям и, следовательно, для минимизации функционала  $L(\bar{u})$  можно использовать методы безусловной минимизации. С помощью метода минимизации первого порядка, построим минимизирующую функционал (3.6) последовательность:

$$\bar{u}^{s+1} = \bar{u}^s - \alpha_s G\left(L_u^{i(s)}\right), s = 0, 1, \dots, s, \quad (2.25)$$

где  $s$  – номер итерации,  $\alpha_s$  – глубина спуска, выбираемая из условия:

$$\alpha_s = \text{Argmin} L\left(\bar{u}^s - \alpha_s G\left(L_u^{i(s)}\right)\right), \alpha_s > 0 \quad (2.26)$$

$G\left(L_u^{i(s)}\right)$ - оператор, характеризующий используемый метод минимизации [55,56];  $\bar{u}^0$  – задаваемое априорно начальное приближение;  $s$ - номер последней итерации, определяемый в процессе решения задачи из регуляризирующего условия останова, осуществляемого в соответствии с принципом обобщенной невязки:

$$s: L(u^s) \cong \varepsilon(h, \delta)$$

Оказывается, что изложенный метод последовательных приближений порождает в соответствии с общим определением регуляризирующего оператора (семейства операторов) по А.Н. Тихонову, регуляризирующее семейство операторов, в котором параметром регуляризации является величина  $1/s$  [7,8].

Для линейных некорректных задач (когда оператор  $A$  - линеен) метод итерационной регуляризации получил строгое математическое обоснование и практическое подтверждение данными математического моделирования [48]. Применительно к нелинейным задачам какие-либо результаты обоснования устойчивости итерационных алгоритмов в настоящее время получены для ограниченного числа постановок задачи. Однако результаты проведенных обширных вычислительных экспериментов при решении обратных задач теплообмена различных типов подтверждают

высокую эффективность метода итерационной регуляризации и для анализа широкого круга нелинейных задач.

При решении обратных задач преобразование  $A\bar{u}$  в уравнении (3.5) представляет собой функцию теплового состояния анализируемой системы, вычисленную в точках установки термодатчиков. Для расчета этой величины необходимо решать исходную прямую задачу теплообмена при некоторых значениях искомого в обратной задаче характеристик.

При практической реализации итерационных алгоритмов решения обратных задач часто бывает весьма затруднительно оценить погрешность задания оператора  $A$  в уравнении (3.5) [57,58]. Поскольку ошибки округления при проведении вычислений достаточно малы и, как правило, значительно меньше, чем погрешность измерений, то погрешности аппроксимации оператора  $A$  стремятся уменьшить за счет соответствующего выбора параметров вычислительного алгоритма. В частности, при использовании численных методов решения краевых задач предварительно проводятся вычислительные эксперименты, цель которых состоит в выборе таких параметров разностных сеток, что при их дальнейшем улучшении (например, увеличении числа шагов по пространству или времени) точность решения задачи практически не увеличивается. На основании результатов математического моделирования делается вывод, что погрешность задания оператора  $A$  значительно меньше погрешностей измерений. В результате имеются основания считать, что оператор  $A$  известен почти точно и вместо соотношения (3.9) можно использовать условие невязки:

$$S: L(\bar{u}^s) \cong \delta$$

С точки зрения общей последовательности вычислительных операций итерационные алгоритмы решения обратных задач в основном строятся в соответствии с традиционной процедурой оптимизации на основе градиентных методов [59-61]. Применительно к численному решению обратных задач эта процедура включает в себя следующие основные операции:

1. Задание начального приближения искомого характеристик.
2. Численное решение прямой задачи теплообмена при заданном приближении искомого характеристик.
3. Вычисление значения функционала невязки.
4. Проверка условия выхода из итерационного процесса (3.10) если условие выхода выполнено, то осуществляется переход к п. 9, в противном случае - к п. 5.
5. Определение градиента функционала невязки.

6. Вычисление глубины спуска из условия (3.8).
7. Формирование нового приближения искомым характеристикам, используя соотношение (3.7).
8. Проверка выхода из итерационного процесса по близости решения на двух соседних итерациях. Если условие выхода выполнено, то осуществляется переход к п. 9, в противном случае - к п. 2 и процесс последовательных приближений продолжается.
9. Процесс последовательных приближений закончен.

Необходимость введения пункта 8 продиктована следующими соображениями. В случае неадекватности принятой математической модели реальному процессу теплообмена заданный уровень невязки может никогда не достигаться в ходе итерационного процесса. Это обусловлено тем, что при расчете температур в точках установки термодатчиков в данном случае за счет неадекватности модели возникает систематическая погрешность относительно экспериментальных данных. Аналогичная ситуация может иметь место и при наличии в экспериментальной информации неучтенной на этапе подготовки исходных данных для решения обратной задачи систематической погрешности. Кроме того, неудачно выбранная аппроксимация искомым функциональных характеристик также может не позволить достичь требуемого уровня невязки.

В изложенной процедуре важнейшими операциями, реализация которых решающим образом влияет на вычислительную эффективность итерационных алгоритмов решения обратных задач, являются шаги 5 и 6, а также шаг 4. Достаточно подробному изложению эффективных подходов к практической реализации этих вычислительных операций посвящены последующие разделы. Здесь важно отметить, что в целях сокращения общего количества вычислений весьма целесообразно дополнительно ввести в рассмотрение два типа краевых задач: сопряженной краевой задачи и краевой задачи для вариаций температур. Первая из них дает возможность получить аналитические выражения для градиента функционала невязки, а вторая - вычислить линейную оценку глубин спуска. Практика решения обратных задач теплообмена различных типов показала высокую эффективность такого подхода. В результате выполнение каждой из операций 5 и 6 состоит из двух составляющих:

- 5.1. Численное решение сопряженной краевой задачи.
- 5.2. Вычисление градиента функционала невязки.
- 6.1. Численное решение краевой задачи (или нескольких краевых задач) для вариаций температур.

## 6.2. Вычисление линейной оценки глубины спуска.

Следует подчеркнуть, что изложенная последовательность операций остается неизменной при решении обратных задач различных типов. Это позволяет разработать программные комплексы, большая часть которых является универсальной или проблемно-независимой в рамках некоторого класса рассматриваемых задач.

### 2.4 Организация останова итерационного процесса

При численной реализации алгоритмов решения обратных задач всегда имеют место погрешности, которые следует отнести к погрешностям во входных данных.

Неопределенности в расчетах температурных режимов элементов конструкции [60-68] в условиях эксплуатации обусловлены целым рядом причин: неопределенностями физико-математических моделей описания теплопереноса, неопределенностями значений физических величин, используемых в этих моделях, неопределенностями в задании граничных и начальных условий и др.

К настоящему времени разработано большое количество физико-математических моделей, описывающих теплоперенос в материалах. Модели различаются по степени подробности учета процессов и, соответственно, различаются наборами используемых в них физических величин. Значения этих величин входят в задачу прогрева в виде коэффициентов и свободных членов. Для термически разлагающихся материалов различают теплофизические и кинетические характеристики. Эти характеристики определяются экспериментально после обработки результатов испытаний в соответствии с выбранной физико-математической модели. При этом одноименные характеристики, полученные для различных физико-математических моделей, могут отличаться в разы.

Далее приведены все виды погрешностей, входящих в исходные данные при идентификации искомых теплофизических характеристик и, как результат закладывающие несоответствия с реальными теплофизическими величинами:

1. алгоритмическая погрешность: Погрешность, зависящая от степени соответствия алгоритма измерения математическому определению измеряемой характеристики (чаще всего это относится к измерению параметров случайных процессов).

2. аппаратная погрешность: Погрешность, обусловленная несовершенством средств измерений, их схемного решения, недостаточной точностью реализации принятого алгоритма измерений.

3. внешние погрешности: Погрешности, возникающие при действии различных

факторов, внешних по отношению к средству измерения. К ним часто относят ошибки экспериментатора при настройке средства измерения и при снятии показаний.

4. грубая погрешность: Погрешность, существенно превышающая уровень, оправданный условиями измерения, свойствами применяемых средств измерений и квалификацией экспериментатора. Грубые погрешности измерения обнаруживают статистическими методами и исключают из рассмотрения.

5. доверительная вероятность: Вероятность, с которой оцениваемый параметр, а попадает в заданный диапазон его возможных значений.

6. доверительный интервал: Диапазон значений параметра  $a$ , который с заданной доверительной вероятностью включает оцениваемое значение параметра  $a$ .

7. погрешность классификации: Погрешность, обусловленная несоответствием реального (исследуемого) объекта или процесса выбранной модели объекта или физико-математической модели описания процесса.

8. погрешность метода: Погрешность, возникающая вследствие недостаточной разработанности теории явлений, которые положены в основу измерения, и тех соотношений, которые используются для оценки измеряемой величины.

9. приписанная погрешность: Погрешность, приписываемая любому результату измерений (определений), полученная для совокупности результатов аналогичных измерений (определений), выполняемых по одной и той же аттестованной методике.

10. разброс значений параметра: Диапазон значений параметра вследствие погрешностей его определения.

11. систематическая погрешность: Составляющая погрешности измерения, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины.

12. случайная погрешность: Непредсказуемая составляющая погрешности измерения, характеристики и закономерности изменения которой проявляются лишь на значительном числе результатов измерения.

Все перечисленные виды погрешностей в сумме приводят к неустойчивости решения при приближении точки минимума целевого функционала.

Следует отметить, что поиск экстремума функций многих переменных с помощью методов оптимизации градиентного типа имеет следующую особенность. При задании начального приближения, достаточно далекого от искомого решения, на первых итерациях процесса последовательных приближений имеет место достаточно высокая скорость сходимости, которая с увеличением номера итерации заметно падает. Это свойство оказывается весьма полезным при решении некорректных (неустойчивых) задач, которыми являются обратные задачи.

Практика решения граничных и коэффициентных обратных задач теплопроводности итерационными методами градиентного Т1ша показывает, что при достаточно гладких начальных приближениях искомым функций (как в непрерывной, так и в параметрической форме) неустойчивость или осциллирующий характер решения возникает не сразу, а нарастает достаточно медленно и начинает проявляться, начиная с некоторого номера итерации. Причем в коэффициентных обратных задачах влияние погрешностей во входных данных на регулярность решения проявляется значительно слабее. При достаточно малом количестве коэффициентов в параметрическом представлении искомого решения неустойчивость вообще может не наступить при весьма большом числе итераций [48].

Оказывается, что предельный номер итерации, при котором начинает проявляться неустойчивый характер соответствующего этому номеру приближения искомой функции может быть определен в соответствии с принципом невязки. В этом случае останов итерационного процесса осуществляется при выполнении условия:

$$L^s \leq \delta_{sum}, \text{ где}$$

$\delta_{sum}$  - погрешность входных данных, вычисленная в той же метрике, что и целевой функционал.

$$\delta_{sum} = \delta_a + \delta_f + \delta_{окр}, \quad (2.27)$$

$\delta_f$  – погрешность входных температур, определяемая следующим выражением:

$$\delta_f = \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_L(\tau) d\tau, \quad (2.28)$$

где:

$\delta_L$  – оценка изменения среднеквадратичного уклонения измеренных температур в точке с заданной координатой по времени  $t$  от истинного значения;

$\delta_a$  – погрешности, обусловленные аппроксимацией исходной задачи

конечноразностным аналогом и соответствующей параметризацией искомым функций;

$\delta_{\text{окр}}$  – погрешности округления.

Поэтому погрешностями, связанными с округлением результатов арифметических операций обычно пренебрегают.

Кроме того, учитывая тот факт, что в реальных измерениях значение  $\delta_f$  достаточно велико, за счет соответствующего выбора параметров разностной сетки, а также вида зависимостей, аппроксимирующих искомые функции во многих практических ситуациях можно добиться выполнения условия:

$$\delta_f \gg \delta_a$$

В этом случае  $\delta = \delta_f$  и условие останова итерационного процесса имеет вид:

$$L^s \leq \delta_f$$

Критерий (2.2.8) оказался весьма плодотворным при решении обратных задач теплопроводности. В работах [30-31] на основе математического моделирования продемонстрирована его высокая эффективность. Более детальные исследования [69] доказали, что итерационные метода градиентного типа решения некорректно поставленных задач общего вида

$$A_n = f_\tau, \text{ где}$$

$A_n$  – некторый линейный опреатор, заданный с погрешностью,

$f_\tau$  – заданные с погрешностью входные данные.

Данные результаты дают возможность использования итерационных методов для широкого круга важных для практических приложений задач идентификации, включая коэффициентные обратные задачи теплопроводности. Несмотря на то, что теоретическое обоснование итерационных методов имеется только для линейных некорректных задач, практика решения нелинейных обратных задач теплопроводности показывает высокую эффективность в этих случаях. Следует отметить, что применительно к нелинейным коэффициентным обратным задачам в некоторых случаях условие (2.2.6) может не достигаться в процессе минимизации целевого функционала. Такая ситуация может реализоваться, например, при достаточно грубой аппроксимации искомым зависимостей характеристик тепло и массопереноса от температуры при их параметрическом представлении. Аналогичные результаты могут быть получены при математическом моделировании на ЭВМ решения обратных задач на точных входных данных. Поэтому

при практической реализации итерационных алгоритмов рекомендуется поступать следующим образом. Если в процессе итераций изменение величины целевого функционала достаточно мало, т.е.:

$$|L^s - L^{s-1}| < \xi, \quad (2.29)$$

где  $\xi$ -некоторое малое число, и при этом условие невязки (2.2.6) не достигается, то необходимо осуществить останов итерационного процесса. Как правило, при обработке реальных экспериментальных данных в этом случае требуется улучшить качество аппроксимации искомых характеристик. При использовании, например, сплайн-аппроксимации это означает, что необходимо увеличить количество узлов сплайна.

## 2.5 Составление целевого функционала невязки

Для получения формулы градиента функционала  $J$  будем решать задачу минимизации функционала невязки как задачу на условный экстремум методом множителей Лагранжа при ограничениях, определяемых условиями (1) - (3) [70-76].

Составим функционал  $L$  Лагранжа:

$$\begin{aligned} L(\lambda_p) = & \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2 d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) - C(T) \rho \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} ] d\tau \end{aligned} \quad (2.31)$$

При использовании метода регуляризации А.Н. Тихонова ограничиваясь слагаемыми первого порядка точности получаем:

$$\begin{aligned} L(\lambda_p) = & \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K ([T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}]^2 + \frac{1}{2} \gamma(\delta) \|\lambda_m^{\theta\theta^2} + \lambda_m^{z\theta^2} + \lambda_m^{\theta z^2}\|) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right) - C(T) \rho \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} ] d\tau; \end{aligned} \quad (2.32)$$

## 2.6 Составление вариации целевого функционала

Дадим теперь векторам значений параметров искомым функций малые возмущения, причем такие, чтобы относительные величины возмущений каждой координаты всех векторов были одинаковыми, тогда температурное поле также получит приращение некоторой величины.

Таким образом, имеем искомым теплофизических характеристик следующие приращения:

Для первого компоненты тензора:

$$\begin{aligned}\lambda_m^{zz}(T + \Delta T) &= (1 + \bar{\Delta}) \sum_{m=1}^M \left( \lambda_m^{zz} N_m(T) + \lambda_m^{zz} \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) = \\ &= (1 + \bar{\Delta}) \left( \lambda_{zz}(T) + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \Delta T \right); \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для второй компоненты тензора:

$$\begin{aligned}\lambda_m^{z\theta}(T + \Delta T) &= (1 + \bar{\Delta}) \sum_{m=1}^M \left( \lambda_m^{z\theta} N_m(T) + \lambda_m^{z\theta} \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) = \\ &= (1 + \bar{\Delta}) \left( \lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T \right); \end{aligned} \quad (2.33)$$

Для третьей компоненты тензора:

$$\begin{aligned}\lambda_m^{\theta\theta}(T + \Delta T) &= (1 + \bar{\Delta}) \sum_{m=1}^M \left( \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) + \lambda_m^{\theta\theta} \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) = \\ &= (1 + \bar{\Delta}) \left( \lambda_{\theta\theta}(T) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \Delta T \right); \end{aligned} \quad (2.34)$$

Тогда первое и третье слагаемые в левой части уравнения теплопроводности примет следующий вид:

Первое слагаемое:

$$(1 + \bar{\Delta}) \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial z} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \bar{\Delta}) \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{zz}(T)) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \right. \\
&\quad \left. \frac{d\lambda_{rr}(T)}{dT} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial r} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] = \\
&= (1 + \bar{\Delta}) \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{zz}(T)) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right. \\
&\quad \left. + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right]; \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Третье слагаемое:

$$\begin{aligned}
&(1 + \bar{\Delta}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{\theta\theta}(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)) \frac{\partial (T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) = \\
&= (1 + \bar{\Delta}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda_{\theta\theta}(T)) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] = \\
&= (1 + \bar{\Delta}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda_{\theta\theta}(T)) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right]; \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в левой части:

$$\begin{aligned}
&(1 + \bar{\Delta}) \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{z\theta}(T(\theta, z, \tau) + \Delta T) \frac{\partial (T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) = \\
&= (1 + \bar{\Delta}) \frac{2}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{r\theta}(T)) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\
&\quad \left. \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Тогда возмущенное уравнение теплопроводности при изменении параметров на величину  $\Delta$  будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{r\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] + \\
& \frac{2}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{r\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] = \\
& = \frac{C(T)}{1 + \bar{\Delta}} \frac{\partial \Delta T(r, \theta, \tau)}{\partial \tau}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Выражение для возмущенного теплового лучистого удельного потока примет следующий вид при допущении о незначительном вкладе диффузного переизлучения между ИК-имитаторами и испытуемым объектом на температурное поле объекта:

$$q_{\text{эф}}(T + \Delta T) = q_{\text{пад}} - \varepsilon \sigma T(\theta, z, \tau)^4 - 4\varepsilon \sigma T(\theta, z, \tau)^3 \Delta T(\theta, z, \tau); \tag{2.36}$$

Выражение для возмущенного теплового конвективного потока примет следующий вид:

$$q^k(T + \Delta T) = \alpha_k(T + \Delta T)(T + \Delta T - T_c) = (\alpha_k(T) + \frac{d\alpha_k(T)}{dT})(T + \Delta T - T_c), \tag{2.37}$$

Выражение для производной от коэффициента теплоотдачи по температуре:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \alpha_k(T)}{\partial C_m} = \frac{\lambda_B(T_c)}{l} \frac{\partial Nu_l(T)}{\partial C_m} = \frac{\lambda_B(T_c)}{l} \times \\
& \times \left[ \frac{3}{16(\text{Gr}_l \text{Pr}(T_c))^{\frac{3}{4}}} \left( \frac{2\text{Pr}(T_c)}{5(1 + 2\text{Pr}(T_c)^{\frac{1}{2}} + 2\text{Pr}(T_c))} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\partial \text{Gr}_l(T)}{\partial T} \text{ при } \text{Re} < 2300; \right. \\
& \left. \frac{0.0425}{(\text{Gr}_l \text{Pr}(T_c))^{\frac{3}{4}}} \frac{\partial \text{Gr}_l(T)}{\partial C_m} \text{ при } \text{Re} > 2300; \right]
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Выражение для производной от критерия Гросгофа по компоненте тензора теплопроводности T:

$$\frac{\partial \text{Gr}_l(T)}{\partial T} = \frac{g\beta l^3}{\nu(T_c)^2}; \tag{2.39}$$

Возмущённые граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
& - \left[ \left( \lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \left( \lambda_{\theta\theta}(T) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$z \in [0; l_z], \theta = 0, \tau > 0;$$

$$\begin{aligned}
& \left( \lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \\
& + \left( \lambda_{\theta\theta}(T) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) \frac{1}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} = 0,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$z \in [0; l_z], \theta = \pi, \tau > 0;$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \left( \lambda_{zz}(T) + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \left( \lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \right] = 0,
\end{aligned}$$

$$z = 0, \theta \in [0; \pi], \tau > 0;$$

$$\left( \lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} = 0, \tag{2.42}$$

$$z = 0, \theta \in [0; \pi], \tau > 0;$$

$$\begin{aligned}
& \left( \lambda_{zz}(T) + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \\
& + \left( \lambda_{z\theta}(T) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} = q^{\text{эФ}}(T^4) - q^{\text{К}}(T),
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$z = l_z, \theta \in [0; \pi], \tau > 0;$$

Теперь вычтем из возмущенного уравнения теплопроводности невозмущенное, получим уравнение, определяющее поле приращения температур при возмущении параметров на величину  $\Delta$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] + \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) = \\
& = C(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \tau}; \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Выражения для потоков будут иметь следующий вид:

Для диффузного лучистого потока:

$$q_{\text{эф}}(\Delta T) = -4\varepsilon\sigma T^3 \Delta T(\theta, z, \tau); \tag{2.45}$$

Для конвективного естественного потока выражение относительно возмущающей температуры при линеаризации коэффициента теплоотдачи:

$$q^k(\Delta T) = \alpha_k(T) \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\alpha_k(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau) \tag{2.46}$$

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{1}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \right. \\
& \left. + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right] = 0, \tag{2.47} \\
& z \in [0; l_z], \theta = 0, \tau > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{1}{r} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \\
& + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r} \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} = 0, \tag{2.48} \\
& z \in [0; l_z], \theta = \pi, \tau > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \right. \\
& \left. + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \right] = 0, \\
& z = 0, \theta \in [0; \pi], \tau > 0;
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) + \\
& + \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} = -4\varepsilon\sigma T^3 \Delta T(\theta, z, \tau) - \alpha_k(T) \Delta T(\theta, z, \tau) - \\
& - \frac{d\alpha_k(T)}{dT} \Delta T(\theta, z, \tau), \\
& z = l_z, \theta \in [0; \pi], \tau > 0;
\end{aligned} \tag{2.50}$$

При возмущении параметров искомым функций обобщенный функционал  $L$  (функционал Лагранжа) получит вариацию  $\Delta L$ :

$$\Delta L = \delta L + I_1; \tag{2.51}$$

При решении методом регуляризации А.Н. Тихонова

$$\Delta L = \delta L + I_1 + I_\gamma \tag{2.52}$$

Выражение для линейной части приращения функционала невязки имеет вид:

$$\delta L(r, \theta, \tau) = \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \Delta T(\theta, z, \tau) d\tau; \tag{2.53}$$

Выражение  $I_1$  получено таким образом, что в него вход

$$\begin{aligned}
I_1(\theta, z, \tau) = & \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\Psi(z_j, \theta_k, \tau) \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} [\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right] \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right) - \\
& - C(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} d\tau; \tag{2.55}
\end{aligned}$$

$$I_\gamma = \Delta\gamma[\lambda_m^{zz} + \lambda_m^{\theta z} + \lambda_m^{\theta\theta}]d\tau; \tag{2.56}$$

Таким образом запишем новый вид вариации функционала

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) + \\
& + \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\Psi(z_j, \theta_k, \tau)) \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right] \right. \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right] + \\
& \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right) - \right. \\
& \left. - C(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau \tag{2.57}
\end{aligned}$$

При решении задачи методом Тихонова

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K ([T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) + \\
& + \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\Psi(z_j, \theta_k, \tau)) \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right] \right. \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right] + \\
& \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right) - \right. \\
& \left. - C(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) \right) - \\ & - C(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \tau} + \Delta \gamma [\lambda_m^{zz} + \lambda_m^{\theta z} + \lambda_m^{\theta \theta}] d\tau \end{aligned} \quad (2.58)$$

Исходя из условия глобального минимума функционала можно выразить множитель Лагранжа:

$$\psi(z_j, \theta_k, \tau) = \frac{[T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \lambda_{\theta \theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_{z \theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right)}$$

Или при решении задачи методом Тихонова:

$$\psi(z_j, \theta_k, \tau) = \frac{[T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta \gamma [\lambda_m^{zz} + \lambda_m^{\theta z} + \lambda_m^{\theta \theta}]}{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \lambda_{\theta \theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_{z \theta}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \right)};$$

## 2.7 Компоненты градиентов теплофизических параметров

Для получения формулы градиента целевой функции преобразуем выражение для  $\delta L(r, \theta, \tau)$ . Линейную часть приращения целевого функционала, то есть выражение ( ) представим в виде:

$$\sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{zz}} \Delta \lambda_m^{zz} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta r}} \Delta \lambda_m^{\theta r} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta \theta}} \Delta \lambda_m^{\theta \theta}, \quad (2.59)$$

который соответствует трактовке градиента функционала в данном конкретном случае (в данной задаче). Второе слагаемое в выражении для  $\delta L$  представим несколько иначе, чем в соотношении (2.58). Для этого воспользуемся приведенными выше выражениями для возмущенных значений искомых функций, то есть выражениями для  $\lambda_m^{zz}(T + \Delta T)$ ,  $\lambda_m^{\theta z}(T + \Delta T)$ ,  $\lambda_m^{\theta \theta}(T + \Delta T)$ .

Другой вид возмущенного уравнения теплопроводности при изменении параметров на величину  $\Delta$  будет иметь вид:

Первое слагаемое:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M (\lambda_m^{zz} + \Delta \lambda_m^{zz}) (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial (T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial z} \right)$$

Третье слагаемое:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{m=1}^M (\lambda_m^{\theta\theta} + \Delta\lambda_m^{\theta\theta}) (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right)$$

Второе слагаемое в левой части:

$$\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M (\lambda_m^{z\theta} + \Delta\lambda_m^{z\theta}) (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right)$$

Теперь, как и раньше вычтем из возмущенного уравнения теплопроводности невозмущенное, чтобы получить уравнение, определяющее поле приращения температур при возмущении параметров на величину  $\Delta$ :

Первое слагаемое:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M (\lambda_m^{zz} + \Delta\lambda_m^{zz}) (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial z} \right) - \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta\lambda_m^{zz} (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta\lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Третье слагаемое:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{m=1}^M (\lambda_m^{\theta\theta} + \Delta\lambda_m^{\theta\theta}) (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) - \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \right) = \\ & = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{m=1}^M \Delta\lambda_m^{\theta\theta} (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial \theta} \right) + \\ & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial \theta} \Delta T(\theta, z, \tau) \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Для второго слагаемого:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M (\lambda_m^{z\theta} + \Delta\lambda_m^{z\theta}) \left( N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial\theta} \right) - \\
& \quad - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} N_m(T) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial\theta} \right) = \\
& = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta\lambda_m^{z\theta} \left( N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial\theta} \right) + \\
& \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} \left( N_m(T) \frac{\partial\Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial\theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial\theta} \Delta T \right) \right) \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем уравнение теплопроводности относительно приращения теплофизических параметров:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sum_{m=1}^M \Delta\lambda_m^{\theta\theta} \left( N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial\theta} \right) + \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} \left( N_m(T) \frac{\partial\Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial\theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial\theta} \Delta T \right) \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta\lambda_m^{zz} \left( N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} \left( N_m(T) \frac{\partial\Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial z} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial z} \Delta T \right) \right) + \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta\lambda_m^{z\theta} \left( N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial(T(\theta, z, \tau) + \Delta T(\theta, z, \tau))}{\partial\theta} \right) + \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} \left( N_m(T) \frac{\partial\Delta T(\theta, z, \tau)}{\partial\theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{\partial\theta} \Delta T \right) \right) = \\
& = \frac{\partial C(T)}{\partial T} \Delta T(\theta, z, \tau); \tag{2.63}
\end{aligned}$$

Для граничных условий будем иметь следующие выражения:

Таким образом, перепишем наш функционал в немного другом виде:

$$\Delta L(r, \theta, \tau) = \sum_{m=1}^M \frac{\partial\delta I}{\partial\lambda_m^{zz}} \Delta\lambda_m^{zz} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial\delta I}{\partial\lambda_m^{\theta r}} \Delta\lambda_m^{\theta r} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial\delta I}{\partial\lambda_m^{\theta\theta}} \Delta\lambda_m^{\theta\theta} +$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \{(\Psi(z_j, \theta_k, \tau) \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{\theta\theta} (N_m(T) + \frac{dN_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) \right] \right. \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} (N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T) \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{zz} (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{zz} (N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \Delta T) \right) + \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{z\theta} \left( N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) + \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} \left( N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T \right) \right) - \\
& \left. - \frac{\partial C(T)}{\partial T} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta \gamma [\lambda_m^{zz} + \lambda_m^{\theta z} + \lambda_m^{\theta\theta}] \} d\tau \tag{2.64}
\end{aligned}$$

При использовании метода А.Н. Тихонова:

$$\begin{aligned}
\Delta L(r, \theta, \tau) &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{zz}} \Delta \lambda_m^{zz} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta r}} \Delta \lambda_m^{\theta z} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \delta I}{\partial \lambda_m^{\theta\theta}} \Delta \lambda_m^{\theta\theta} + \\
& \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \{(\Psi(z_j, \theta_k, \tau) \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{\theta\theta} \left( N_m(T) + \frac{dN_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) \right] \right. \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} (N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T) \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{zz} (N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{zz} (N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial z} \Delta T) \right) + \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m^{z\theta} \left( N_m(T) + \frac{N_m(T)}{dT} \Delta T \right) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) + \\
& \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} \left( N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T \right) \right) \right\} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{z\theta} \left( N_m(T) \frac{\partial \Delta T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} + \frac{N_m(T)}{dT} \frac{\partial T(z_j, \theta_k, \tau)}{\partial \theta} \Delta T \right) \right) - \\
& - \frac{\partial C(T)}{\partial T} \Delta T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta \gamma [\lambda_m^{zz} + \lambda_m^{\theta z} + \lambda_m^{\theta \theta}] d\tau;
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Выражение для первой компоненты тензора теплопроводности:

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{zz}} = - \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \Psi(z_j, \theta_k, \tau) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial z} \right] d\tau; \tag{2.66}$$

При использовании метода А.Н. Тихонова

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{zz}} = - \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \Psi(\theta, z, \tau) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial z} \right] + \Delta \gamma \lambda_m^{zz} \right] d\tau \tag{2.67}$$

Выражение для второй компоненты тензора теплопроводности:

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta z}} = - \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\Psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) d\tau; \tag{2.68}$$

При использовании метода А.Н. Тихонова

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta z}} = - \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\Psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) + \Delta \gamma \lambda_m^{\theta z} \right] d\tau; \tag{2.69}$$

Выражение для третьей компоненты тензора теплопроводности:

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta \theta}} = -2 \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\Psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) d\tau \tag{2.70}$$

При использовании метода А.Н. Тихонова

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta \theta}} = -2 \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{\Psi(z_j, \theta_k, \tau)}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{\partial (T(z_j, \theta_k, \tau) + \Delta T(z_j, \theta_k, \tau))}{\partial \theta} \right) + \Delta \gamma \lambda_m^{\theta \theta} \right] d\tau; \tag{2.71}$$

## 2.8 Выбор шага спуска

Оценочную формулу для определения оптимальной глубины (шага) спуска в направлении, определяемом методом сопряженных градиентов, можно получить, если воспользоваться известным подходом, основанным на линеаризации зависимости целевой функции от шага спуска в направлении антиградиента, и нахождении минимума этой линеаризованной зависимости [77]. Для реализации такого подхода необходимо решить задачу о приращении поля температур, но в несколько другой постановке чем та постановка, которая рассматривалась выше в обеспечение определения множителей Лагранжа и получения формулы для градиента целевой функции. В данном случае каждому параметру искомым функций даются возмущения, пропорциональные соответствующим компонентам градиента функционала. Обозначим этот коэффициент пропорциональности через  $\alpha_0$ . Тогда малые возмущения, даваемые обобщенному вектору теплопроводности и объемной теплоемкости при решении задачи о приращении поля температур определяются следующим выражением:

Для обобщённого вектора теплопроводности:

$$\Delta \vec{\lambda} = \alpha_0 L'(\vec{\lambda}); \quad (2.72)$$

Важным является вопрос о выборе коэффициента  $\alpha_0$ , обеспечивающего малость. Пусть эта малость определяется числом  $\omega$ , составляющим малую долю от модуля вектора теплопроводности  $\vec{\lambda}$  и объемной теплоемкости. Тогда, учитывая соотношения, получим:

$$\alpha_0 = \frac{\omega \vec{\lambda}}{|L'(\vec{\lambda})|}; \quad (2.73)$$

Чтобы получить оценочную формулу для  $\alpha^s$  [78-81] введем в рассмотрение скалярную функцию  $F$  аргумента  $\alpha^s$ , характеризующую изменение величины целевого функционала  $L'(\vec{\lambda})$  в направлении антиградиента в точке  $\vec{\lambda}$ :

$$F(\alpha^s) = L(\vec{\lambda} - \alpha^s L'(\vec{\lambda})); \quad (2.74)$$

Будем считать  $\alpha^s$  малой величиной, квадратом и высшими степенями которой можно пренебречь. Тогда используя разложение функции в ряд Тейлора по степеням  $\alpha^s L'(\vec{\lambda})$  и пренебрегая нелинейными членами в этом разложении, получим:

$$F(\alpha^s) = \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left[ T(z_j, \theta_k, \tau) + \frac{\partial T(\vec{\lambda})}{\partial \vec{\lambda}} \alpha^s L'(\vec{\lambda}) - \tilde{T} \right]^2 d\tau; \quad (2.75)$$

Величины частных производных  $\frac{\partial T(\vec{\lambda})}{\partial \vec{\lambda}}$  заменим их конечно-разностными аналогами:

$$\frac{\partial T(\vec{\lambda}, C)}{\partial \vec{\lambda}} = \frac{\Delta T(r, \theta, \tau)}{\alpha_0 L'(\vec{\lambda}, C)}; \quad (2.76)$$

$\Delta T(r, \theta, \tau)$  – решение задачи для приращения температуры

Дифференцируя полученное выражение для  $F(\alpha^s)$  по  $\alpha^s$  и приравнявая производную к 0, а также разрешая его относительно  $\alpha^s$ , получим следующее выражение для оценки глубины спуска в направлении антиградиента целевого функционала:

$$\alpha^s = \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T(z_j, \theta_k, \tau) - \tilde{T}] \frac{\alpha_0}{\Delta T(z_j, \theta_k, \tau)} d\tau; \quad (2.77)$$

## 2.9 Алгоритм метода сопряженных градиентов

В качестве численного метода минимизации целевого функционала применим метод сопряженных градиентов, как наиболее точного метода первого порядка точности, позволяющего достичь требуемой сходимости за минимальное число итераций.

Применительно к рассматриваемой задаче для обобщенного вектора теплопроводности имеем следующий итерационный алгоритм численного решения:

$$\vec{\lambda}^{n+1} = \vec{\lambda}^n + \Delta \vec{\lambda}^{n+1}, \quad (2.78)$$

где

$$\Delta \vec{\lambda}^{n+1} = -\beta_{kp}^{(n)}; \quad (2.79)$$

Направление спуска определяется из:

$$\vec{p}^n = \text{grad}S(\vec{\lambda}^n) + \beta_n \vec{p}^{n-1}; \quad (2.80)$$

$$\beta_0 = 0, p^{(0)} = \text{grad}S(\lambda^{(0)}); \quad (2.81)$$

$$\beta_n = \frac{|\text{grad}S(\lambda^{(n)})|^2}{|\text{grad}S(\lambda^{(n-1)})|^2}; \quad (2.82)$$

Критерием останова итерационного процесса является выражение:

$$|\text{grad}S(\lambda^{(0)})| = \sqrt{\left\{ \sum_{p=1}^3 \left[ \frac{\partial S(\lambda^{(n)})}{\partial \lambda_p} \right]^2 \right\}} \leq \delta_{sum}; \quad (2.84)$$

Учитывая возможное существенное отличие друг от друга модулей векторов  $\vec{\lambda}_{zz}, \vec{\lambda}_{z\theta}, \vec{\lambda}_{\theta\theta}$  и разительное отличие этих векторов от вектора  $C$  (в десятки-сотни тысяч раз), итерационный процесс по уточнению приближений этих векторов должен осуществляться для каждого вектора отдельно, например, поочередно. При реализации градиентных методов минимизации целевого функционала самыми важными моментами в этой реализации является вычисление градиента функционала  $S$  перед каждым уточнением вектора параметров (на каждой итерации) и определение глубины (шага) спуска в направлении вектора  $P$ , зависящем от значений градиента на данной и предыдущей итерациях.

Таким образом, получена методика идентификации компонент симметричного тензора теплопроводности, включающая следующую последовательность действий:

1. Решается «прямая» задача теплопереноса внутри выбранного ОИ в анизотропном приближении при выбранном начальном приближении вектора теплопроводности.
2. Составляется среднеквадратичный регуляризируемый функционал невязки между теоретическим и экспериментальным полем температур.
3. Выбирается регуляризирующий параметр в соответствии с выбранным методом регуляризации.

4. Решается задача оптимизации по поиску искомых характеристик в виде параметров, помноженных на их базисные функции, учитывающие их зависимость от температуры ОИ.

5. Если разница на двух соседних итерациях значений, полученных новых параметризованных характеристик по модулю меньше интегральной погрешности, то считается, что мы попали в точку глобального минимума, иначе необходимо выполнить п.1-5. еще раз.

**Выводы по главе 2**

1. Рассмотрена методика идентификации симметричного тензора теплопроводности по данным замеров температур.

2. По данной методике составлен последовательный алгоритм идентификации компонент симметричного тензора теплопроводности. Рассмотрены вопросы сходимости решения, единственности и устойчивости.

### Глава 3 Модернизация численного метода для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твердых телах

#### 3.1 Численное решение поставленной задачи

Для численного решения прямой нелинейной задачи в анизотропной полосе будем использовать экономичный, абсолютно устойчивый конечно-разностный метод [82-84] переменных направлений с экстраполяцией (МПНЭ), изложенный в работе [9], с линеаризацией нелинейных коэффициентов по одному из следующих методов (усреднения приводятся в направлении пространственной переменной  $z$ ; в направлении переменной  $\theta$  используются аналогичные соотношения):

Коэффициенты математической модели при решении краевых задач вычисляются путем линейной интерполяции таблично заданных функций, что существенно уменьшает время вычислений. Если исходные табличные данные задаются с большой дискретностью, предварительно осуществляется их интерполяция базисными функциями с целью построения последующей линейной интерполяции.

1) характеристики переноса вычисляются по распределению функции и на предыдущем временном слое, где они известны:

$$\tilde{\lambda}_i^n \equiv \lambda^n(T_i^k); \quad \tilde{\lambda}_i^n \equiv C^n(T_i^k); \quad (3.0)$$

2) приводится усреднение по характеристикам между двумя узлами  $i$  и  $i+1$ :

$$\tilde{\lambda}_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{2} [\tilde{\lambda}^n(T_i^{k+1}) - \tilde{\lambda}^n(T_{i\pm 1/2}^{k+1/2})]; \quad (3.1)$$

где

$$\tilde{\lambda}^n(T_p^{k+1/2}) = 2\lambda^n(T_p^k) - 2\lambda^n\left(T_p^{k-\frac{1}{2}}\right) + O(\tau^2), \quad p = i, i \pm 1, n = zz, z\theta, \theta\theta; \quad (3.2)$$

$$C_i^{k+1/2} = 2C(T_i^k) - C\left(T_i^{k-\frac{1}{2}}\right) + O(\tau^2); \quad (3.3)$$

3) приводится усреднение по функции и между двумя узлами  $i$  и  $i+1$

$$C_i^{k+\frac{1}{2}} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_{zz} T^{k+\frac{1}{2}} + 2\Lambda_{z\theta} T^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_{\theta\theta} T^{k+\frac{1}{2}}; \quad (3.4)$$

на сетках с шаблоном, представленным на рисунке 4, схема МПНЭ для уравнения (4.0) примет вид

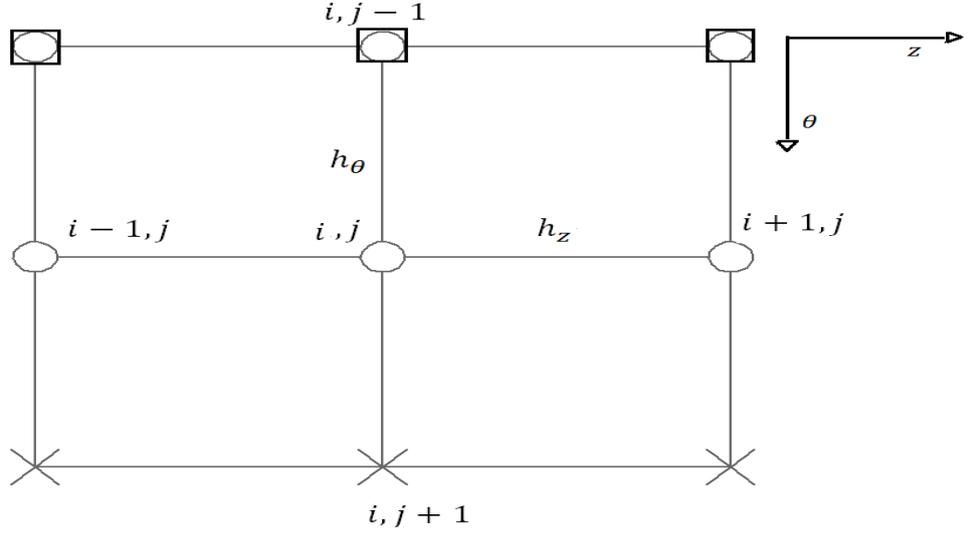


Рисунок 4 - Конечно-разностный шаблон МПН

$$\Lambda_{zz} T^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \right); \quad (3.5)$$

$$\Lambda_{z\theta} \tilde{T}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2rh_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1} \tilde{T}_{i+1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{2}{2rh_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j-1} \tilde{T}_{i-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \right); \quad (3.6)$$

$$\Lambda_{\theta\theta} \tilde{T}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{r^2 h_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} \tilde{T}_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \right); \quad (3.7)$$

Аппроксимация конвективного теплового потока на предыдущем временном слое, где температура  $T_{i,j}^k$  известна:

$$q_{i,j}^k = \alpha_k(T_{i,j}^k)(T_{i,j}^{k+1/2} - T_c) = \alpha_k(T_{i,j}^k)T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^{k+1/2}T_c, \quad (3.8)$$

$$\alpha_k(T_{i,j}^k) = Nu_l(T_{i,j}^k) \frac{\lambda_B(T_c)}{l_{\text{эф}}}; \quad (3.9)$$

Для ламинарного пограничного слоя:

$$Nu_l = \frac{3}{4} \left( \frac{2Pr(T_c)}{5(1 + 2Pr(T_c))^{\frac{1}{2}} + 2Pr(T_c)} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\beta r^3 (T_{i,j+1}^k - T_c)}{\nu(T_c)^2} Pr \right)^{\frac{1}{4}}; Re < 2300 \quad (3.10)$$

Для турбулентного пограничного слоя получаем:

$$Nu_l = 0.17 \left( \left( \frac{g\beta r^3 (T_{i,j}^k - T_c)}{\nu(T_c)^2} \right) Pr \right)^{\frac{1}{4}} \text{ при } Re > 2300; \quad (3.11)$$

Для аппроксимации граничных условий со вторым порядком разложим значения составляющих векторов тепловых потоков на границах  $z=0$ ,  $z=l_z$ , в окрестности этих границ в ряды Тейлора до вторых производных включительно, получим:

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j+1}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,0} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \frac{h_z}{2} + O(h_z^2) \quad (3.12)$$

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j-1}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \frac{h_z}{2} + O(h_z^2), \quad (3.13)$$

откуда с использованием дифференциального уравнения и конечно-разностной аппроксимации левых частей в последних соотношениях центральными разностями, находим:

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(r, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,0}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2(\frac{h_z}{2})} + O\left(\frac{h_z^2}{4}\right) -$$

$$\frac{h_z}{2} \left[ C(T)\rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} + O(h_z^2); \quad (3.14)$$

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j}^{k+1} = \lambda_{zz}(T) \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_z}{2}\right)} + O\left(\frac{h_z^2}{4}\right) -$$

$$\frac{h_z}{2} \left[ C(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{z\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} + O(h_z^2) \quad (3.15)$$

Подставляя в краевые условия и аппроксимируя дифференциальные операторы, входящие в, получим для подсхемы:

$$\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0} T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0} \tilde{T}_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{T}_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2r_i} \frac{2\left(\frac{h_z}{2}\right)}{2\left(\frac{h_\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{h_z}{2} \left[ \tilde{C} \frac{T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,0} T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{2h_z}{2} \right.$$

$$\left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0} T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \right) \Big] + O(h_z^2 + h_\theta^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^N q^{\text{над}} - (\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j} \sigma T_{i,j}^{3k} \times$$

$$\times \left( T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^k \right) - \alpha_\kappa (T_{i,j}^k) T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} T_c; \quad i = 0, \dots, I, j = J; \quad (3.16)$$

$$- \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j} \tilde{T}_{i,1} + \tilde{T}_{i,0}}{2r_i} \frac{2\left(\frac{h_z}{2}\right)}{2\left(\frac{h_\theta}{2}\right)}$$

$$- \frac{h_z}{2} \left[ \tilde{C} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,j} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{2}{2rh_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1} T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{2h_z}{2} \right. \\
& \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j-1} T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \right) + O(h_z^2 + h_\theta^2 + \tau) = 0; \\
& i = 0, \dots, I, j = 0;
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Таким образом, конечно-разностная задача сводится к системе линейных алгебраических дифференциальных уравнений (СЛАУ) с трех-диагональными матрицами (порядок аппроксимации отброшен) [85-88]:

$$b_1 T_1^{k+1/2} - c_1 T_2^{k+1/2} = d_1; j = 1, k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.18}$$

$$a_j T_{j-1}^{k+1/2} + b_j T_j^{k+1/2} - c_j T_{j+1}^{k+1/2} = d_j \tag{3.19}$$

$$a_{j-1} T_{j-2}^{k+1/2} + b_{j-1} T_{j-1}^{k+1/2} = d_{j-1}, j = J - 1, k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.20}$$

Коэффициенты СЛАУ определяются выражениями:

$$a_j = \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2h_z^2}; \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
b_j = & - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2h_z^2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2h_z^2} - \\
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2r^2 h_\theta^2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2r^2 h_\theta^2};
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$c_j = - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2h_z^2}; \tag{3.33}$$

$$d_j = C_j^{k+1} \frac{T_{i,j}^k}{\tau}; \tag{3.34}$$

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в количестве  $J-1$  уравнений имеет трехдиагональный вид, причем  $a_1 = 0$  и  $c_{J-1} = 0$ .

Решение СЛАУ определяются в форме:

$$T_j^{k+\frac{1}{2}} = A_j T_{j+1}^{k+\frac{1}{2}} + B_j, j = 1, J-1; \quad (3.17)$$

$$T_0^{k+\frac{1}{2}} = f(q_i); T_J^{k+\frac{1}{2}} = f(q_I) \quad (3.18)$$

Где  $A_j, B_j$  –прогоночные коэффициенты, определяемые путем последовательного исключения неизвестных в СЛАУ (3.18-3.20).

$$T_i^{k+1} = \frac{c_j}{b_j - a_j A_{j-1}} T_{j+1}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{d_j + a_j B_{j-1}}{b_j - a_j A_{j-1}}, j = 1, J-1; \quad (3.19)$$

И последующего сравнения (3.19) с (3.18) для каждого  $i, i = 1, I-1$ , получим:

$$A_i = \frac{c_j}{b_j - a_j A_{j-1}}, B_j = \frac{d_j + a_j B_{j-1}}{b_j - a_j A_{j-1}}, j = 1, J-1; \quad (3.20)$$

Так как для  $j = 1$   $a_1 = 0$ , то

$$A_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1}; \quad (3.21)$$

В прямом ходе прогонки определяются прогоночные коэффициенты  $A_i, B_i, i = 1, I-2$ , по формулам (3.21), (3.20). При  $i = 1, I-1$   $c_{I-1} = 0$  и, следовательно,

$$A_{J-1} = 0, B_{J-1} = \frac{d_{J-1} + a_{J-1} B_{J-2}}{b_{J-1} - a_{J-1} A_{J-2}}; \quad (3.22)$$

В обратной ходе определяются значения  $T_j^{k+\frac{1}{2}}, i = 1, I-1, I-2, \dots, 1$  по формулам и прогоночным коэффициентам

$$T_{J-1}^{k+\frac{1}{2}} = A_{J-1} T_J^{k+\frac{1}{2}} + B_{J-1} (A_{J-1} = 0)$$

$$T_{J-2}^{k+\frac{1}{2}} = A_{J-2}T_I^{k+\frac{1}{2}} + B_{J-2}(A_{J-1} = 0) \quad (3.23)$$

.....

$$T_1^{k+\frac{1}{2}} = A_1T_2^{k+\frac{1}{2}} + B_1$$

Для нахождения коэффициентов  $A_0, B_0$  воспользуемся нашим выражением по аппроксимации граничного теплового потока (3.14), откуда выразим значение  $T_0^{k+\frac{1}{2}}$  через  $T_1^{k+\frac{1}{2}}$ .

Таким образом, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=1}^N q^{\text{пад}} + (\varepsilon_{i,j}\sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j}\sigma T_{i,j,0}^{3k}) T_{i,0}^k - \alpha_k(T_{i,j}^k)T_c - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_z}{2}\right)} - \right. \\ & - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{2r} \frac{T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} + \frac{h_z}{2} \left[ -\tilde{C} \frac{T_{i,0}^k}{\tau} - \frac{1}{h_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0}}{2} \frac{T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} - \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} - \frac{2}{2rh_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,0}}{2} \frac{T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i-1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] \Big\} / \\ & / \left( -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} - \frac{h_z}{2} \left[ \frac{\tilde{C}}{\tau} - \frac{1}{h_\theta} \left( -\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0}}{2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) \right] + \alpha_k(T_{i,j}^k) + \varepsilon_{i,j}\sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j}\sigma T_{i,j,0}^{3k} \right); \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$T_0^{k+\frac{1}{2}} = A_0T_1^{k+\frac{1}{2}} + B_0; \quad (3.25)$$

Откуда получаем явные зависимости для  $A_0$  и  $B_0$ :

$$\begin{aligned}
A_0 = & \left[ -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right] / \left( -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \right. \\
& + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} - \frac{h_z}{2} \left[ \frac{\tilde{c}}{\tau} - \frac{1}{h_\theta} \left( -\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0}}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) \right] + \alpha_\kappa(T_{i,j}^k) + \varepsilon_{i,j}\sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j}\sigma T_{i,j,0}^{3k}; \tag{3.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 = & \left[ \sum_{i=1}^N q^{\text{над}} + \left( \varepsilon_{i,j}\sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j}\sigma T_{i,j,0}^{3k} \right) T_{i,0}^k - \alpha_\kappa(T_{i,j}^k) T_c \right] + \frac{h_z}{2} \left[ -\tilde{c} \frac{T_{i,0}^k}{\tau} \right. \\
& - \frac{1}{h_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0}}{2} \frac{T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} - \right. \\
& \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} - \frac{2}{2rh_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,0}}{2} \frac{T_{i+1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i-1,1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] / \left( -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \right. \\
& \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} - \frac{h_z}{2} \left[ \frac{\tilde{c}}{\tau} - \frac{1}{h_\theta} \left( -\frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0}}{2} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,0}}{2} \frac{T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) \right] + \alpha_\kappa(T_{i,j}^k) + \varepsilon_{i,j}\sigma T_{i,0}^{4k} + 4\varepsilon_{i,j}\sigma T_{i,j,0}^{3k} \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Также необходимо найти выражения для  $T_{J-1}^{k+\frac{1}{2}}, T_J^{k+\frac{1}{2}}$ . Для этого выразим из выражение для  $T_{J-1}^{k+\frac{1}{2}}$  через  $T_J^{k+\frac{1}{2}}$ . Таким образом, получим систему уравнений:

$$T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} = \left[ -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_z}{2}\right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j}}{2r} \frac{\tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h_z}{2} \left[ \tilde{C} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,j}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1}}{2} \frac{T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j-1}}{2} \frac{T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] / \left[ -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{4 \left( \frac{h_z}{2} \right)} \right] \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} = A_{j-1} T_j^{k+\frac{1}{2}} + B_{j-1}; \quad (3.29)$$

Откуда получаем явные зависимости для  $T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}$  и  $T_j^{k+\frac{1}{2}}$ .

$$\begin{aligned}
T_j^{k+\frac{1}{2}} = & -\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j}}{2r} \frac{\tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left( \frac{h_\theta}{2} \right)} - \frac{h_z}{2} \left[ -\tilde{C} \frac{T_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{h_\theta} \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,j}}{2} \frac{T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right] - \frac{2}{2rh_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1}}{2} \frac{T_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \\
& \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j-1}}{2} \frac{T_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) - B_{j-1} \Big/ \left[ A_{j-1} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{4 \left( \frac{h_z}{2} \right)} + \right. \\
& \left. + \frac{h_z}{2} \left[ \frac{\tilde{C}}{\frac{\tau}{2}} + \frac{1}{h_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2h_\theta} \right) \right] \right] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

При подстановке полученного выражения для  $T_j^{k+\frac{1}{2}}$  в (3.29) получаем  $T_j^k$

Теперь запишем вид схемы на целом временном слое:

$$C_i^{k+1} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k-1/2}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_{zz} T^{k+1} + 2\Lambda_{z\theta} T^{k+1} + \Lambda_{\theta\theta} T^{k+1}, \quad (3.31)$$

где

$$\Lambda_{zz}T^{k+1} = \frac{1}{h_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2} \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{h_z} \right); \quad (3.32)$$

$$\Lambda_{z\theta}T^{k+1} = \frac{1}{h_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1}}{h_z} \right); \quad (3.33)$$

$$\Lambda_{\theta\theta}T^{k+1} = \frac{1}{r^2 h_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1}}{h_\theta} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1}}{h_\theta} \right); \quad (3.34)$$

Теперь аналогично запишем аппроксимацию граничных условий составляющих векторов тепловых потоков на границах  $\theta = 0, \theta = \pi$  для целого временного слоя, получим:

$$\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j+1}^{k+1} = \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j}^{k+1} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{2} + O(h_\theta^2) \quad (3.35)$$

$$\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{\pi-1,j}^{k+1} = \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{\pi,j}^{k+1} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \theta} \right) \frac{h_\theta}{2} + O(h_\theta^2) \quad (3.36)$$

Откуда с использованием дифференциального уравнения и конечно-разностной аппроксимации левых частей в последних соотношениях центральными разностями, находим:

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j}^{k+1} &= \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{T_{1,j}^{k+1} - T_{0,j}^{k+1}}{2(\frac{h_\theta}{2})} + O\left(\frac{h_\theta^2}{4}\right) - \\ &- \frac{h_\theta}{2} \left[ C(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{0,j}^{k+1} \\ &+ O(h_\theta^2) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{\pi,j}^{k+1} = \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{2(\frac{h_\theta}{2})} + O\left(\frac{h_\theta^2}{4}\right) +$$

$$+ \frac{h_\theta}{2} \left[ C(T) \rho \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zz}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda_{\theta z}(T) \frac{\partial T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \right) \right] \Big|_{l,j}^{k+1} \quad (3.38)$$

$$+ O(h_\theta^2)$$

Откуда по аналогии, находим:

$$\begin{aligned} & \frac{(\widetilde{\lambda_{\theta z}})_{0,j+1} - (\widetilde{\lambda_{\theta z}})_{0,j-1}}{2h_z} \frac{T_{0,j+1}^{k+1} - T_{0,j}^{k+1}}{2} + \frac{(\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{1,j} + (\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{0,j}}{r} \frac{T_{1,j}^{k+1} - T_{0,j}^{k+1}}{2h_\theta} + \\ & + \frac{h_\theta}{2} \left[ \widetilde{C} \frac{T_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_z} \left( \frac{(\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{0,j+1} + (\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{i,j}}{2} \frac{T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{0,0} + (\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{0,j-1}}{2} \frac{T_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left( \frac{(\widetilde{\lambda_{z\theta}})_{1,j} + (\widetilde{\lambda_{z\theta}})_{0,j}}{2} \frac{T_{1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(\widetilde{\lambda_{z\theta}})_{1,j-1} + (\widetilde{\lambda_{z\theta}})_{0,j-1}}{2} \frac{T_{1,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] + O(h_z^2 + h_\theta^2 + \tau) = 0; j = 0, \dots, J; i = 0; \quad (3.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{(\widetilde{\lambda_{\theta z}})_{l,j+1} - (\widetilde{\lambda_{\theta z}})_{l,j-1}}{2h_z} \frac{T_{l,j+1}^{k+1} - T_{l,j}^{k+1}}{2} - \frac{(\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{l,j} + (\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{l-1,j}}{r} \frac{T_{l,j}^{k+1} - T_{l-1,j}^{k+1}}{2h_\theta} - \\ & - \left[ \widetilde{C} \frac{T_{l,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{l,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_z} \left( \frac{(\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{l,j+1} + (\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{l,j}}{2} \frac{T_{l,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{l,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{l,j} + (\widetilde{\lambda_{\theta\theta}})_{l,j-1}}{2} \frac{T_{l,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{l,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left( \frac{(\widetilde{\lambda_{z\theta}})_{l,j+1} + (\widetilde{\lambda_{z\theta}})_{l-1,j+1}}{2} \frac{T_{l,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{l-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(\widetilde{\lambda_{z\theta}})_{l-1,j-1} + (\widetilde{\lambda_{z\theta}})_{l-1,j-1}}{2} \frac{T_{l-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{l-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] + O(h_z^2 + h_\theta^2 + \tau) = 0; \quad (3.40) \end{aligned}$$

$$j = 0, \dots, J; i = I$$

Таким образом, также на целом временном слое получаем СЛАУ:

$$b_1 T_1^{k+1} - c_1 T_2^{k+1} = 0; i = 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

$$a_i T_{i-1}^{k+1} + b_i T_i^{k+1} - c_i T_{i+1}^{k+1} = 0 \quad (3.42)$$

$$a_{I-1} T_{I-2}^{k+1} + b_{I-1} T_{I-1}^{k+1} = 0, i = I - 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

Решение СЛАУ определяются в форме:

$$T_i^{k+1} = A_i T_{i+1}^{k+1} + B_i, i = 1, I - 1; \quad (3.44)$$

$$T_0^{k+1} = f(q_i); T_I^{k+1} = f(q_I) \quad (3.45)$$

Где  $A_i, B_i$  –прогоночные коэффициенты, определяемые путем последовательного исключения неизвестных в СЛАУ (3.41-3.43)

$$T_i^{k+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i A_{i-1}} T_{i+1}^{k+1} + \frac{d_i + a_i B_{i-1}}{b_i - a_i A_{i-1}}, i = 1, I - 1; \quad (3.46)$$

И последующего сравнения (3.44) с (3.46) для каждого  $i, i = 1, I - 1$ , получим:

$$A_i = \frac{c_i}{b_i - a_i A_{i-1}}, B_i = \frac{d_i + a_i B_{i-1}}{b_i - a_i A_{i-1}}, i = 1, I - 1; \quad (3.47)$$

Так как для  $i = 1$   $a_1 = 0$ , то

$$A_1 = \frac{c_1}{b_1}, A_1 = \frac{d_1}{b_1}; \quad (3.48)$$

В прямом ходе прогонки определяются прогоночные коэффициенты  $A_i, B_i, i = 1, I - 2$ , по формулам (3.47) и (3.48). При  $i = 1, I - 1$   $c_{I-1} = 0$  и, следовательно:

$$A_{I-1} = 0, B_{I-1} = \frac{d_{I-1} + a_{I-1} B_{I-2}}{b_{I-1} - a_{I-1} A_{I-2}}; \quad (3.49)$$

В обратной ходе определяются значения  $T_i^{k+1}, i = 1, I - 1, I - 2, \dots, 1$  по формулам и прогоночным коэффициентам

$$T_{I-1}^{k+1} = A_{I-1} T_I^{k+1} + B_{I-1} (A_{I-1} = 0)$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{h_\theta}{2} \left[ -\tilde{C} \frac{T_{0,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,0} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j-1}}{2} \frac{T_{0,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2}{2rh_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j}}{2} \frac{T_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{1,j-1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j-1}}{2} \frac{T_{1,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{0,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] \Bigg/ \\
& \left[ \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j+1} - (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{0,j-1}}{4h_z} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{2rh_\theta} + \frac{h_\theta}{2} \left[ \frac{\tilde{C}}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2h_z} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j-1}}{2h_z} \right) \right] \right] \tag{3.54}
\end{aligned}$$

Также необходимо найти выражения для  $T_{I-1}^{k+1}, T_I^{k+1}$ . Для этого выразим из выражение для  $T_{I-1}^{k+1}$  через  $T_I^{k+1}$ . Таким образом, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
T_{I-1,j}^{k+1} = & \left[ \tilde{C} \frac{T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j}^k}{\frac{\tau}{2}} - \frac{1}{h_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j}}{2} \frac{T_{I,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j-1}}{2} \frac{T_{I,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) - \frac{2}{2rh_\theta} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j+1}}{2} \frac{T_{I,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j-1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j-1}}{2} \frac{T_{I-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{I-1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{2h_z}{2}} \right) \right] \Bigg/ \\
& \left[ \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{I-1,j}}{2h_\theta r} + \frac{2}{2rh_\theta} \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{I-1,j+1}}{2h_z} \right] \tag{3.55}
\end{aligned}$$

$$T_{I-1}^{k+1} = A_{I-1} T_I^{k+1} + B_{I-1} \tag{3.56}$$

При подстановке полученного выражения для  $T_{I-1}^{k+1}$  в (3.56) получаем  $T_I^k$

### 3.2 Алгоритм численного решения задачи вариации температурного поля

Для численного решения прямой нелинейной задачи вариации температурного поля также будем использовать МПН.

Коэффициенты математической модели при решении краевых задач вычислены в ходе составления конечно-разностного шаблона, использованного при решении задачи (2.44-2.50).

$$\frac{C_i^{k+\frac{1}{2}}}{1+\bar{\Delta}} \frac{\Delta T_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{ij}^k}{\frac{\tau}{2}} = \Delta\Lambda_{zz} T^{k+\frac{1}{2}} + 2\Delta\Lambda_{z\theta} T^{k+\frac{1}{2}} + \Delta\Lambda_{\theta\theta} T^{k+\frac{1}{2}}; \quad (3.57)$$

на сетках с шаблоном, представленным на рис., схема МПНЭ для уравнения (4.0) примет вид

$$\Delta\Lambda_{zz} T^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2} \frac{\Delta T_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) - \frac{1}{h_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_z} \right) \quad (3.58)$$

$$\Delta\Lambda_{\theta\theta} T^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_\theta r^2} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2} \frac{\Delta \bar{T}_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) - \frac{1}{h_\theta r^2} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right); \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{h_\theta r^2} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\lambda_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\lambda_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) - \Delta\Lambda_{z\theta} T^{k+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2rh_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1}}{2} \frac{\Delta \bar{T}_{i+1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) - \frac{2}{2rh_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j+1}}{2} \frac{\Delta \bar{T}_{i-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i-1,j+1}^{k+\frac{1}{2}}}{h_\theta} \right) \quad (3.60)$$

Теперь необходимо провести аппроксимацию вариаций тепловых потоков.

1. Для вариации диффузного лучистого теплового потока:

$$\delta q_{\text{эф}}(\Delta T) = -4\varepsilon_m \sigma T_{i,j1}^{k+\frac{1}{2}3} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}; \quad (3.61)$$

2. Для вариации конвективного естественного теплового потока выражение относительно возмущающей температуры при линеаризации коэффициента теплоотдачи:

$$q^k(\Delta T) = \alpha_k \left( T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \Delta T_{i,j}^k + \frac{d\alpha_k(T)}{dT} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}; \quad (3.62)$$

Где выражение для производной конвективного коэффициента теплоотдачи не зависит от вариации температуры и уже посчитано ранее:

Для аппроксимации граничных условий ограничимся первым порядком точности:

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,1}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,0} + O(h_z) \quad (3.63)$$

$$\lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j-1}^{k+1/2} = \lambda_{zz}(T) \frac{\partial \Delta T(z, \theta, \tau)}{\partial z} \Big|_{i,j} + O(h_z), \quad (3.64)$$

Откуда с использованием конечно-разностной аппроксимации граничных условий получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left( \frac{h_z}{2} \right)} = - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left( \frac{h_z}{2} \right)} - \\ & - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\partial \Delta T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left( \frac{h_\theta}{2} \right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left( \frac{h_\theta}{2} \right)} = 0; \\ & \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left( \frac{h_z}{2} \right)} = - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left( \frac{h_z}{2} \right)} - \\ & - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\partial \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left( \frac{h_\theta}{2} \right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,j}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left( \frac{h_\theta}{2} \right)} = \\ & = -4\varepsilon_m \sigma T_{i,j1}^{k+\frac{1}{2}3} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \alpha_k \left( T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \Delta T_{i,j}^k - \frac{d\alpha_k(T)}{dT} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}; \end{aligned} \quad (3.65)$$

Таким образом, конечно-разностная задача сводится к системе линейных алгебраических дифференциальных уравнений (СЛАУ) с трех-диагональными матрицами (порядок аппроксимации отброшен):

$$b_1 \Delta T_1^{k+1/2} - c_1 \Delta T_2^{k+1/2} = d_1; i = 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.66)$$

$$a_j \Delta T_{j-1}^{k+1/2} + b_j \Delta T_j^{k+1/2} - c_j \Delta T_{j+1}^{k+1/2} = d_j \quad (3.67)$$

$$a_{j-1} \Delta T_{j-2}^{k+1/2} + b_{j-1} \Delta T_{j-1}^{k+1/2} = d_{j-1}, j = J - 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.68)$$

Коэффициенты СЛАУ определяются выражениями:

$$a_j = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2h_z^2}; \quad (3.69)$$

$$b_j = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2h_z^2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2h_z^2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j}}{2r^2 h_\theta^2} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j-1}}{2r^2 h_\theta^2}; \quad (3.70)$$

$$c_j = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i-1,j}}{2h_z^2}; \quad (3.71)$$

$$d_j = C_j^{k+1} \frac{T_{ij}^k}{1 + \frac{\Delta \tau}{2}}; \quad (3.72)$$

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в количестве J-1 уравнений имеет трехдиагональный вид, причем  $a_1 = 0$  и  $c_{J-1} = 0$ .

Решение СЛАУ определяются в форме:

$$\Delta T_j^{k+\frac{1}{2}} = A_j \Delta T_{j+1}^{k+\frac{1}{2}} + B_j, j = 1, I - 1; \quad (3.73)$$

$$\Delta T_0^{k+\frac{1}{2}} = f(q_i); T_j^{k+\frac{1}{2}} = f(q_j); \quad (3.74)$$



Таким образом, получим систему из двух уравнений:

$$\Delta T_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} = \left[ -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4} \frac{\Delta T_{i,1}^{k+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right] /$$

$$/ \left[ -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right] \quad (3.80)$$

$$\Delta T_0^{k+\frac{1}{2}} = A_0 \Delta T_1^{k+\frac{1}{2}} + B_0; \quad (3.81)$$

Откуда получаем явные зависимости для  $A_0$  и  $B_0$ :

$$A_0 = -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} /$$

$$/ \left[ -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right] \quad (3.82)$$

$$B_0 = \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,0}^{k+\frac{1}{2}}}{2r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} /$$

$$/ \left[ -\frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4\left(\frac{h_z}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{4r\left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \right] \quad (3.83)$$

Также необходимо найти выражения для  $\Delta T_{j-1}^{k+\frac{1}{2}}$ ,  $\Delta T_j^{k+\frac{1}{2}}$ . Для этого выразим из выражение для  $\Delta T_{j-1}^{k+\frac{1}{2}}$  через  $\Delta T_j^{k+\frac{1}{2}}$ . Таким образом, получим систему уравнений:

$$\Delta T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} = -[-4\varepsilon_M \sigma T_{i,j1}^{k+\frac{1}{2}3} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \alpha_K \left( T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \Delta T_{i,j}^k - \frac{d\alpha_K(T)}{dT} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{h_z}{2}\right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\partial \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \\
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,j}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left(\frac{h_\theta}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{h_z}{2}\right)} \Big/ \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4 \left(\frac{h_z}{2}\right)} \\
& \Delta T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} = A_{j-1} \Delta T_j^{k+\frac{1}{2}} + B_{j-1};
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Откуда получаем явные зависимости для  $\Delta T_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}$  и  $\Delta T_j^{k+\frac{1}{2}}$ :

$$\begin{aligned}
\Delta T_j^{k+\frac{1}{2}} &= [-[-4\varepsilon_m \sigma T_{i,j1}^{k+\frac{1}{2}3} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \alpha_\kappa \left(T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) \Delta T_{i,j}^k - \frac{d\alpha_\kappa(T)}{dT} \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \\
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{h_z}{2}\right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,0}}{2} \frac{\partial \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left(\frac{h_\theta}{2}\right)} \\
& - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i+1,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta z})_{i,j}}{2} \frac{\Delta \tilde{T}_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2r \left(\frac{h_\theta}{2}\right)} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{h_z}{2}\right)} \Big/ \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,0}}{4 \left(\frac{h_z}{2}\right)} - \\
& B_{j-1}] / A_{j-1};
\end{aligned} \tag{3.86}$$

При подстановке полученного выражения для  $\Delta T_j^{k+\frac{1}{2}}$  в (3.85) получаем  $\Delta T_{j-1}^{k+\frac{1}{2}}$

Теперь запишем вид схемы на целом временном слое:

$$\begin{aligned}
\frac{C_i^{k+1}}{1 + \bar{\Delta}} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+1} - \Delta T_{i,j}^k}{\frac{\tau}{2}} &= \Delta \Lambda_{zz} T^{k+1} + 2\Delta \Lambda_{z\theta} T^{k+1} + \Delta \Lambda_{\theta\theta} T^{k+1}; \\
\Delta \Lambda_{zz} T^{k+1} &= \frac{1}{h_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j}}{2} \frac{\Delta T_{i,j+1}^{k+1} - \Delta T_{i,j}^{k+1}}{h_z} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1}}{2} \frac{\Delta T_{i,j}^{k+1} - \Delta T_{i,j-1}^{k+1}}{h_z} \right) +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{h_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} \Delta T_{i,j}^{k+1}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{zz})_{i,j-1} \Delta T_{i,j}^{k+1}}{2} \frac{1}{h_z} \right) \quad (3.87)$$

$$\Delta \Lambda_{\theta\theta} T^{k+1} = \frac{1}{h_\theta r^2} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} \Delta \bar{T}_{i,j+1}^{k+1} - \Delta T_{i,j}^{k+1}}{2} \right) - \frac{1}{h_\theta r^2} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i-1,j} \Delta T_{i,j}^{k+1} - \Delta T_{i-1,j}^{k+1}}{2} \right); \quad (3.88)$$

$$\frac{1}{h_\theta r^2} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\lambda_{\theta\theta})_{i,j-1} \Delta T_{i,j}^{k+1}}{2} - \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} + (\lambda_{\theta\theta})_{i,j-1} \Delta T_{i,j}^{k+1}}{2} \frac{1}{h_\theta} \right) \Delta \Lambda_{z\theta} T^{k+1} = \frac{2}{2rh_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j-1} \Delta \bar{T}_{i+1,j+1}^{k+1} - T_{i+1,j-1}^{k+1}}{2} \right) -$$

$$\frac{2}{2rh_z} \left( \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i+1,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{i-1,j+1} \Delta \bar{T}_{i-1,j+1}^{k+1} - T_{i-1,j+1}^{k+1}}{2} \right) \quad (3.89)$$

Теперь аналогично запишем аппроксимацию граничных условий составляющих векторов тепловых потоков на границах  $\theta = 0, \theta = \pi$  для целого временного слоя, получим:

$$\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j+1}^{k+1} = \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{0,j}^{k+1} + O(h_\theta) \quad (3.90)$$

$$\lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{i-1,j}^{k+1} = \lambda_{\theta\theta}(T) \frac{\partial \Delta T(\theta, z, \tau)}{r \partial \theta} \Big|_{i,j}^{k+1} + O(h_\theta) \quad (3.91)$$

Откуда с использованием конечно-разностной аппроксимации граничных условий получаем:

$$-\left[ \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} \Delta T_{0,j}^{k+1}}{2} \frac{1}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j} \frac{1}{r} \Delta T_{0,j}^{k+1}}{2} \frac{1}{\frac{h_\theta}{2}} \right] + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} \Delta T_{0,j}^{k+1} - \Delta T_{0,j+1}^{k+1}}{2} \frac{1}{\frac{h_z}{2}}$$

$$+ \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} \frac{\Delta T_{1,j}^{k+1} - \Delta T_{0,j}^{k+1}}{h_\theta}}{2r} = 0, i = 0, j = 1, J \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{l,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{l,j+1} \frac{\Delta T_{l,j}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{l,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{l,j} \frac{1}{r} \frac{\Delta T_{l,j}^{k+1}}{\frac{h_\theta}{2}}}{2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{l,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{l,j+1} \frac{\Delta T_{l,j}^{k+1} - \Delta T_{l,j-1}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}}}{2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{l,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{l,j} \frac{\Delta T_{l,j}^{k+1} - \Delta T_{l,j+1}^{k+1}}{h_\theta}}{2r} \right] = 0, i = l, j = 1, J \end{aligned} \quad (3.93)$$

Таким образом, также на целом временном слое получаем СЛАУ:

$$b_1 \Delta T_1^{k+\Delta 1} - c_1 \Delta T_2^{k+1} = 0; i = 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.94)$$

$$a_i \Delta T_{i-1}^{k+1} + b_i \Delta T_i^{k+1} - c_i \Delta T_{i+1}^{k+1} = 0 \quad (3.95)$$

$$a_{l-1} \Delta T_{l-2}^{k+1} + b_{l-1} \Delta T_{l-1}^{k+1} = 0, i = l - 1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.96)$$

Решение СЛАУ определяются в форме:

$$\Delta T_i^{k+1} = A_i \Delta T_{i+1}^{k+1} + B_i, i = 1, l - 1; \quad (3.97)$$

$$\Delta T_0^{k+1} = f(q_i); \Delta T_l^{k+1} = f(q_l) \quad (3.98)$$

Где  $A_i, B_i$  –прогоночные коэффициенты, определяемые путем последовательного исключения неизвестных в СЛАУ (3.94-3.96):

$$\Delta T_i^{k+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i A_{i-1}} \Delta T_{i+1}^{k+1} + \frac{d_i + a_i B_{i-1}}{b_i - a_i A_{i-1}}, i = 1, l - 1; \quad (3.99)$$

И последующего сравнения (3.99) с (3.97) для каждого  $i, i = 1, l - 1$ , получим:

$$A_i = \frac{c_i}{b_i - a_i A_{i-1}}, B_i = \frac{d_i + a_i B_{i-1}}{b_i - a_i A_{i-1}}, \quad i = 1, l - 1; \quad (3.100)$$

Так как для  $i = 1$   $a_1 = 0$ , то



$$-\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} \frac{\Delta T_{0,j+1}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} \frac{\Delta T_{1,j}^{k+1}}{h_\theta}}{2r}}{2}]; \quad (3.106)$$

$$B_0 = \left[ \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2 \frac{h_z}{2}} \right] /$$

$$/ \left[ -\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1}}{2 \frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{0,j}}{2} \frac{1}{r \frac{h_\theta}{2}} - \right.$$

$$\left. -\frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{0,j+1} \frac{\Delta T_{0,j+1}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{i,j} \frac{\Delta T_{1,j}^{k+1}}{h_\theta}}{2r}}{2} \right]; \quad (3.107)$$

Также необходимо найти выражения для  $\Delta T_{l-1}^{k+1}, \Delta T_l^{k+1}$ . Для этого выразим из выражение для  $T_{l-1}^{k+1}$  через  $T_l^{k+1}$ . Таким образом, получим систему уравнений:

$$\Delta T_{l-1,j}^{k+1} = - \left[ \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{l,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{l,j+1} \frac{\Delta T_{l,j}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{l,j+1} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{l,j}}{2} \frac{1}{r} \frac{\Delta T_{l,j}^{k+1}}{\frac{h_\theta}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{z\theta})_{l,j+1} + (\tilde{\lambda}_{z\theta})_{l,j+1} \frac{\Delta T_{l,j}^{k+1} - \Delta T_{l,j-1}^{k+1}}{\frac{h_z}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{l,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{l-1,j} \frac{\Delta T_{l,j}^{k+1}}{h_\theta}}{2r} \right] / \left[ \frac{(\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{l,j} + (\tilde{\lambda}_{\theta\theta})_{l-1,j} \frac{\Delta T_{l,j}^{k+1}}{h_\theta}}{2r} \right]; \quad (3.108)$$

$$\Delta T_0^{k+1} = A_0 \Delta T_2^{k+\frac{1}{2}} + B_0; \quad (3.109)$$

При подстановке полученного выражения для  $\Delta T_{l-1}^{k+1}$  в (3.109) получаем  $\Delta T_l^k$

### 3.3 Вычисление функционала от полученного решения

Для целей численного интегрирования можно воспользоваться различными численными методами [89]. При этом должна обеспечиваться высокая точность вычисления функционала невязки от решения соответствующей краевой задачи, так как большие погрешности в величине градиента могут привести к отсутствию сходимости процесса минимизации в ходе решения обратной задачи

Рассмотрим сначала интегрирование сеточных функций от решения краевой задачи только по пространству. Границы областей интегрирования должны совпадать с узлами

конечно-разностной стеки, применявшейся при решении выбранной постановки задач. Интегрирование функций (2.66-2.71) по пространству осуществляется по формулам:

Выражение для первой компоненты тензора теплопроводности:

$$f_{\lambda_{zz}} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} \left[ \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k} + \Delta T_{j+1,k} - \Delta T_{j,k}}{2h_z} \right] /$$

$$/ \left[ \frac{1}{h_z h_\theta r^2} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \frac{2}{r h_z^2} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{h_z^2} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right) \right]; \quad (3.110)$$

При решении задачи методом регуляризации А.Н. Тихонова для первой компоненты тензора теплопроводности:

$$f_{\lambda_{zz}} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \{ [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} + I_\gamma \} \left[ \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k} + \Delta T_{j+1,k} - \Delta T_{j,k}}{2h_z} \right] +$$

$$+ \Delta \gamma \lambda_m^{zz} / \left[ \frac{1}{h_z h_\theta r^2} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \frac{2}{r h_z^2} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{h_z^2} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right) \right]; \quad (3.111)$$

Для интегрирования по времени можно воспользоваться формулой Симпсона, тогда получим:

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{zz}} = \int_0^{\tau_{max}} f_{\lambda_{zz}} d\tau = \frac{h_\tau}{12} \left[ f_{\lambda_{zz}}(\tau) + 4f_{\lambda_{zz}}\left(\frac{\tau + h_\tau}{2}\right) + f_{\lambda_{zz}}(\tau + h_\tau) \right], \quad (3.112)$$

$$\tau \in [0, \tau_{max} - h_\tau]$$

Выражение для второй компоненты тензора теплопроводности:

$$f_{\lambda_{\theta z}} = - \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} \left[ \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j,k+1} - T_{j,k} + \Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{2h_\theta} \right] /$$

$$/ \left[ \frac{1}{h_z h_\theta r} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \frac{2}{r^2 h_z h_\theta} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \right.$$

$$+ \frac{2}{rh_\theta h_z^2} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right)]; \quad (3.113)$$

При решении задачи методом регуляризации А.Н. Тихонова для второй компоненты тензора теплопроводности:

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{\theta z}} = & - \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \{ [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} + I_\gamma \} \left[ \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j,k+1} - T_{j,k} + \Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{2h_\theta} \right] \\ & + \Delta \gamma \lambda_m^{zz} \} / \left[ \frac{1}{h_z h_\theta r} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \frac{2}{r^2 h_z h_\theta} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2}{rh_\theta h_z^2} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right) \right]; \quad (3.114) \end{aligned}$$

По аналогии с получим (3.112):

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta z}} = \int_0^{\tau_{max}} f_{\lambda_{\theta z}} d\tau = \frac{h_\tau}{12} \left[ \left( f_{\lambda_{\theta z}}(\tau) + 4f_{\lambda_{\theta z}}\left(\frac{\tau + h_\tau}{2}\right) + f_{\lambda_{\theta z}}(\tau + h_\tau) \right) \right], \quad (3.115)$$

$$\tau \in [0, \tau_{max} - h_\tau]$$

Выражение для третьей компоненты тензора теплопроводности:

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{\theta\theta}} = & \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} \left[ \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j,k+1} - T_{j,k} + \Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{2h_\theta} \right] / \\ & / \left[ \frac{1}{h_\theta^2 r^4} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \frac{2}{r^3 h_z h_\theta} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2}{rh_\theta h_z} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right) \right]; \quad (3.116) \end{aligned}$$

При решении задачи методом регуляризации А.Н. Тихонова для второй компоненты тензора теплопроводности:

$$f_{\lambda_{\theta\theta}} = \int_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \{ [T_{j,k} - \tilde{T}_{j,k}] \Delta T_{j,k} + I_\gamma \} \left[ \sum_{m=1}^M N_m(T) \frac{T_{j,k+1} - T_{j,k} + \Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{2h_\theta} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta \gamma \lambda_m^{\theta\theta} / \left[ \frac{1}{h_\theta^2 r^4} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta\theta} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \frac{2}{r^3 h_z h_\theta} \left[ \sum_{m=1}^M \lambda_m^{\theta z} N_m(T) \frac{\Delta T_{j,k+1} - \Delta T_{j,k}}{h_\theta} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{2}{r h_\theta h_z} \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m^{zz} N_m(T) \frac{T_{j+1,k} - T_{j,k}}{h_z} \right) \right]; \tag{3.117}
\end{aligned}$$

По аналогии с получим (3.112):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta\theta}} = \int_0^{\tau_{max}} f_{\lambda_{\theta\theta}} d\tau = \frac{h_\tau}{12} \left[ f_{\lambda_{\theta\theta}}(\tau) + 4f_{\lambda_{\theta\theta}}\left(\frac{\tau + h_\tau}{2}\right) + f_{\lambda_{\theta\theta}}(\tau + h_\tau) \right], \tag{3.118} \\
\tau \in [0, \tau_{max} - h_\tau]
\end{aligned}$$

Суммарная интегральная погрешность вычислительного процесса на n-ой итерации может быть оценена по следующей зависимости:

$$\delta = 0(\Delta T + \Delta \tau + z^2 + \Delta \theta^2),$$

$$\Delta T = \max T(\theta, z, \tau)$$

Таким образом, была произведена модернизация метода идентификации симметричного тензора теплопроводности, заключающаяся в:

1. Решение «прямой» задачи теплопроводности при наличии сложного лучисто-конвективного теплового потока на одной из границ конструкции шпангоута при его аппроксимации до второго порядка точности
2. Решение задачи восстановления компонент симметричного тензора теплопроводности двумя методами регуляризации: методом итерационной регуляризации и методом регуляризации А.Н. Тихонова

### **Выводы по главе 3**

1. В третьей главе диссертационной работы проведена модернизация численного метода для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твердых телах
2. Разработаны структура программного комплекса и взаимосвязи составляющих его вычислительных блоков.

## Глава 4 Тепловая обработка объекта исследования и результаты экспериментального температурного состояния конструкции

### 4.1 Исходные данные для проектирования стенда для проведения наземной тепловой отработки изделия

На рисунке 5 показано распределение тепловых аэродинамических потоков [90] по передней части АСА. Основными нагреваемыми зонами являются: титановый шпангоут, кольцо ТЗП и сферическая часть ТЗП.

Были получены распределения тепловых потоков, полученные на основе результатов расчётных исследований численного решения полной системы уравнений Навье-Стокса [90] (рис. 5).

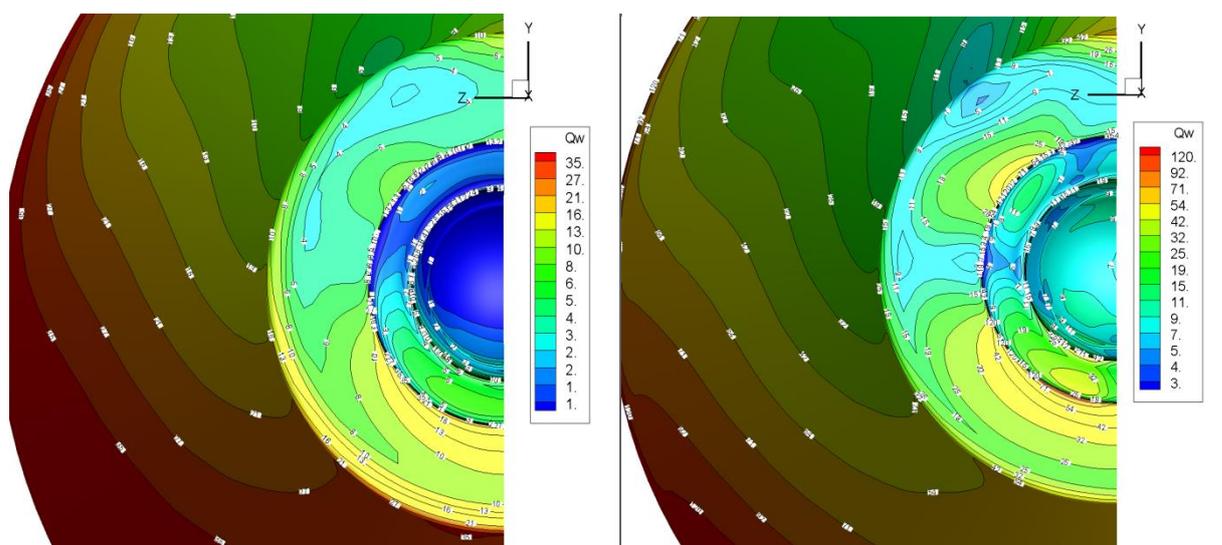


Рисунок 5 - Распределения тепловых потоков, полученные на основе результатов расчётов  
для двух моментов времени

На рисунке 6 показана схема расположения основных участков, нагреваемых при экспериментальной отработке. Считаем, что конструкция стыковочного агрегата и распределение тепловых потоков имеет плоскость, поэтому на рисунке 5 показана только половина передней части ВА. Основными нагреваемыми зонами являются: титановый шпангоут, кольцо ТЗП и сферическая часть ТЗП.

Согласно пространственно-временной модели (ПВМ) тепловые потоки на титановый шпангоут и кольцо ТЗП зависят от угловой координаты  $\omega$ , отсчитываемой по

часовой стрелке от оси симметрии. В диапазоне  $\omega = 0 \div 90^\circ$  тепловые потоки описываются функцией:

$$q = (q_1 - q_3) \cdot \cos \omega + q_3 \quad (4.0)$$

для диапазона  $\omega = 90 \div 180^\circ$

$$q = (q_2 - q_3) \cdot \cos \left( 2\omega - \frac{3}{2}\pi \right) + q_3. \quad (4.1)$$

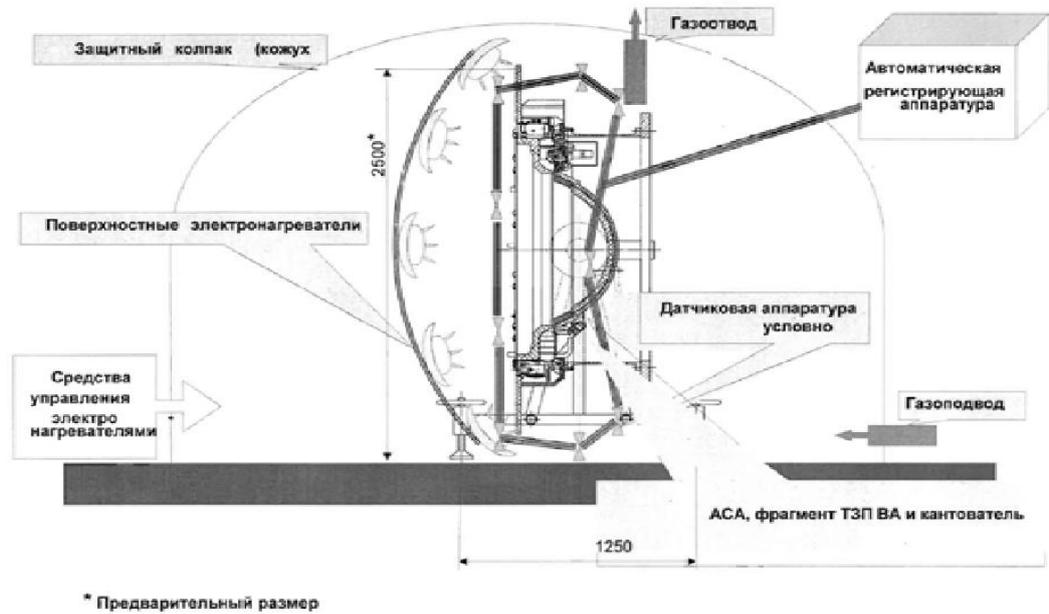


Рисунок 6 – Схема расположения основных участков, нагреваемых при экспериментальной обработке

Используемые при расчете температур АСА тепловые аэродинамические нагрузки, полученные согласно ПВМ, представлены на рисунке 7:

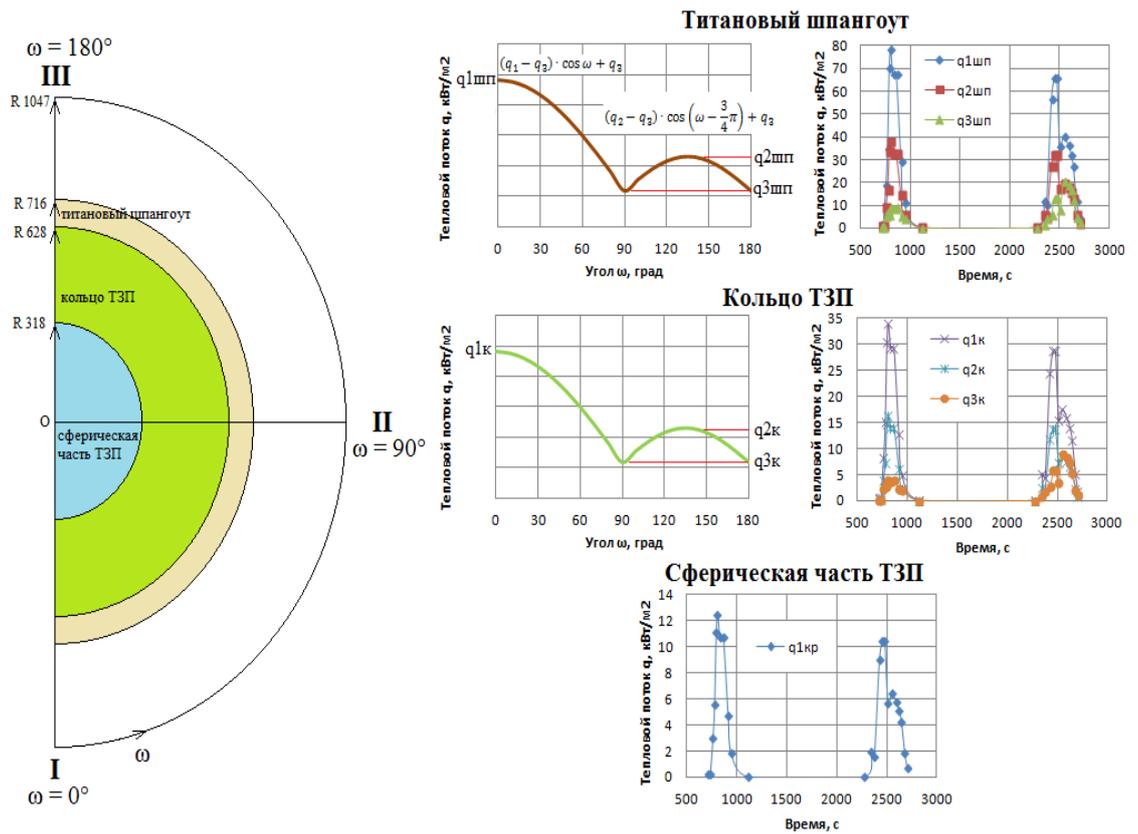


Рисунок 7 – Распределение тепловой аэродинамической нагрузки

Принятая пространственно-временная модель (ПВМ) внешнего теплового нагрева, используется для выбора ИК-имитаторов лучистого нагрева с кварцево-галогенными лампами (КГЛ) и для дальнейших расчетов температур при ТСИ.

Для моделирования тепловых аэродинамических нагрузок при спуске ВА ПТК принято решение использовать лучистый нагрев испытуемого изделия АСА с помощью КГЛ.

Методика расчетного моделирования радиационного нагрева от КГЛ и систем КГЛ изложены в работе [3].

На рисунке 8 приведены угловые распределения потоков для трех рассматриваемых зон при максимальной тепловой нагрузке ( $t=806$ с).

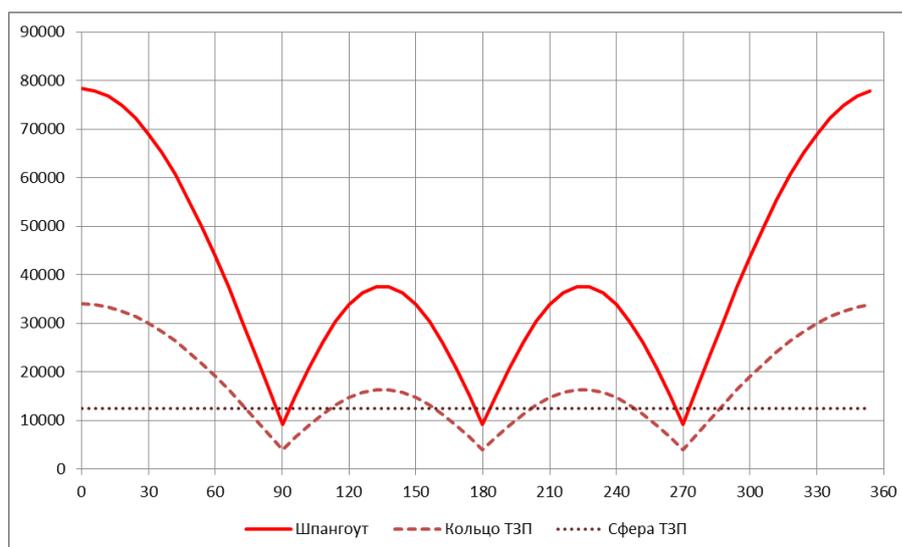


Рисунок 8 – Угловое распределения потоков для трех рассматриваемых зон при максимальной тепловой нагрузке

#### 4.2 Численное моделирование и результаты расчетов обратной задачи радиационного теплопереноса

При моделировании лучистого теплообмена в системе излучающих и поглощающих поверхностей хорошо разработаны и применяются методы расчета на основе моделей диффузного отражения и излучения (метод угловых коэффициентов).

Наиболее корректным подходом в системе зеркальных поверхностей представляется трассировка лучей методом Монте-Карло [92]. Основным недостатком данного метода является значительное время расчета, необходимое для достижения требуемой точности. Однако в этих методах используются упрощенные модели источников излучения, и рассчитывается только излучения, уходящее в сторону наблюдателя, игнорируются невидимые поверхности и т.д.

Метод состоит в следующем. Все поверхности системы задаются пространственными прямоугольниками. Для каждого прямоугольника заданы:

- координаты базовой точки  $O(x, y, z)$ ;
- векторы сторон  $A$  и  $B$  (длины векторов равны длинам сторон  $a$  и  $b$ );
- вектор нормали  $N$  (единичной длины);

Кроме того, для такого прямоугольника задается равномерное по сторонам разбиение на сетку вспомогательных прямоугольников ( $m \times n$ ). Плотности лучистых потоков рассчитываются для каждой прямоугольной ячейки этой сетки. Также для каждой этой ячейки задаются собственные физические характеристики теплопереноса (коэффициента отражения, поглощения, зеркальности и прозрачности). В то же время

геометрические характеристики каждой ячейки сетки целиком задается базовым прямоугольником. Все ячейки имеют общую нормаль  $N$  и одинаковую площадь:

$$F = \frac{ab}{mn}; \quad (4.2)$$

Центральная точка каждой ячейки определяется векторным выражением:

$$C_{i,j} = O + \frac{A \left( i + \frac{1}{2} \right)}{m} + B \left( j + \frac{1}{2} \right) n; \quad (4.3)$$

Лучистые потоки в системе моделируются множеством лучей, выпускаемых источниками излучения случайным образом в соответствии с используемой моделью излучения. Каждый луч задается координатами начальной точки  $P$ , единичным вектором направления  $R$  и скалярной величиной  $q$ , соответствующей мощности излучения.

Точка пересечения такого луча с произвольно ориентированным в пространстве прямоугольником рассчитывается по векторному соотношению:

$$O = Au + Bv = PP + Rv; \quad (4.4)$$

Если  $w > 0, 0 < u < 1, 0 < v < 1$ , то луч пересекает прямоугольник. Элемент сетки  $(I,j)$ , покрывающей прямоугольник, определяется значениями параметров  $u, v$ :

$$i = um, j = vn$$

Если элемент  $(i,j)$  оказывается полностью прозрачным, то пересечение игнорируется, а из всех «непрозрачных» пересечений выбирается ближайшее: пересечение с минимальным положительным значением параметра  $w$ . По коэффициенту поглощения  $\varepsilon$  для этого элемента и «мощности»  $q$  луча рассчитывается приращение поглощенного элементом лучистого потока:

$$dq_{i,j} = \varepsilon q \quad (4.5)$$

На эту величину уменьшается «мощность» луча  $q$ :

$$q' = q - dq_{i,j}; \quad (4.6)$$

Если новое значение  $q$  не равно 0, то это означает, что луч переотражается и следует вычислить новые значения начальной точки  $P$  и направления луча  $R$ . Координаты

начальной точки отраженного  $P'$  луча определяется случайным образом по следующим соотношениям:

$$R' = \left(\frac{A}{a}\right) \cos(\varphi) + \left(\frac{B}{b}\right) \sin(\gamma) + N \cos(\gamma), \quad (4.7)$$

где

$\varphi$  – случайное число от 0 до  $2\pi$ ;

$\cos(\gamma)$  – случайное число от 0 до 1;

В случае зеркальной модели отражения направление отраженного луча  $R'$  определяется направлением падающего и рассчитывается по векторному соотношению:

$$R' = R - 2(NR)N, \quad (4.8)$$

где

$N$ -нормаль к поверхности,  $R$ -направление падающего луча,  $(NR)$ -скалярное произведение этих векторов.

Расчет переотражений каждого луча продолжается до тех пор, пока луч полностью не поглотится или пока не было обнаружено ни одного пересечения луча с поверхностью.

Предлагается использовать лампы номинальной мощностью 1 кВт и длиной ~350 мм собранные в «пакеты» на панелях излучателей. Панель излучателя представляет собой металлический прямоугольник, теплоизолированный с обратной (нерабочей) стороны шириной 400x150 мм. На каждой панели может располагаться до 10 ламп. Количество ламп на каждой конкретной панели определяется мощностью, которую необходимо подавать на данный излучатель.

Для имитации потоков предлагается использовать 11 излучателей. Мощности излучателей, схема их размещения и создаваемые потоки приведены на рисунке 4. Помимо излучателей целесообразно использовать также 4 отражателя с теми же размерами (400x150) с теплоизолированными обратной поверхностями (рис. 9 изображены серым цветом).

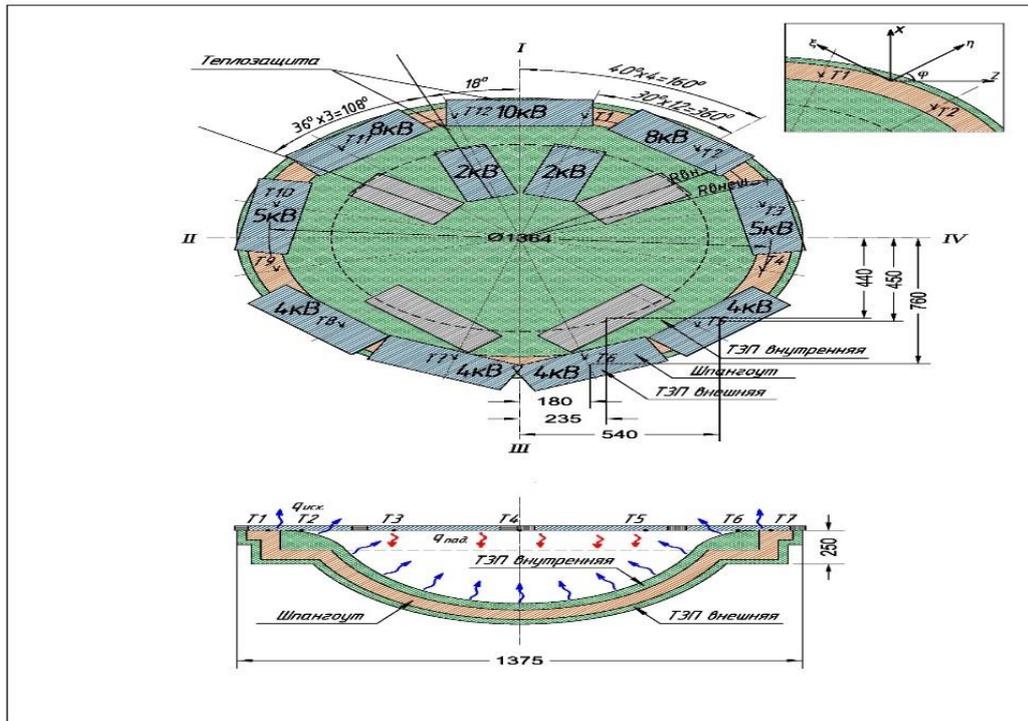


Рисунок 9 – Схема размещения ИК-имитаторов(слева) и распределения падающей тепловой лучистой нагрузки по элементам конструкции

На рисунках 10, 11, 12 приведены результаты сравнения угловых распределений тепловых потоков от имитаторов с заданными распределениями для каждой из трех зон [92-94].

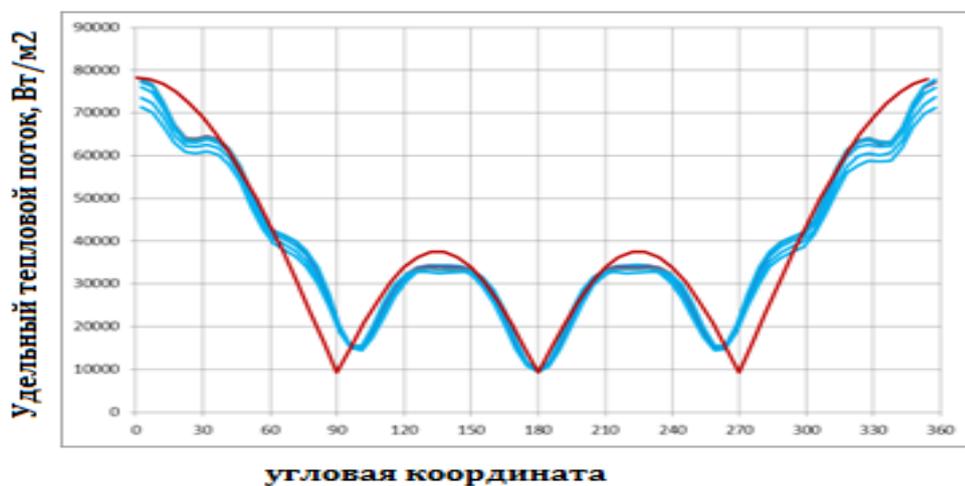


Рисунок 10 – Распределение тепловых потоков от имитаторов для шпангоута

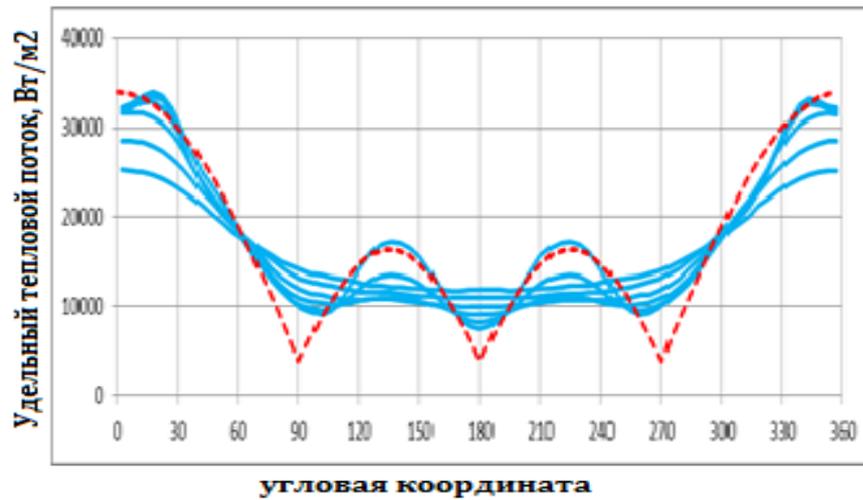


Рисунок 11 – Распределение тепловых потоков от имитаторов для кольца ТЗП

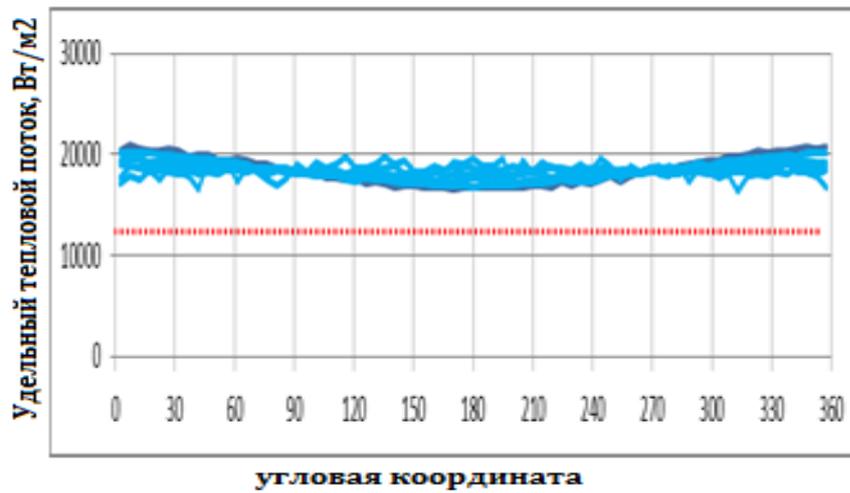


Рисунок 12 – Распределение тепловых потоков от имитаторов для сферы ТЗП

На рисунках 13 и 14 необходимые тепловые мощности на ИК-имитаторах и их температуры поверхности, задаваемые для выдерживания необходимого падающего лучистого потока на поверхности ОИ имитирующего аэродинамический спуск АСА.

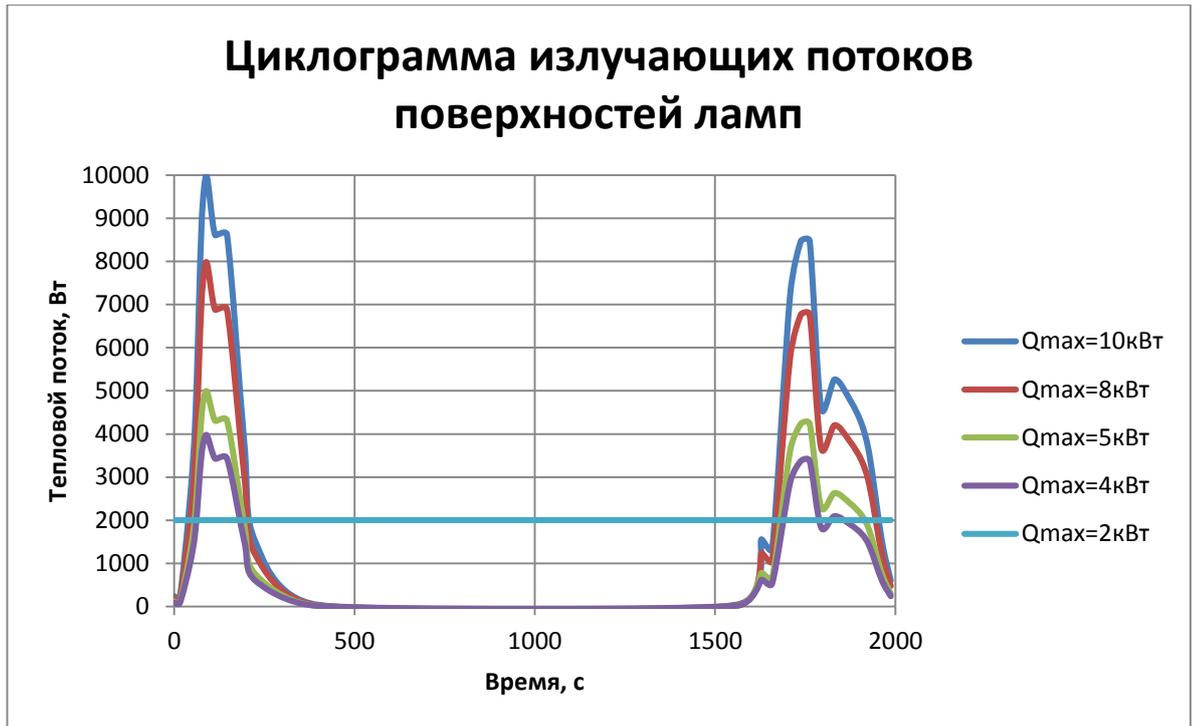


Рисунок 13 – Графики зависимостей излучающих потоков с поверхностей ламп от времени в зависимости от их максимальной излучающей способности

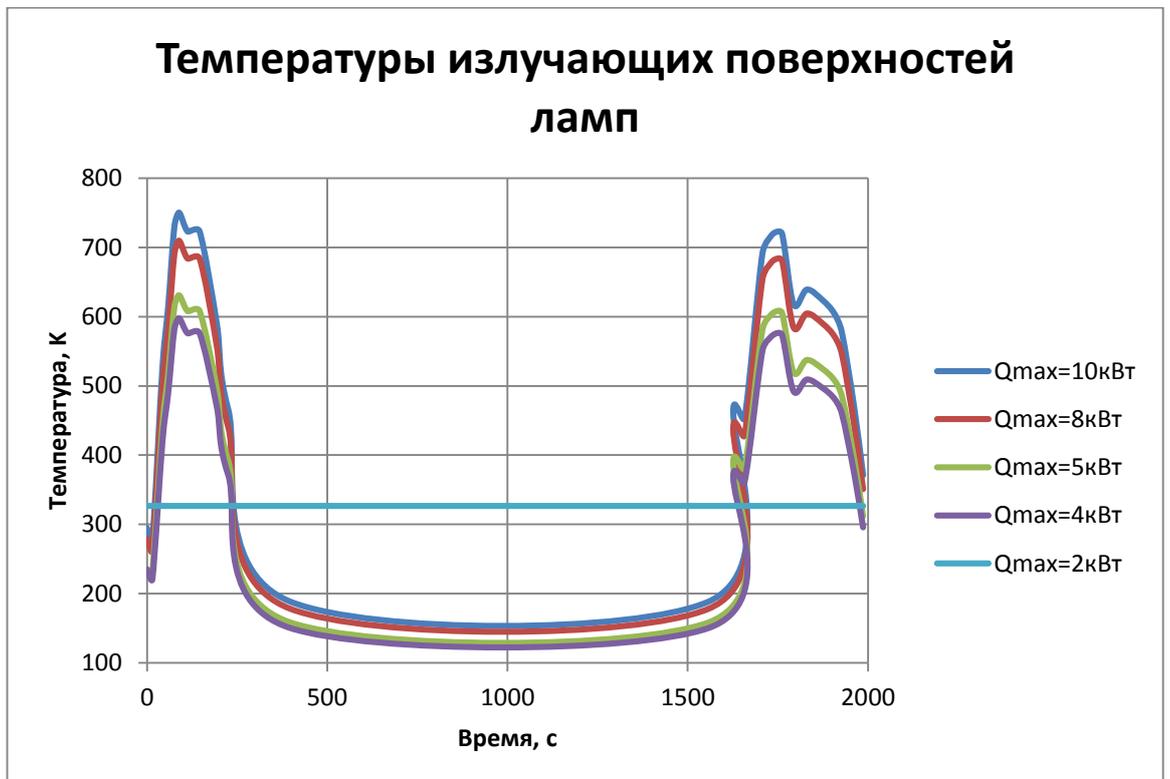


Рисунок 14 – Графики зависимостей температур поверхностей ламп от времени в зависимости от их максимальной излучающей способности

Таким образом, с использованием ПВМ аэродинамической тепловой нагрузки при спуске АСА ВА ПТК представлены результаты расчета:

- в части способа и схемного решения имитации аэродинамического нагрева АСА путем лучистого нагрева с помощью кварцевых галогенных ламп (КГЛ) при проведении ТСИ натурного образца;

- в части температур теплозащитного покрытия и металлического корпуса АСА, состоящего из полусферической передней части, усеченного конуса, шпангоута.

1. Моделирование аэродинамического нагрева должно осуществляться на ЭУ посредством лучистого нагрева с помощью блоков имитаторов ИК-излучения с КГЛ. Нагревательные блоки имеют габаритные размеры  $0,4 \times 0,15$  м<sup>2</sup>с диапазоном мощностей имитаторов 2-10 кВт. По разработанной схеме размещения имитаторов с КГЛ на основе прямой трассировки лучей методом Монте-Карло в системе зеркальных поверхностей и модели диффузного излучения и отражения для незеркальных поверхностей выполнено расчетное моделирование лучистого теплообмена в системе блоков имитаторов с КГЛ и поверхности АСА. Рассмотрены два варианта размещения блоков ИК-имитаторов: базовый вариант, состоящий из 11 блоков и 4 зеркальных поверхностей и модифицированный вариант из 12 блоков и 4 зеркальных поверхностей. На основе расчета лучистого теплообмена определены результирующие и поглощенные тепловые потоки на элементах поверхностей АСА с течением времени.

Предпочтительным следует считать модифицированный вариант размещения ИК-имитаторов из 12 блоков при разъемной компоновочной схеме дополнительного двенадцатого блока.

Определены циклограммы падающих потоков, необходимые для расчета подводимых электрических мощностей на КГЛ.

Сравнительный анализ расчетной внешней тепловой аэродинамической нагрузки на АСА при использовании пространственно-временной модели (ПВМ) и при лучистом теплообмене с использованием КГЛ показал, что:

- в зонах повышенного нагрева шпангоута тепловая нагрузка, полученная по ПВМ выше, чем при лучистом нагреве на 12%, а в зонах минимального нагрева ниже на 45%.

- в зонах нагрева тора ТЗП тепловая нагрузка, полученная по ПВМ выше, чем при лучистом нагреве на 9%, а в зонах минимального нагрева ниже на 50%.

-в зонах нагрева сферы ТЗП тепловая нагрузка. при расчете по ПВМ ниже, чем при лучистом нагреве на 45%.

### 4.3 Методика проведения теплостатических испытаний

Для осуществления режимов нагрева и проведения типовых (2-х нyrковых) испытаний проводится монтаж и отладка экспериментальной установки (ЭУ). Она состоит из нагревателя (стойки с ламповыми панелями), системы нагрева и управления нагревом, системы измерений, системы удаления продуктов термодеструкции (при необходимости), системы подачи в зону нахождения ОИ инертных газов (при необходимости). При отладке экспериментальной установки (ЭУ) после ее монтажа апробируется работа всех систем ЭУ.

Вид ЭУ показан на рисунке 15. Разбивка ОИ на зоны нагрева показана на рисунке 3.

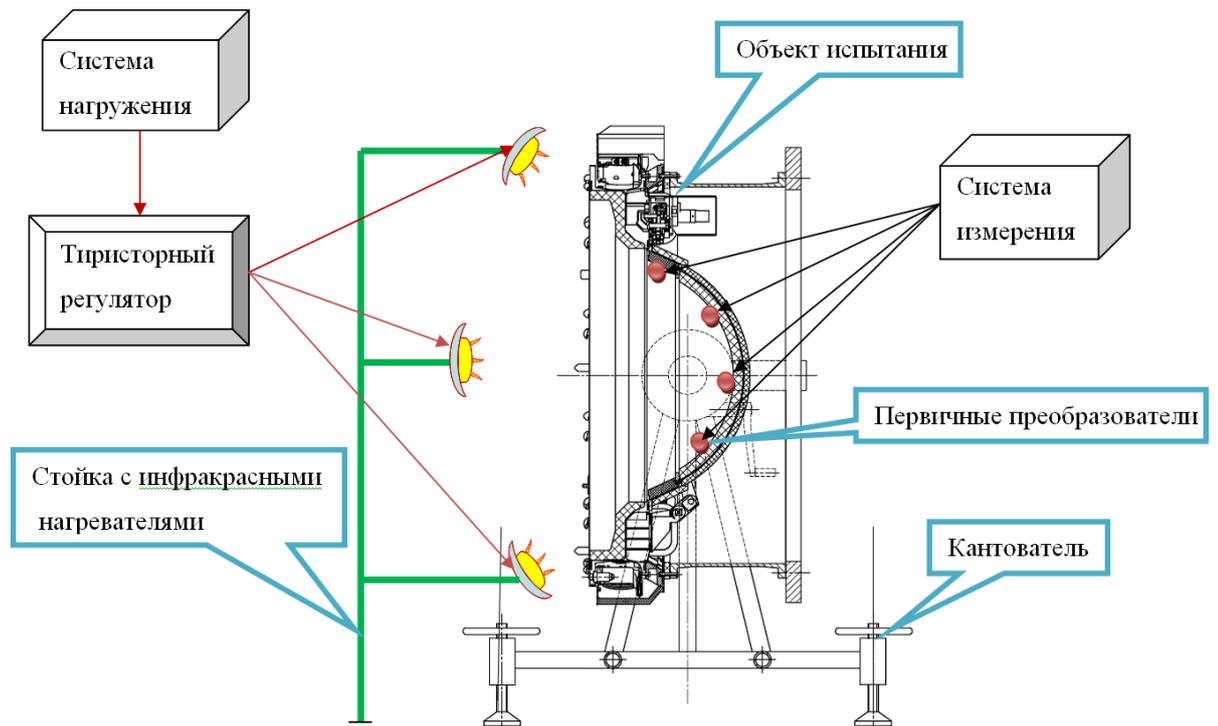


Рисунок 15 – Вид ЭУ

Нестационарный нагрев проводится по программе, составленной на основе расчета теплового потока (рис. 5) и температурного поля для зон нагрева ОИ (рис. 6, 7, 7а). В качестве датчиков температуры применяются термопары типа ХА(К) и термометры

сопротивления ТЭП-018. Кроме измерения температуры термопарами проводится контроль теплового потока, поступающего от панелей нагревателя к элементам конструкции АСА.

Проводятся также измерения перемещений элементов конструкции АСА. Необходимость задействования при проведении теплостатических испытаний АСА систем подачи в зону нахождения ОИ инертного газа и системы удаления продуктов термодеструкции определяется при проведении отладочных испытаний ЭУ с наличием в ней ОИ.

#### 4.4 Экспериментальная установка

Для проведения теплостатических испытаний АСА и фрагмента теплозащитного покрытия возвращаемого привлекается экспериментальная установка. Структурная схема экспериментальной установки приведена на рисунке 16.

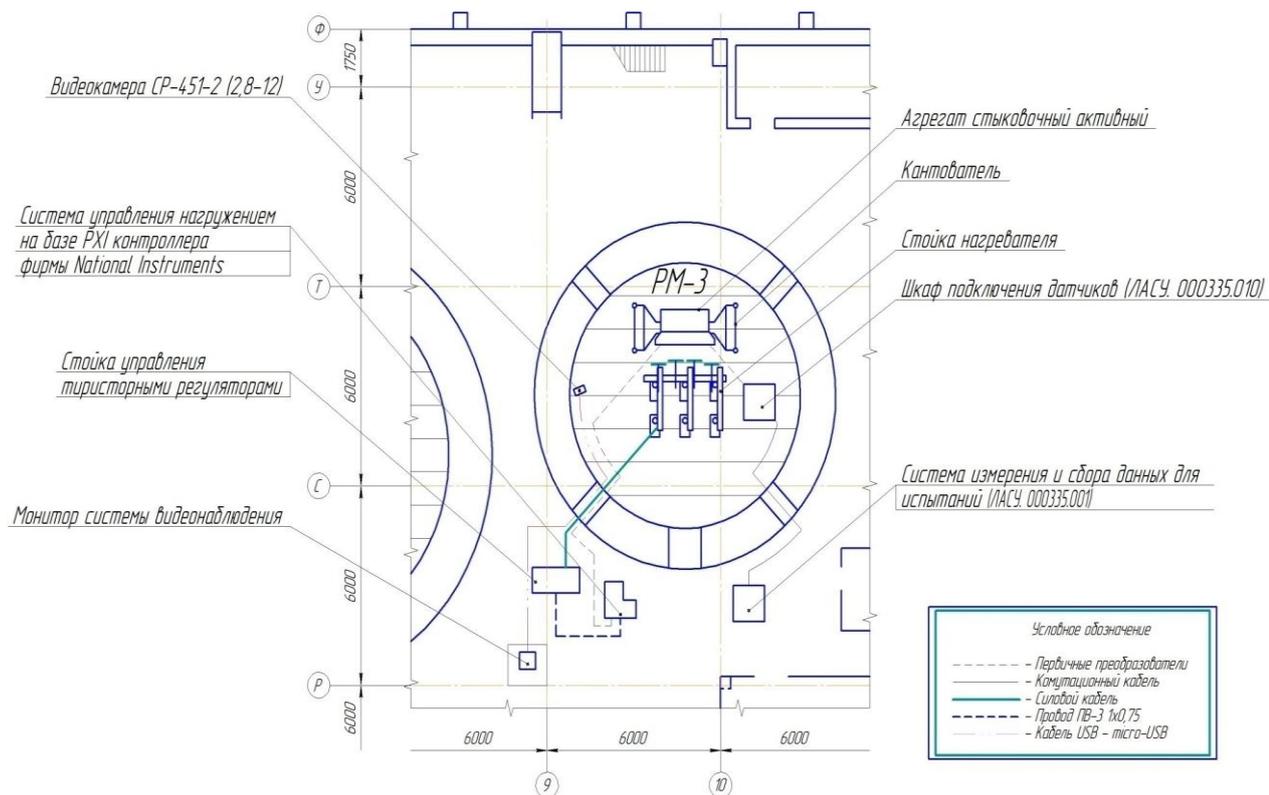


Рисунок 16 – Структурная схема экспериментальной установки

В состав экспериментальной установки (ЭУ) входят:

- нагреватель для создания переменного по времени теплового потока;

- средства управления тепловым потоком нагревателя;
- датчиковая аппаратура (датчики для измерений перемещений и температуры);
- кабельная сеть для обеспечения подачи электроэнергии в нагреватель и в устройство управления нагревом;
- автоматическая регистрирующая аппаратура;
- защитный кожух (при необходимости) для обеспечения возможности создания инертной газовой среды и удаления продуктов термодеструкции;
- система (средства) подачи нейтрального газа в зону нахождения ОИ;
- система (средства) удаления продуктов термодеструкции;
- объект испытаний.

#### **4.4.1 Средства нагрева**

Нагрев элементов ОИ до заданных температур осуществляется с помощью специального нагревателя. Он состоит из стойки, панелей с нагревательными элементами и кронштейнов, с помощью которых проводится крепление панелей к стойке и регулировка величины расстояния от панелей до ОИ. В качестве нагревательных элементов применяются кварцевые лампы типа КГТ 230-1000 (380, П14/63).

При проведении испытаний проводится зональный нагрев. Область нагрева АСА разделяется на 6 зон. Регулировка величин температуры в каждой зоне проводится автономно по разработанной программе нагрева.

В качестве устройства для управления нагревом служит блок тиристорных регуляторов. Каждый тиристор марки Меандр управляет нагревом одной зоны ОИ. Управление нагревом проводится по программе по обратной связи с использованием показаний, установленной в этой зоне термопары марки ХА. При этом осуществляется контроль теплового потока, попадающего на эту зону от панели нагревателя.

#### **4.4.2 Средства измерения**

При проведении теплостатических испытаний АСА и его элементов измеряются в каждом критическом элементе конструкции ОИ температура, тепловой поток, падающий

от панели нагревателя, а также перемещение конструкции ОИ под воздействием неравномерного температурного поля в зонах нагрева ОИ.

#### 4.4.3 Измерение температуры

Измерение температуры в 12 зонах нагрева ОИ и на металлическом корпусе АСА осуществляется непрерывно в течение всего цикла нагрева. При одном цикле нагрева время проведения измерений составляет ориентировочно 2000 с. Измерение, обработка и регистрация температуры на металлическом корпусе АСА осуществляется с помощью измерительно-вычислительного комплекса «ИВК-11», в зонах нагрева ОИ – с помощью Системы измерений и сбора данных с использованием установки измерительной LTR-EU-16-1, зав. № 2D563509.

Результаты измерений и их обработки отображаются в процессе испытаний на дисплее.

В качестве первичных преобразователей температуры используются термопары типа ХА или ХК с диапазоном измерения  $(0 \div 800)^\circ\text{C}$  и  $(0 \div 600)^\circ\text{C}$  соответственно, устанавливаемые на поверхность ОИ с помощью клея ВК-9 или К-400 в соответствии с ОСТ 92-4313-79. Кроме термопар для измерения температур используются датчики температур типа ТЭП-018.

#### 4.4.4 Измерение тепловых потоков

Измерение тепловых потоков, падающих от панелей нагревателя на конструктивные элементы ОИ, осуществляется непрерывно в течение процесса нагрева.

В качестве первичных преобразователей используются датчики теплового потока ФОА 036 с диапазоном измерений  $(0-100) \text{ кВт/м}^2$ .

Перечень основных и вспомогательных средств измерений приведен в таблице 2.

Таблица 2 – Применяемые средства измерений (СИ)

Наименование СИ, тип	Технические и метрологические характеристики	Наименование измеряемой величины или функциональное назначение
<b>Основные средства измерений</b>		
Преобразователи температуры термоэлектрические	Обозначение по ГОСТ 6616-94: L. Диапазон измеряемых температур от минус $200^\circ\text{C}$ до плюс $600^\circ\text{C}$ .	Измерение температуры поверхности изделия

(термопары) хромель-копелевые. Тип термопары ТХК (L) (ГОСТ Р 8.585-01, ГОСТ 6616-94)	Абсолютная погрешность $\pm 2,5^{\circ}\text{C}$	
Преобразователи температуры термоэлектрические (термопары) хромель-алюминиевые. Тип термопары ТХА (К) (ГОСТ Р 8.585-01, ГОСТ 6616-94)	Обозначение по ГОСТ 6616-94: К. Диапазон измеряемых температур от минус $200^{\circ}\text{C}$ до плюс $1200^{\circ}\text{C}$ . Абсолютная погрешность $\pm 2,5^{\circ}\text{C}$	Измерение температуры поверхности изделия
Преобразователи перемещений тип SDS/R	Преобразователи тензорезисторные мостовой схемы. Диапазон измеряемых перемещений от 0 до 10 мм. Погрешность измерений перемещений $\pm 6\%$ при доверительной вероятности 0,95	Измерение перемещений элементов изделия
Установка измерительная LTR с модулем LTR 27	Пределы основной приведенной погрешности 0,1 %. Диапазон измерения входного сигнала от минус 25 до плюс 75 мВ	Измерение сигнала с выхода термопар и датчиков теплового потока
Преобразователи температуры - термометры сопротивления. Тип: ТЭП-018	Преобразовательные тензорезисторные. Диапазон измеряемых температур от минус 260 до плюс $300^{\circ}\text{C}$ . Абсолютная погрешность $\pm 4^{\circ}\text{C}$	Измерение температуры поверхности изделия
Вспомогательные средства измерений		
Преобразователи теплового потока. Тип: ФОА 036	Диапазон измеряемых тепловых потоков (0-100) кВт. Погрешность измерений $\pm 2\%$	Контроль теплового потока достигающего поверхности изделия
Измеритель параметров микроклимата «Метеоскоп-М» (Госреестр № 32014-11)	Диапазон измерений температуры: от минус 40 до плюс $85^{\circ}\text{C}$ . Предел допускаемой абсолютной погрешности измерений температуры: $\pm 0,2^{\circ}\text{C}$ . Диапазон измерений давления воздуха: от 80 до 110 кПа. Пределы допускаемой абсолютной погрешности измерений давления: $\pm 0,13$ кПа. Диапазон измерений относительной влажности: от 3 до 97 %. Пределы допускаемой	Контроль условий выполнения измерений

	абсолютной погрешности измерений давления: $\pm 3\%$	
--	---	--

#### **4.4.5 Обеспечение нейтральной среды**

При проведении теплостатических испытаний АСА в зоне нахождения ОИ обеспечивается инертная газовая среда (при необходимости) для предотвращения возгорания находящихся в этой зоне элементов ЭУ и АСА (кабелей системы измерения, ТЗП, ТЗИ и т.п.). С этой целью в лабораторном зале около смотрового люка бокса РМ-3 помещаются баллоны с газообразным азотом. Монтируется система подачи азота в зону, где располагается ОИ. По команде ведущего испытания оператором подается азот в ЭУ. Необходимость создания в зоне нахождения ОИ нейтральной среды определяется при проведении отладочных испытаний ЭУ.

#### **4.4.6 Обеспечение удаления продуктов деструкции тепловой защиты АСА**

Для удаления продуктов термодеструкции тепловой защиты АСА используется вентиляционная система бокса РМ-3. Вентиляционная система бокса обеспечивает восьмикратный обмен воздуха и работает реверсивно, т.е. нижний ярус воздухозаборника может работать на приток воздуха, а верхний ярус воздухозаборника – на вытяжку и наоборот.

С целью ускорения удаления продуктов деструкции на полу бокса у ЭУ может устанавливаться дополнительно к общей вентиляции переносной вентилятор. Он включается в случае значительного задымления помещения бокса РМ-3.

#### **4.4.7 Управление нагревом при испытаниях**

Управление нагревом (мощностью, подводимой на кварцевые галогенные лампы) проводится в автоматическом режиме с помощью тиристорных регуляторов мощности с учетом обратной связи от термопар. Программа управления реализована на применении ПИД-регулятора, где коэффициенты «П», «И» и «Д» подбираются опытным путем. Финальная проверка работы программы управления проводится во время технологической опрессовки. Структурная схема управления нагревом показана на рисунке 17.

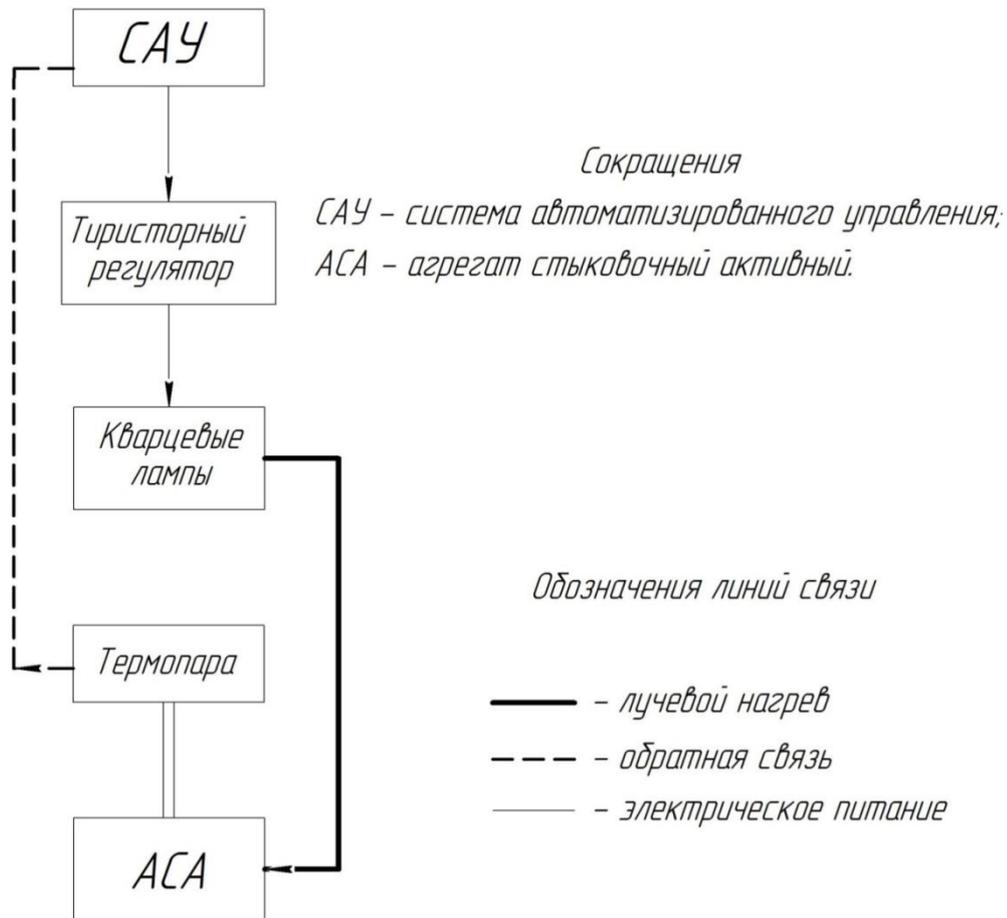


Рисунок 17 – Структурная схема автоматического управления нагревом

#### 4.5 Результаты теплостатических испытаний активного стыковочного агрегата и теплозащитного покрытия

Теплостатические испытания АСА проводятся в лабораторном зале корпуса КТПИ в пневмогидробоксе РМ-3. Условия проведения испытаний должны соответствовать следующим требованиям:

- температура окружающей среды (15÷40) °С;
- относительная влажность воздуха (45÷80) %;
- давление воздуха (93,4-106,6) кПа.

Режимы, порядок, виды и этапы испытаний приведены в разделе 4.2

На рисунках 18 и 19 представлен внешний вид АСА после проведения типового испытания № 1.



Рисунок 18 – Вид на I плоскость  
АСА



Рисунок 19 – Вид на  
III плоскость АСА

Внешним осмотром состояния ТЗП АСА определены следы термодеструкции ТЗП в зонах нагрева напротив нагревательных панелей без нарушения целостности ТСП-Ф.

Внешним осмотром АСА механических повреждений и оплавлений узлов и элементов крепления не обнаружено.

Прокладки стыковочной поверхности повреждены по всему периметру, а в 1й зоне нагрева (I плоскость АСА) прогорели до установочной канавки.

Стыковочная поверхность АСА чистая по всему периметру за исключением зоны I плоскости, где имеются следы копоти и цвета побежалости.

Толкатели АСА в хорошем состоянии, антифрикционное покрытие присутствует.

Головки крюков механизма герметизации стыка в хорошем состоянии, за исключением зоны I плоскости, где имеются следы копоти и цвета побежалости.

Направляющие, гнезда и головки датчиков стыковочной плоскости АСА в хорошем состоянии, следов теплового воздействия (следов копоти и цветов побежалости) не имеют.

Контактное поле электроразъемов стыка в хорошем состоянии, за исключением зоны I плоскости, где имеются следы копоти.

Защитная крышка герморазъемов стыковочного механизма следов теплового воздействия (следов копоти и цветов побежалости) не имеет.

Результаты теплостатических испытаний (ТСИ) в зависимости от номера серии представлены на рисунках 20-33, где  $T_{pi}$  – место установки термодатчика.

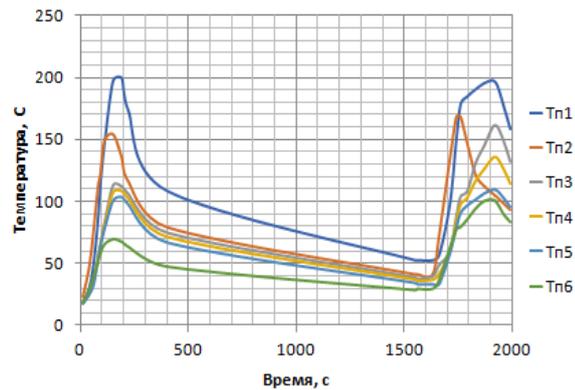


Рисунок 20 – Экспериментальное температурное поле после 1 серии ТСИ

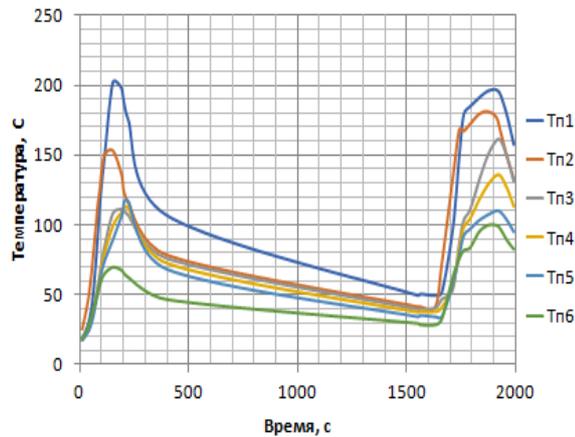


Рисунок 21 – Экспериментальное температурное поле после 2 серии ТСИ

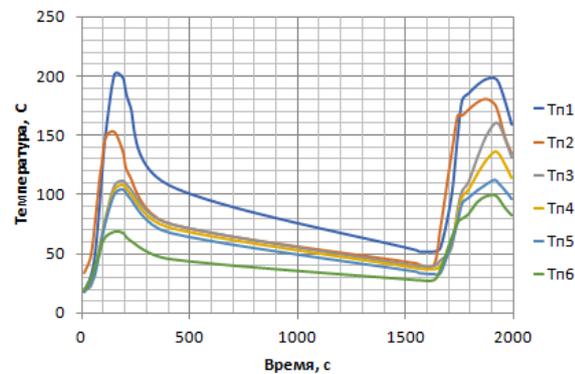


Рисунок 22 – Экспериментальное температурное поле после 3 серии ТСИ

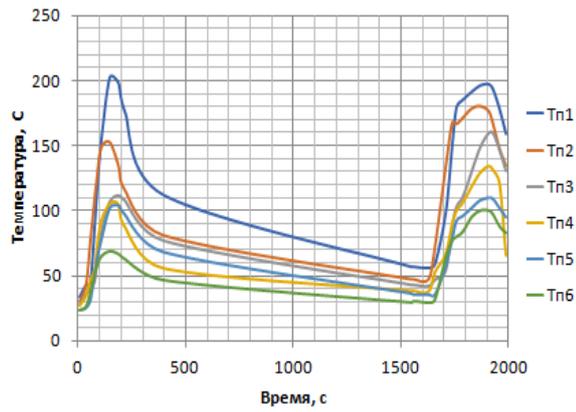


Рисунок 23– Экспериментальное температурное поле после 4 серии ТСИ

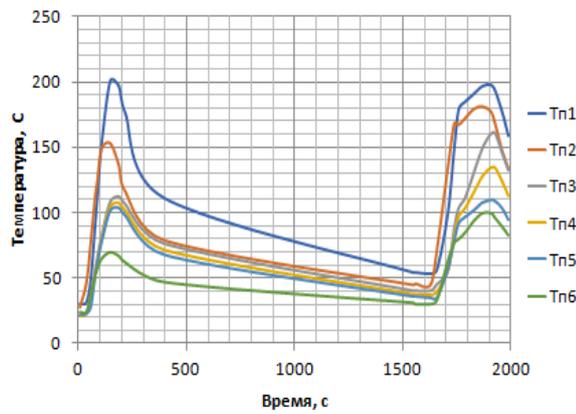


Рисунок 24– Экспериментальное температурное поле после 5 серии ТСИ

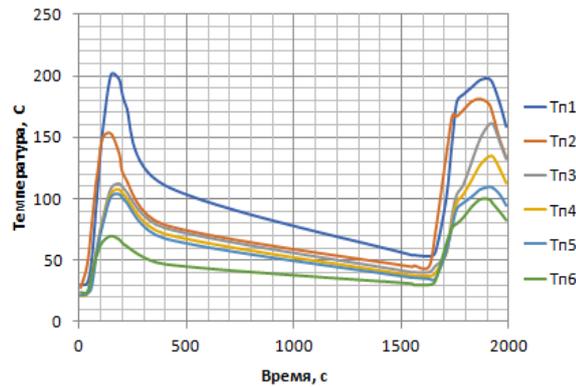


Рисунок 25– Экспериментальное температурное поле после 6 серии ТСИ

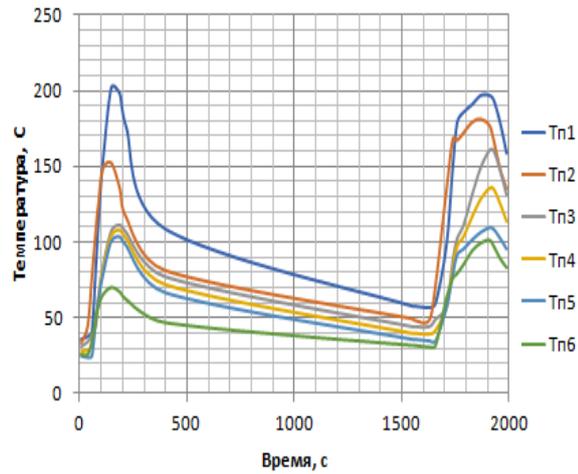


Рисунок 28– Экспериментальное температурное поле после 8 серии ТСИ

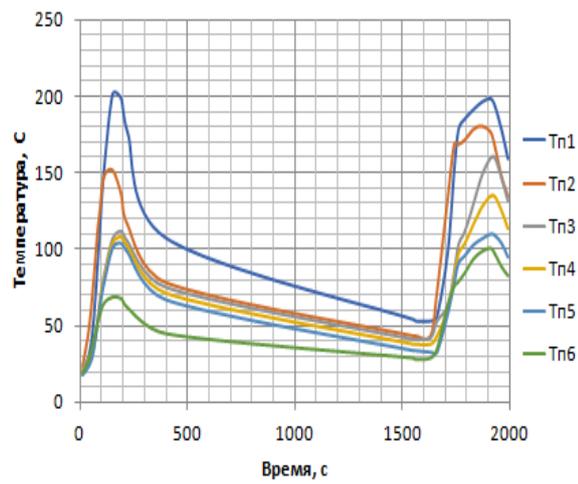


Рисунок 30 – Экспериментальное температурное поле после 9 серии ТСИ

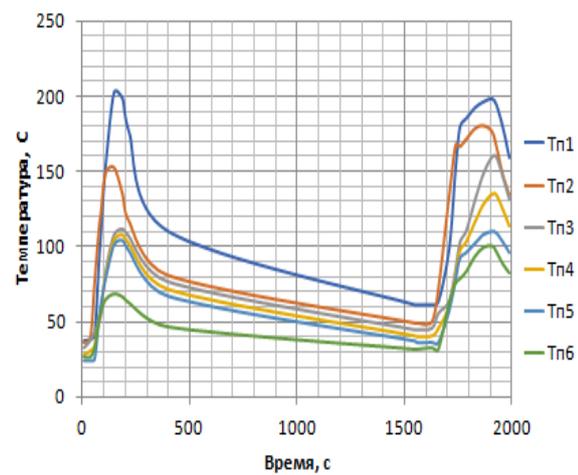


Рисунок 27 – Экспериментальное температурное поле после 10 серии ТСИ

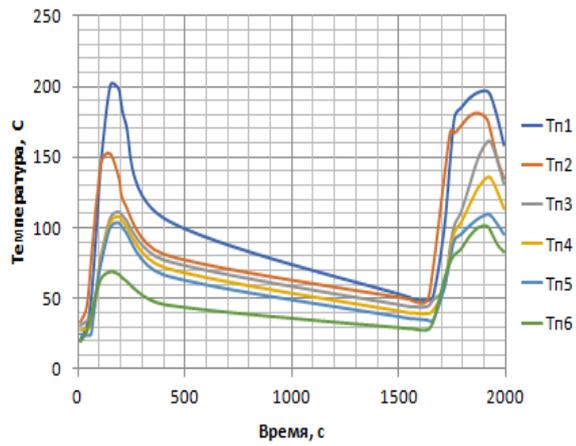


Рисунок 29 – Экспериментальное температурное поле после 11 серии ТСИ

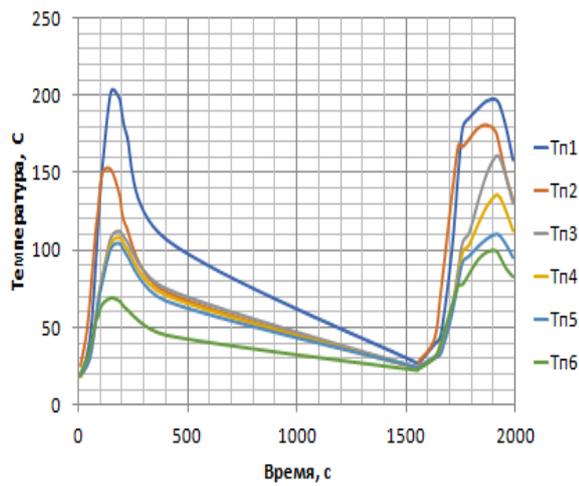


Рисунок 31 – Экспериментальное температурное поле после 12 серии ТСИ

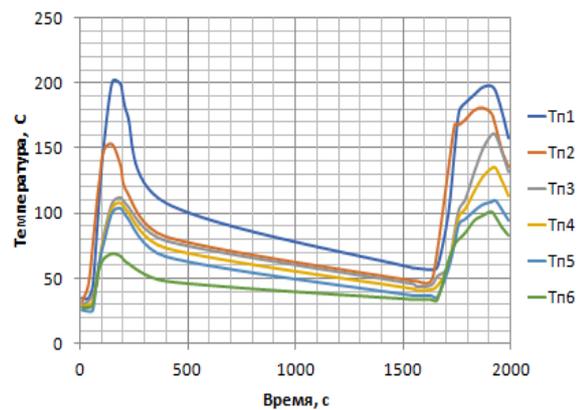


Рисунок 32 – Экспериментальное температурное поле после 13 серии ТСИ

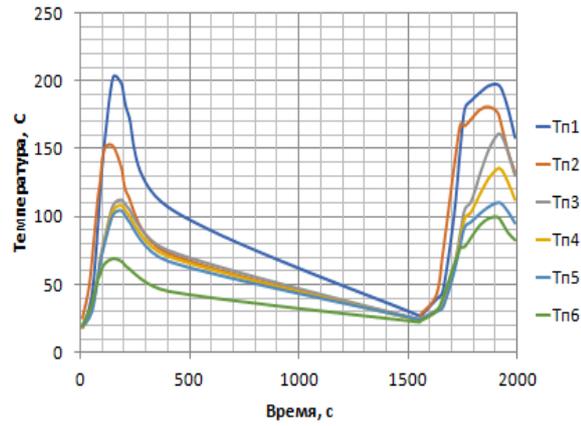


Рисунок 33 – Экспериментальное температурное поле после 14 серии ТСИ

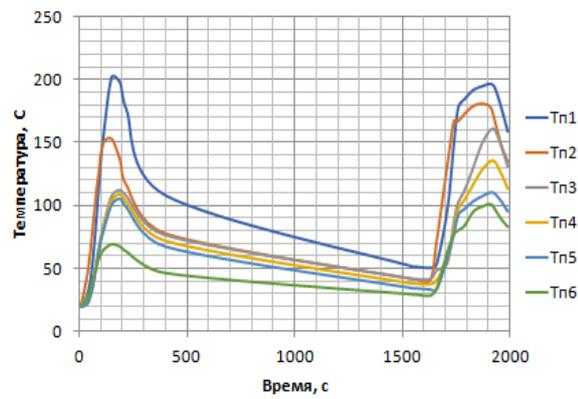


Рисунок 34– Экспериментальное температурное поле после 15 серии ТСИ

Таким образом, максимальный температурный пик приходится на первый нырок в атмосферу с учетом инерционности конструкции и составляет чуть более 200 С.

Данный массив цифровой информации является исходными данными для апробации разработанной методики по идентификации симметричного тензора теплопроводности материала на основе выбранной постановки задачи.

#### **Выводы по главе 4**

1. В данной главе диссертационной работы представлены результаты решения граничной обратной задачи радиационного теплопереноса по моделированию лучистой тепловой диффузной нагрузки стохастическим методом Монте-Карло по воспроизведению условий спуска АСА со второй космической скоростью в плотных слоях атмосферы Земли для получения условий теплового нагружения конструкции и экспериментального распределения температурного поля по конструкции.

2. Представлена методика проведения теплостатических испытаний АСА. Получено нестационарное распределение температурного поля шпангоута АСА по полученному тепловому воздействию.

## Глава 5 Анализ свойств разработанного вычислительного алгоритма

### 5.1 О существовании, единственности и устойчивости решений обратных задач теплопроводности в анизотропных твердых телах

Решение обратной задачи является корректным, если оно удовлетворяет следующим требованиям [9]:

1. решение существует;

2. оно единственно;

3. решение устойчиво, т.е. малым погрешностям входных данных-экспериментальных значений температур соответствуют малые погрешности искомого вектора  $\lambda$ , т.е. имеется непрерывная зависимость решения от входных данных.

**Теорема 4.1.** Пусть матрица  $Z$  чувствительности такова, что для любой итерации процесса, а, следовательно, и выполняются неравенства:

$$|\alpha^{s+1}| \|Z^{(T)s+1}\| < |\alpha^{s+1}| \|Z^{(T)s}\| \text{ и } \|Z^{(T)s} Z^s\| < \frac{1 - \alpha^{s+1}}{2|\alpha^s| \|\alpha^{s+1}\|}, \quad (5.0)$$

Где  $\|Z^{(T)}\|$ -любая матричная норма транспонированной матрицы компонент градиента функционала или коэффициентов чувствительности.

Тогда итерационный процесс удовлетворяет принципу сжимающих отображений:

$$\|\Delta\lambda^{s+1}\| \leq q \|\Delta\lambda^s\|, \quad q < 1, \quad (5.1)$$

Т.е. существует единственная точка, к которой последовательность стремится, как к своему пределу

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda^s = \lambda^* \quad (5.2)$$

Для доказательства теоремы приведем следующую лемму.

**Лемма 1.** Итерационные квадратные матрицы  $z^{T(s)} z^{(s)}$  размером  $P$ , где  $P$ -количество искоемых параметров, являются нормальными, т.е. симметрическими и положительно определенными. Так что выполняется неравенство:

$$E + \alpha_s z^{T(s)} z^{(s)} > E, \quad (5.3)$$

Где  $E$  —единичная матрица размером  $P$ , или



делалось никаких предположений относительно знаков коэффициентов чувствительности

$$\frac{\partial T_{ij}^k}{\partial \lambda_p}, p = 1, P.$$

Таким образом, матрица  $Z^{T(s)}Z^{(s)}$  является нормальной, т.е. лемма доказана.

Возвращаясь к теореме, рассмотрим итерационный процесс на двух соседних итерациях:

$$\lambda^{(s+1)} = \lambda^{(s)} - \alpha_s p_s(\lambda^{(s+1)}); \quad (5.8)$$

$$\lambda^{(s+2)} = \lambda^{(s+1)} - \alpha_{s+1} p_{s+1}(\lambda^{(s+2)}); \quad (5.9)$$

В которые подставим линеаризованные значения градиента функционала.

Линеаризованные значения градиента функционала в окрестности  $\lambda_p$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\lambda^n, \lambda^{(n)})}{\partial \lambda_p} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [(T_{ij}^k(\lambda^{(n)}) - \bar{T}_{ij}^k) + \sum_{p=1}^P \frac{\partial(T_{ij}^k(\lambda^{(n)}, C^{(n)}))}{\partial \lambda_p}] \frac{\partial(T_{ij}^k(\lambda^{(n)}))}{\partial \lambda_p} + \\ &+ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [(T_{ij}^k(\lambda^{(n)}) - \bar{T}_{ij}^k) + \frac{\partial(T_{ij}^k(\lambda^{(n)}))}{\partial C_p}] \frac{\partial(T_{ij}^k(\lambda^{(n)}))}{\partial \lambda_p}; \end{aligned} \quad (5.10)$$

Получим для направлений спуска на двух соседних итерациях:

$$p_s = [Z^{T(s)}(T^{(s)} - \tilde{T}) + Z^{T(s)}Z^{(s)}\Delta\lambda^{(s)}]; \quad (5.11)$$

$$p_{s+1} = [Z^{T(s+1)}(T^{(s+1)} - \tilde{T}) + Z^{T(s+1)}Z^{(s+1)}\Delta\lambda^{(s+1)}] + \beta_s [Z^{T(s)}(T^{(s)} - \tilde{T}) + Z^{T(s)}Z^{(s)}\Delta\lambda^{(s)}] \quad (5.12)$$

$$\beta_s = \frac{|Z^{T(s+1)}(T^{(s+1)} - \tilde{T}) + Z^{T(s+1)}Z^{(s+1)}\Delta\lambda^{(s+1)}|^2}{|Z^{T(s)}(T^{(s)} - \tilde{T}) + Z^{T(s)}Z^{(s)}\Delta\lambda^{(s)}|^2}; \quad (5.13)$$

Разлагая вектор  $T^{(s+1)}$  в ряд Тейлора в окрестности  $\lambda^{(s)}$  с сохранением линейных относительно  $\Delta\lambda^{(s)} = \lambda^{(s+1)} - \lambda^{(s)}$  членов, получим из (5.8-5.13)

$$\begin{aligned} (E + \alpha_s Z^{T(s)}Z^{(s)})\Delta\lambda^{(s)} &= -\alpha_s Z^{T(s)}(T^{(s)} - \tilde{T}), \\ (E + \alpha_{s+1} Z^{T(s+1)}Z^{(s+1)})\Delta\lambda^{(s+1)} + \beta_s (E + Z^{T(s)}Z^{(s)})\Delta\lambda^{(s)} &= \\ &= -\alpha_{s+1} Z^{T(s+1)} \left( T^{(s)} + \frac{\partial T^{(s)}}{\partial \lambda_1} \Delta\lambda_1^{(s)} + \dots + \frac{\partial T^{(s)}}{\partial \lambda_p} \Delta\lambda_p^{(s)} - \tilde{T} \right) - \\ &- \alpha_{s+1} \beta_s Z^{T(s+1)} \left( T^{(s)} + \frac{\partial T^{(s)}}{\partial \lambda_1} \Delta\lambda_1^{(s)} + \dots + \frac{\partial T^{(s)}}{\partial \lambda_p} \Delta\lambda_p^{(s)} - \tilde{T} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha_{s+1}Z^{T(s+1)}(T^{(s)} - \tilde{T}) - \alpha_{s+1}Z^{T(s+1)}Z^{T(s)}\Delta\lambda^{(s)} \\
&-\alpha_{s+1}\beta_s Z^{T(s+1)}(T^{(s)} - \tilde{T}) - \alpha_{s+1}\beta_s Z^{T(s+1)}Z^{T(s)}\Delta\lambda^{(s)}; \tag{5.14}
\end{aligned}$$

$$\beta_s = \frac{[Z^{T(s+1)}(T^{(s+1)} - \tilde{T}) + Z^{T(s+1)}Z^{(s+1)}\Delta\lambda^{(s+1)}]^2}{[Z^{T(s)}(T^{(s)} - \tilde{T}) + Z^{T(s)}Z^{(s)}\Delta\lambda^{(s)}]^2} \tag{5.15}$$

Применяя к равенству операцию нормы, используя свойство нормы произведения матриц и результаты леммы 1, получим

$$\begin{aligned}
\|\Delta\lambda^{(s)}\| &\leq |\alpha_s| \left\| (E + \alpha_{s+1}Z^{T(s+1)}Z^{(s+1)})^{-1} \right\| \|Z^{T(s)}(T^{(s)} - \tilde{T})\| \leq \\
&\leq |\alpha_s| \|Z^{T(s)}\| \|T^{(s)} - \tilde{T}\| \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Поскольку матрица  $(E + \alpha_{s+1}Z^{T(s+1)}Z^{(s+1)})$  положительно определена, так как на основании леммы 1 квадратная матрица  $Z^{T(s)}Z^{(s)} > 0$ , то существует обратная ей матрица  $(E + \alpha_{s+1}Z^{T(s+1)}Z^{(s+1)})^{-1}$ , вследствие чего из (5.14) имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda^{(s+1)} &= (E + \alpha_{s+1}Z^{T(s+1)}Z^{(s+1)})^{-1} = \alpha_{s+1}Z^{T(s+1)} \times \\
&\times [(T^{(s)} - \tilde{T})Z^{T(s+1)}Z^{T(s)}\Delta\lambda^{(s)} - \beta_s T^{(s)} - \tilde{T})Z^{T(s+1)}Z^{T(s)}\Delta\lambda^{(s)}], \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Откуда, в силу первого условия (5.0), равенства (5.14) и неравенства (5.16), (5.17) получаем

$$\begin{aligned}
\|\Delta\lambda^{(s+1)}\| &\leq |\alpha_{s+1}| \left\| (E + \alpha_{s+1}Z^{T(s+1)}Z^{(s+1)})^{-1} \right\| \\
&\|E + \alpha_s Z^{T(s)}Z^{(s)}\| + |\alpha_s| \|Z^{T(s)}Z^{(s)}\| \|\Delta\lambda^{(s)}\| \leq \\
&\leq |\alpha_{s+1}|(1 + 2|\alpha_s| \|Z^{T(s)}Z^{(s)}\|) \|\Delta\lambda^{(s)}\| \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Если в последнем соотношении потребовать выполнение условия:

$$\frac{\|\Delta\lambda^{(s+1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(s)}\|} \leq |\alpha_{s+1}|(1 + 2|\alpha_s| \|Z^{T(s)}Z^{(s)}\|) < 1, \tag{5.19}$$

то

$$\|Z^{T(s)}Z^{(s)}\| \leq \frac{1 - |\alpha_{s+1}|}{2|\alpha_s||\alpha_{s+1}|}; \tag{5.20}$$

Таким образом, при выполнении условия (5.20) выполняется принцип сжимающих отображений:

$$\|\Delta\lambda^{s+1}\| \leq q \|\Delta\lambda^{(s)}\|, q = |\alpha_{s+1}|(1 + 2|\alpha_s| \|Z^{T(s)}Z^{(s)}\|), \tag{5.21}$$

Т.е. существует единственная точка  $\lambda^*$ , к которой стремится последовательность  $\{\Delta\lambda^{(s)}\}$  как к своему пределу, что доказывает теорему.

В этих условиях итерационного процесса (2.78-2.82)  $p_s \rightarrow 0$ , когда  $\lambda^{(s)} \rightarrow \lambda^*$ , т.е  $\lambda^*$  является единственным решением обратной задачи.

## 5.2 Оценка сходимости итерационного процесса

Ниже на рисунках 34-37 представлены результаты моделирования температурного поля методом итерационной регуляризации в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур.

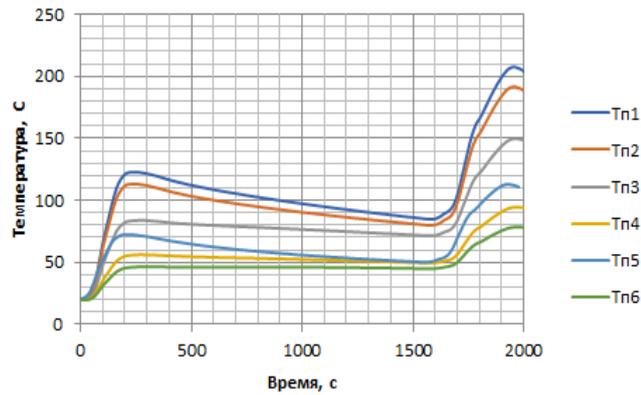


Рисунок 34 – Температурное поле на 1 итерации

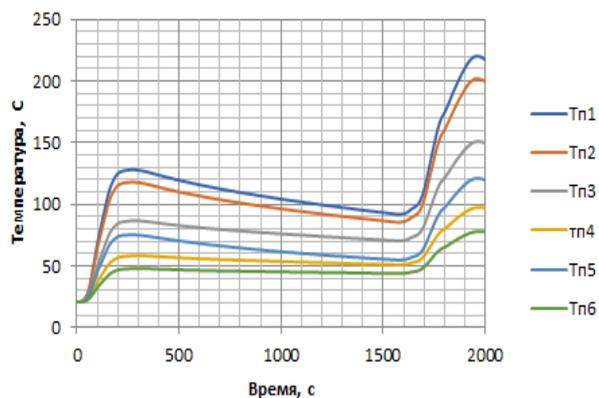


Рисунок 36 – Температурное поле на 5 итерации

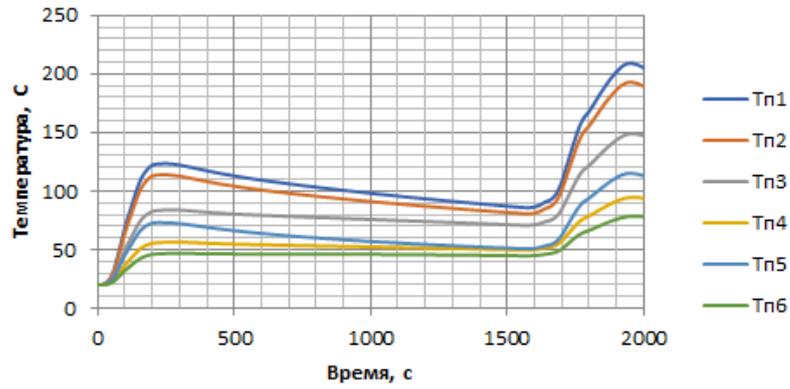


Рисунок 35 – Температурное поле на 2 итерации

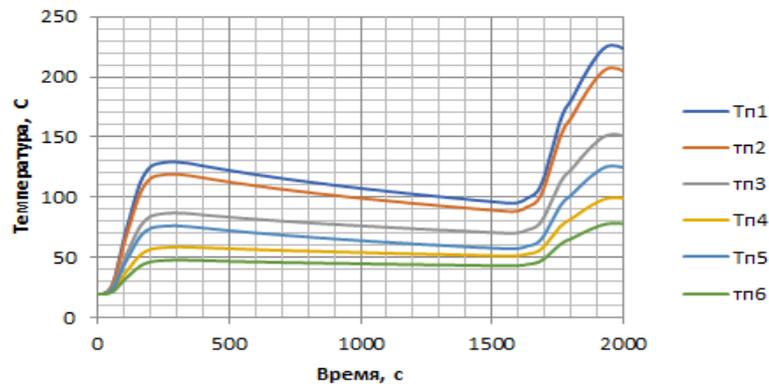


Рисунок 37 – Температурное поле на 6 итерации

Далее на рисунках 38-41 представлены результаты моделирования вариации температурного поля при численном решении полученной постановки задачи () при решении задачи восстановления компонент симметричного тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температуры.

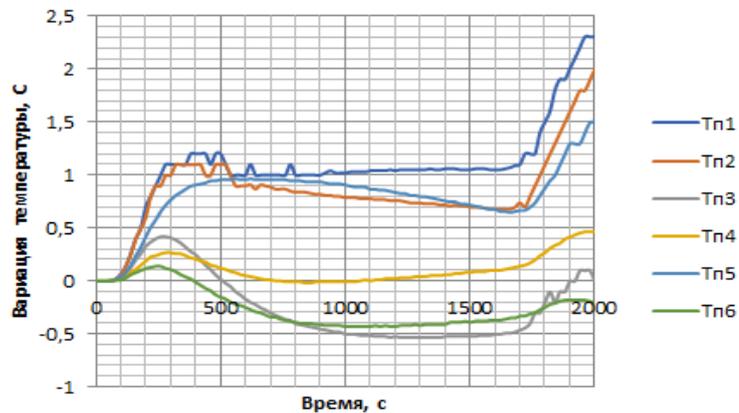


Рисунок 38 – Вариация температурного поля на 1 итерации

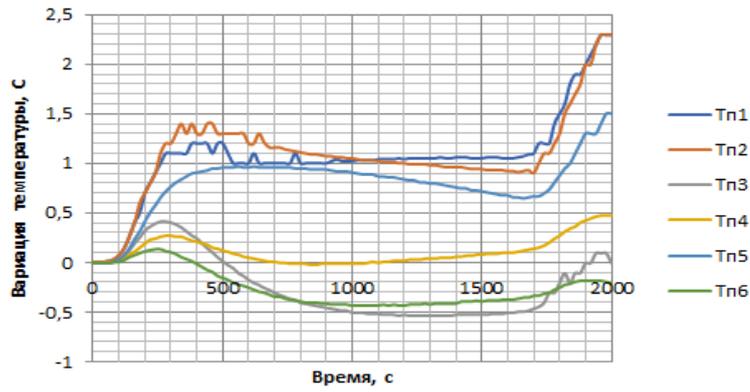


Рисунок 39 – Вариация температурного поля на 2 итерации

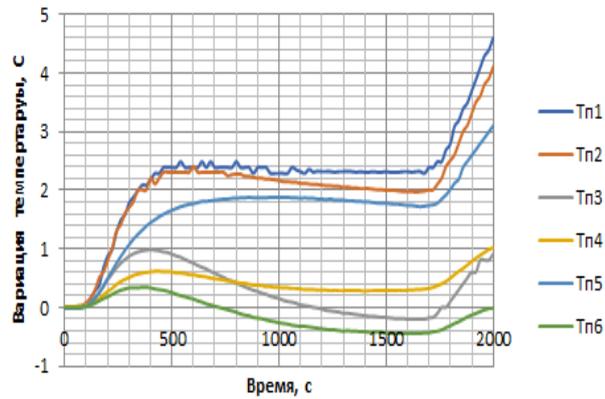


Рисунок 40 – Вариация температурного поля на 5 итерации

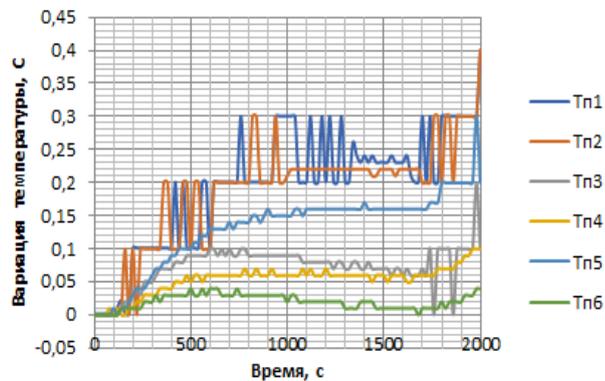


Рисунок 41 – Вариация температурного поля на 6 итерации

Далее на рисунках 42-45 представлены результаты моделирования температурного поля методом регуляризации А.Н. Тихонова в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур.

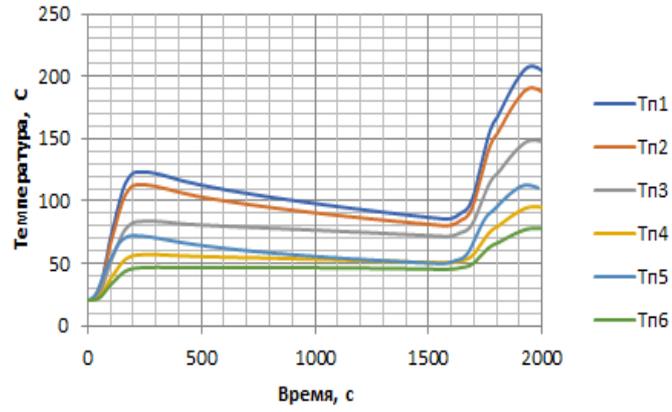


Рисунок 42 – Температурное поле на 1 итерации

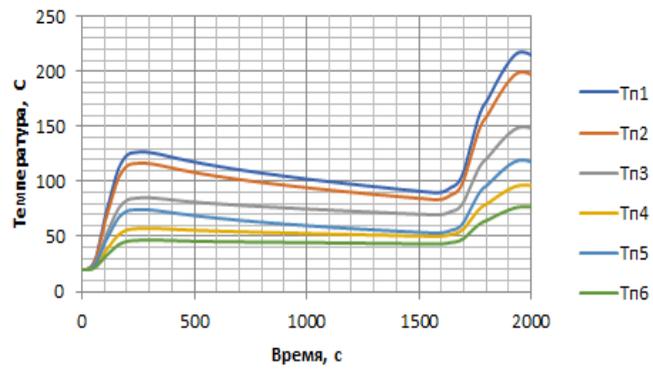


Рисунок 43 – Температурное поле на 2 итерации

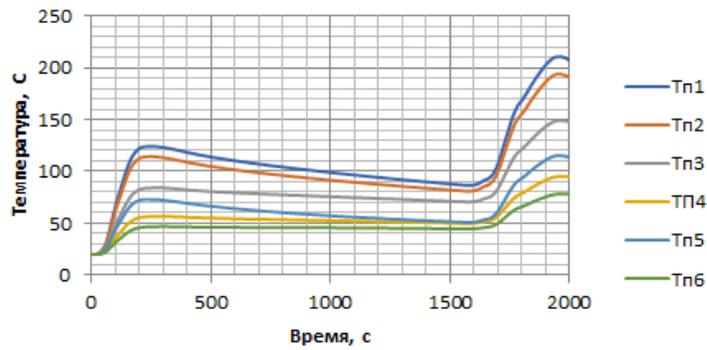


Рисунок 44 – Температурное поле на 5 итерации

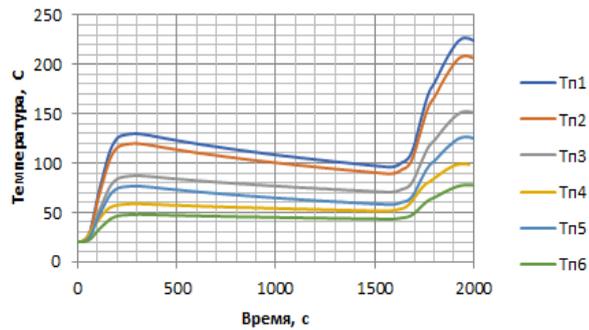


Рисунок 45 – Температурное поле на 6 итерации

Далее на рисунках 46-49 представлены результаты моделирования вариации температурного поля методом регуляризации А.Н. Тихонова в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур.

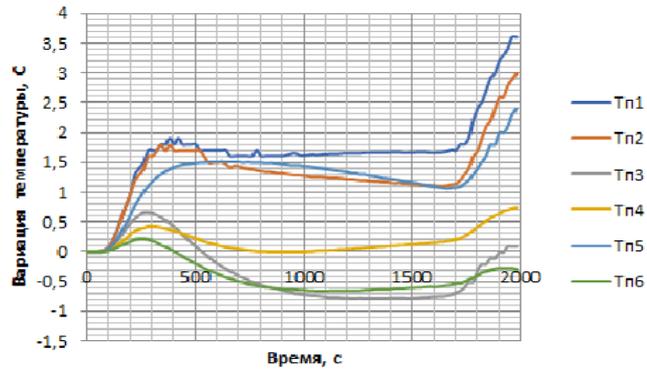


Рисунок 46 – Вариация температурного поля на 1 итерации

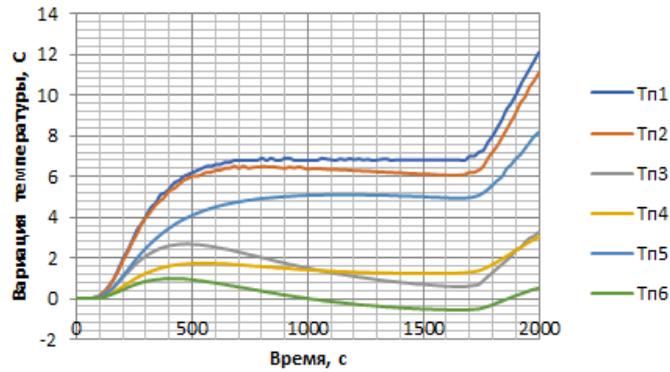


Рисунок 47 – Вариация температурного поля на 2 итерации

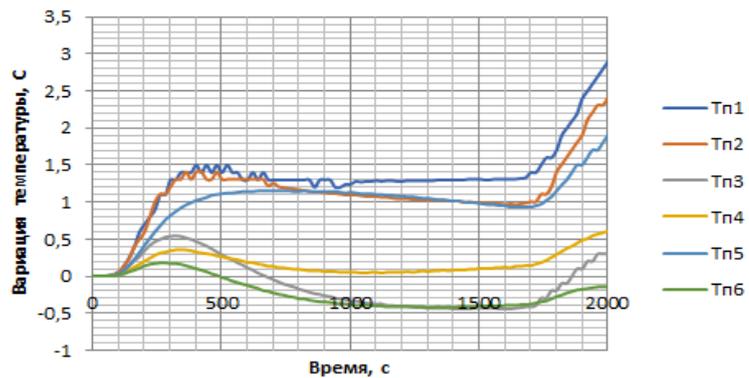


Рисунок 48 – Вариация температурного поля на 5 итерации

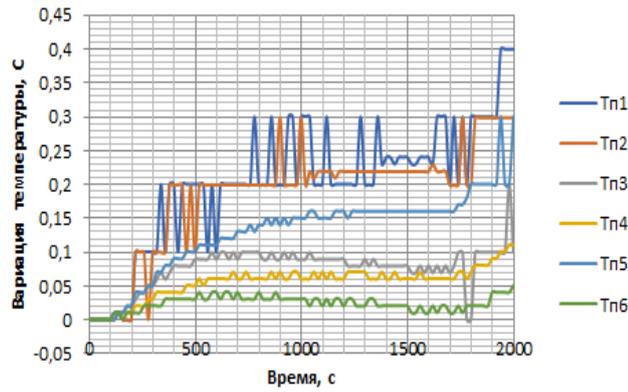


Рисунок 49 – Вариация температурного поля на 6 итерации

Из графиков видно, что кривые всюду положительны, что свидетельствует о единственности решения ОЗТ, а значит коэффициенты чувствительности материала всюду также положительны.

Для оценки динамики сходимости итерационного процесса приведены графические зависимости на рисунке 50 нерегуляризуемых невязок [95,96] для двух рассматриваемых методов регуляризации в зависимости от номера итерации (синий цвет-метод итерационной регуляризации, красный цвет-метод регуляризации А.Н. Тихонова).

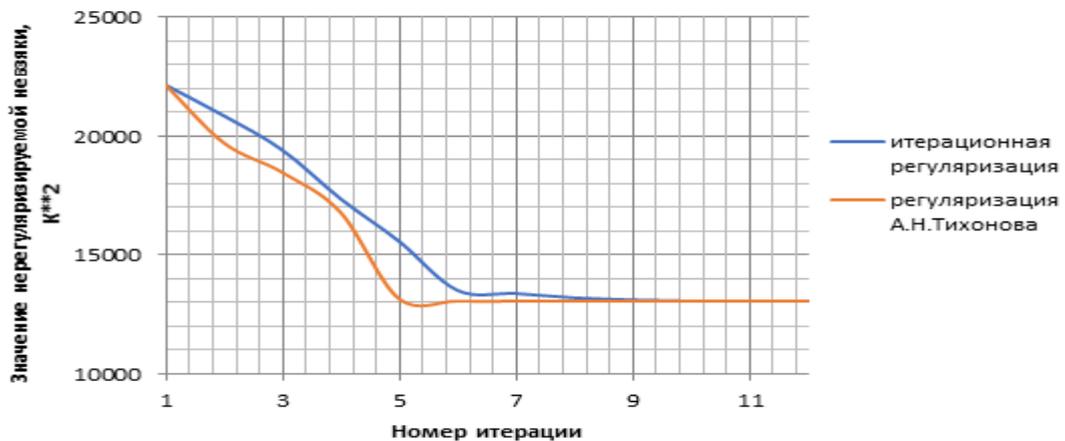


Рисунок 50 – Значение нерегуляризуемого функционала невязки при решении задачи идентификации методом регуляризации А.Н. Тихонова и итерационной регуляризации

Как видно из анализа графических зависимостей, сходимость итерационного процесса при одинаковых начальных приближениях выше у метода регуляризации А.Н. Тихонова. Это объясняется тем, что среднеквадратичная ошибка регуляризируется при использовании метода А.Н. Тихонова на уже на первой итерации, а метод итерационной регуляризации работает, начиная со второй итерации.

Ниже на 51 и 52 представлены результаты моделирования температурного поля методом итерационной регуляризации при решении выбранной постановки задачи (в зависимости от номера итерации в местах установки датчиков температур ( $T_{pi}$  – номер термопары)).

### 5.3 Результаты расчетов компонент симметричного тензора теплопроводности

Результаты расчетов компонент симметричного тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации приведены на рисунке 51, а результаты метода регуляризации А.Н. Тихонова на рисунке 52 [97,98] .

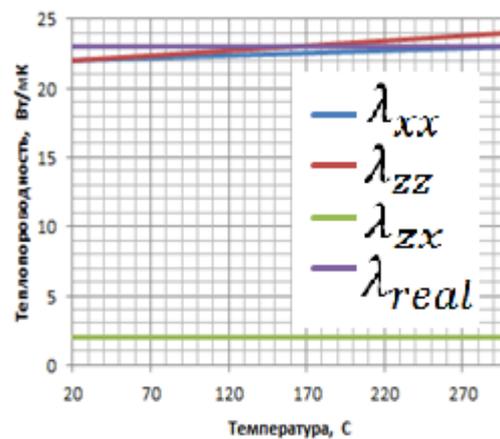


Рисунок 51– Значения восстановленного симметричного тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации

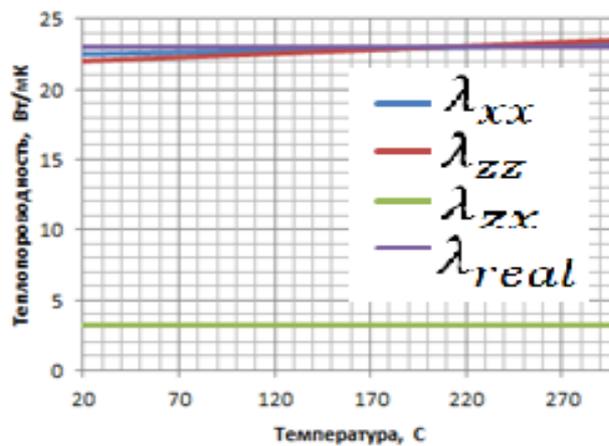


Рисунок 52 – Значения восстановленного симметричного тензора теплопроводности методом регуляризации А.Н. Тихонова

Также большой интерес представляют собой данные об относительных погрешностях расчетов, вычисленных по формуле:

$$\delta_{\text{отн}} = \left| \frac{\lambda_p - \lambda_{\text{real}}}{\lambda_{\text{real}}} \right|, p = xx, zz, zx; \quad (49.0)$$

Результаты относительных погрешностей расчетов при решении коэффициентной ОЗТ методом итерационной регуляризации представлены на рисунке 53, а регуляризацией А.Н. Тихонова на рисунке 54.

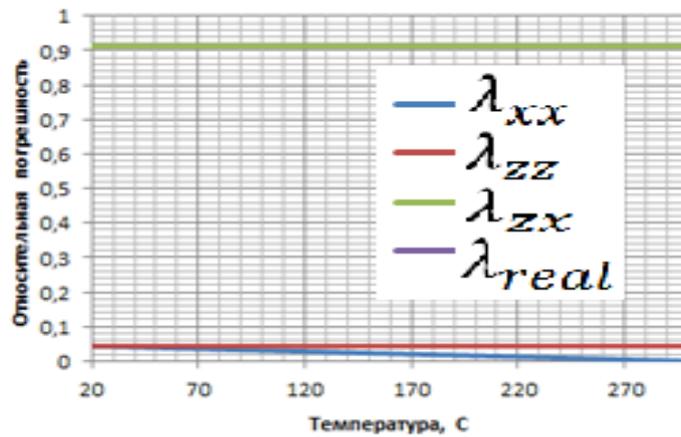


Рисунок 53 – Значения относительных погрешностей восстановленных компонент тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации

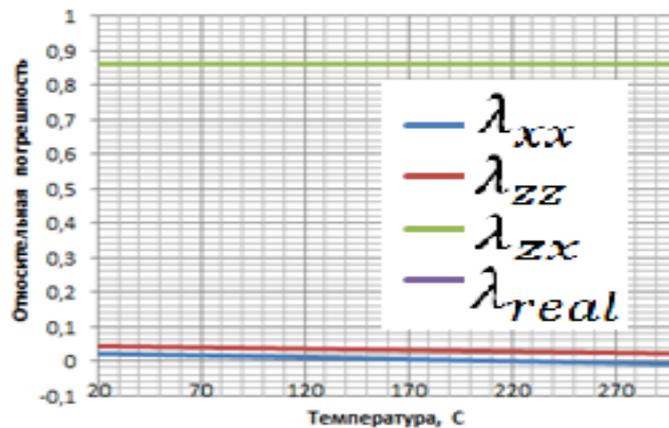


Рисунок 54 – Значения относительных погрешностей восстановленных компонент тензора теплопроводности методом регуляризации А.Н. Тихонова

Как видно из графиков, для выбранного объекта испытаний не характерна явно выраженная анизотропия при таком уровне теплового воздействия.

Главные компоненты тензора теплопроводности и угол ориентации главных осей определяются по следующим зависимостям:

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\lambda_{xy}(T)}{\lambda_{xx}(T) - \lambda_{yy}(T)}; \quad (50.0)$$

$$\lambda_{\xi}(T) = \lambda_{xx}(T)\cos^2(\varphi) + \lambda_{yy}(T)\sin^2(\varphi) + \lambda_{xy}(T)\sin(2\varphi); \quad (50.1)$$

$$\lambda_{\eta}(T) = \lambda_{yy}(T)\cos^2(\varphi) + \lambda_{xx}(T)\sin^2(\varphi) + \lambda_{xy}(T)\sin(2\varphi); \quad (50.2)$$

Результаты расчетов главных компонент тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации приведены на рисунке 55, а результаты метода регуляризации А.Н. Тихонова на рисунке 56.

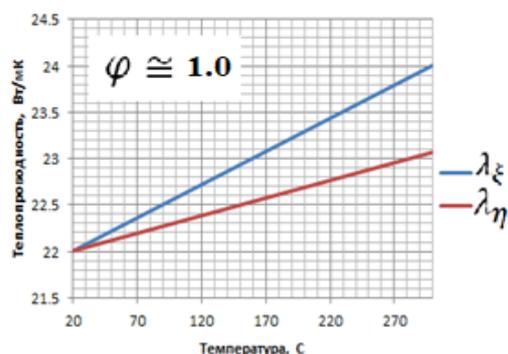


Рисунок 55 – Значения восстановленных главных осей тензора теплопроводности методом итерационной регуляризации

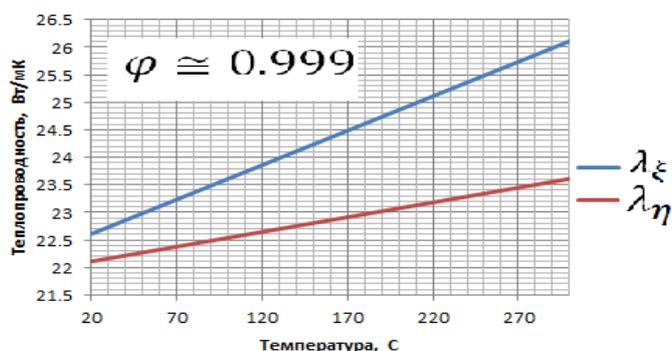


Рисунок 56 – Значения восстановленных главных осей тензора теплопроводности методом регуляризации А.Н. Тихонова

Результаты относительных погрешностей расчетов для восстановленных главных осей при решении коэффициентной ОЗТ методом итерационной регуляризации представлены на рисунке 17а, а регуляризацией А.Н. Тихонова на рисунке 17б.

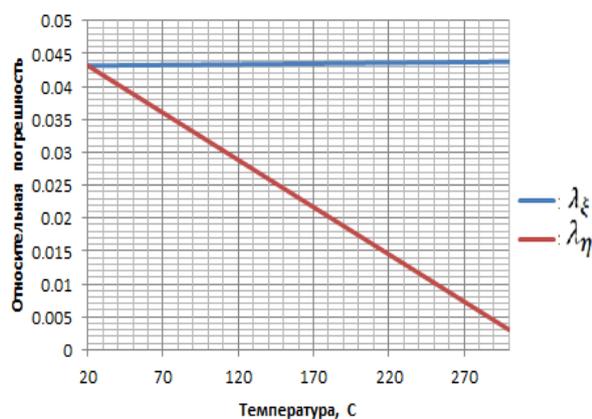


Рисунок 57 – Значения относительных погрешностей восстановленных компонент тензора теплопроводности методом регуляризации

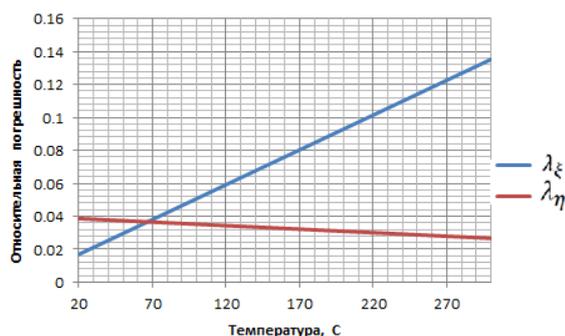


Рисунок 58 – Значения относительных погрешностей восстановленных главных компонент тензора теплопроводности методом регуляризации А.Н. Тихонова

Таким образом, по результатам расчетов можно сказать следующее:

1. Симметричная компонента тензора теплопроводности является около нулевой при малом отличии двух ортогональных компонент тензора друг от друга, что говорит о том, что материал при таком уровне температур не проявляет явно выраженную анизотропию.
2. По результатам расчетов относительных погрешностей можно говорить о малом отличии в пределах доверительной погрешности настоящих от расчетных теплофизических характеристиках. Таким образом, можно косвенно говорить об успешной апробации разработанной методики.

### **Выводы по главе 5**

1. В данной главе диссертационной работы представлены результаты моделирования температурного режима конструкции на примере элемента металлического шпангоута АСА для двух расчетных методов регуляризации среднеквадратичной ошибки.

2. Рассмотрены вопросы сходимости итерационного процесса и критерии эффективности численного моделирования теплового состояния конструкции.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны алгоритм и методика по идентификации симметричного тензора теплопроводности анизотропного материала шпангоута АСА космического спускаемого аппарата, основанные на параметрической идентификации тепловой физико-математической модели распространения тепловых потоков в анизотропной среде методом итерационной регуляризации и методом регуляризации А.Н. Тихонова.

1. Модернизирован численный метод для реализации параметрической идентификации математической модели теплопереноса тепловых потоков в анизотропных твердых телах, позволяющий вычислить компоненты тензора теплопроводности. Отличительной особенностью модернизации является получение аналитических зависимостей для компонентов градиента целевого функционала невязки;

2. Проведен анализ эффективности разработанного алгоритма с помощью вычислительного эксперимента, и сделаны выводы о влиянии выбранного метода регуляризации на сходимость и точность решения обратной задачи нестационарной теплопроводности. Показано, что для исследуемого материала, относительная погрешность не превосходит 14% при решении задачи методом итерационной регуляризации и 4.5 % при решении задачи методом А.Н. Тихонова по сравнению с реальным значением теплопроводности титана;

3. Решена обратная задача радиационного теплопереноса энергии методом Монте-Карло по воспроизведению тепловой аэродинамической падающей нагрузки лучистым тепловым диффузным потоком для формирования натуральных условий проведения экспериментальной тепловой отработки АСА, результаты которой показаны на рисунках 4а-4в;

4. Выбраны проектные параметры стенда, а именно тепловые мощности, задаваемые на ИК – имитаторах и их пространственное расположение, по воспроизведению условий спуска спускаемого аппарата в атмосфере, позволяющего проводить экспериментальную тепловую отработку изделий многоразовых спускаемых аппаратов;

5. Разработанная методика может быть использована при проектировании теплоограждающих конструкций спускаемых космических аппаратов, выполненных из композиционных нетерморазлагающихся материалов;

В качестве следующего этапа развития научных исследований по данной тематике могут рассматриваться обратные задачи идентификации для высокопористых терморазлагающихся композиционных теплозащитных материалов при сверхкритических уровнях температур, которые могут наблюдаться при входе КА в плотные слои атмосферы различных планет.

### Список использованной литературы

1. Алифанов О.М, Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. – М.: Янус-К, 2009.
2. Алифанов О.М Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. – М.:Машиностроение,1979.
- 3.Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.:Машиностроение,1988.
- 4.Алифанов О.М, Черепанов В.В. Методы исследования и прогнозирования свойств высокопористых теплозащитных материалов.
- 5.Алифанов О.М., Е.А. Артюхин, Ненарокомов А.В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.
- 6.Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск. Изд. СО АН СССР, 1962.92 с.
- 7.Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач. -ДАН СССР, 1943, т39, №5.
- 8.Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. -ДАН СССР, 1963, т.151, №3, с.501-504
- 9.Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. Наука, 1974.
- 10.Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. Изд. Физматлит, 2019 г.
11. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Изд. Физматлит, 2015 г.
12. Самарский А.А., Вабищевич. П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики.
13. Формалев. В.Ф. Теплопроводность анизотропных твердых тел. Аналитические методы решения задач. Изд. Физматлит, 2014 г.
14. Акопян В.А., Соловьев А.Н., Шевцов С.Н. Методы и алгоритмы определения полного набора совместимых материальных констант пьезокерамических материалов.

Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ, 2008, 144 с.

15. Аменицкий А.В., Белов А.А., Игунов Л.А., Карелин И.С. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории порупругости//Проблемы прочности и пластичности, 2009 №71. с.164-171.

16. Богачев И.В., Ватульян А.О. Обратные коэффициентные задачи для диссипативных операторов и идентификация свойств вязкоупругих материалов//Владикавказский математический журнал. 2012 №3 с.31-44.

17. Богачев И.В., Ватульян А.О. Явруян О.В. идентификация свойств неоднородной электроупругой среды//ПММ. 2012. Т.65 №5. с.860-866.

18. Богачев И.В., Ватульян А.О. Дударев В.В. Об одном методе идентификации свойств многослойных мягких биологических тканей//Российский журнал биомеханики. 2013. Т 17 №3. С37-48.

19. Богачев И.В., Ватульян А.О. Дударев В.В. Идентификация характеристик функционально-градиентного пьезометрического стержня//Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т 22, № 2. С.201-212.

20. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. С. 223.

21. Ватульян А.О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости//Доклады РАН, 2005. Т. 405 №3 С.343-345.

22. Ватульян А.О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел// Вестник Самарского госуниверситета. Естественные науки. 2007 № 4. С.93-103.

23. Погорелов А.Г. Обратные задачи нестационарной химической кинетики. Изд. Наука, 1988.

24. Алифанов О.М. Регуляризационные схемы решения обратных задач теплопроводности. - ИФЖ, 1973, т.24, №2, с.324-333.

25. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена.- М.: Наука, 1988.

26. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Сплайн-аппроксимация решения обратной задачи теплопроводности, учитывающая гладкость искомой функции. - ТВТ, 1987, т.25, № 4, с.693-699.

27. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Решение граничных и коэффициентных обратных задач теплопроводности итерационными методами. - В книге: Тепломассопбмен, т.9. -Минск: ИТМО АН БССР, 1980, с.106-112.

28. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1988.

29. Алифанов О.М., Михайлов В.В. Решение граничной обратной задачи теплопроводности в переопределенной постановке. // ИФЖ, 1983, Т.45, №3, 0.776-781.

30.. Алифанов О.М., Михайлов В.В. Решение обратной задачи теплопроводности итерационными методами// ИФЖ, 1978, т. 35, N 6, С.1 123-1129.

31. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М.: Наука, 1980.

32. Чиркин В.С. Теплопроводность промышленных материалов, М.: Машгиз. 1962. 484 с. Изд. ЛКИ, 2009.

33. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. Изд. Физматлит, 2005 г

34.Суринов Ю.А. О некоторых вопросах стохастической теории переноса излучения и радиационного теплообмена//Изв. Вузов. Черная металлургия.1992.№5.С.76-81.

35.Суринов Ю.А. Обобщенный зональный метод исследования и расчета лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде//Изв.АН СССР. Энергетика и транспорт.1975. №4.С.122-137.

18. Рубцов В.В., Суринов Ю.А. О методах решения нестационарных задач теории радиационно-кондуктивного теплообмена//Ж. вычисл. Матем. И матем. Физики.1989. Т.29.№11.С.1705-1713

19.Рубцов В.В. О существовании и единственности решения стационарных задач радиационно-кондуктивного теплообмена//Сборник прикладных научно-технических работ областного факультета «Промышленное и гражданское строительство».

М.:МГСУ.2000.С.127-132.

36.Белоголов Е.К., Зацепин А.Ю. Интегральные уравнения обратных задач радиационного теплообмена//ИФЖ. 1985.Т.№6.С.916-920.

37. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. теплообмен излучением. Справочник.М, Изд. Энергоатомиздат, 1991.

38.Джалурия Й. Естественная конвекция, М. Изд. Мир. 1983.

39. Мишин В.П. Обратные и сопряженные задачи теплообмена. -ИФЖ, 1977, т.33, N 6, с.965- 966.

40. Мишин В.П., Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена-области применения при проектировании и испытаниях технических объектов. - ИФЖ, 1982, т.42, N 2, с.181-192.

41 Мишин В.П., Алифанов О.М. Повышение качества отработки теплонагруженных конструкций и обратные задачи теплообмена. I. Общие вопросы теории. -Машиноведение, 1986, № 5,с.19-29.

42. Мишин В.П., Алифанов О.М. Повышение качества отработки теплонагруженных конструкций и обратные задачи теплообмена.!!. Практические приложения. - Машиноведение, 1986, N6, с.П-21.

43 Алифанов О.М. Решение задачи нестационарной теплопроводности и ее применение для исследования теплозащитных материалов. В кн. Исследование нестационарного конвективного тепло- и массообмена. - Минск: Наука и техника, 1971, с.322-333.

44. Алифанов О.М. Регуляризация решений обратных задач теплопроводности. В кн. Тепло- и массоперенос. - Минск: Наука и техника, 1972, т.8, с.89-98.

45. Алифанов О.М. Применение принципа регуляризации для построения приближенных решений обратных задач теплопроводности.- ИФЖ, 1972. т.23, N 6, с.1084-1091.

46 Алифанов О.М. О регуляризационных схемах приближенного решения нелинейной обратной задачи теплопроводности.- ИФЖ,1974, т.26, N 1, с.116-121.

47. Алифанов О.М. Определение граничного теплового режима из решения

обратной задачи теплопроводности.- ИФЖ, 1974, т.26, N 2, с.349-358.

48. Алифанов О.М. Решение обратной задачи теплопроводности итерационными методами.- ИФЖ, 1974, т.26, N 4, с.682-689.

49. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена).- М.: Машиностроение, 1979, 216 с.

50. Алифанов О.М. О выводе формул для градиента невязки при итерационном решении обратных задач теплопроводности. I. Определение градиента через функцию Грина. - ИФЖ, т.52,ИЗ,с.476-485.

51. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. - М.: Машиностроение, 1988, 280 с.

52. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена.- М.: Изд. Янус-К, 2009, 300 с.

53. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена, М.: Наука, 1988,- 288 с.

54. Алифанов О.М., Будник С.А., Михайлов В.В., Ненарокомов А.В. Экспериментально- вычислительный комплекс для исследования теплофизических свойств теплотехнических материалов. - Космонавтика и ракетостроение, 2006, т.42, N 1 с. 126-139.

55. Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Градиентный метод нахождения гладких решений граничных обратных задач теплопроводности.- ИФЖ, 1980, т.39, N 2, с.259-263.

56. Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Об оптимальном выборе шагов спуска в градиентных методах решения обратных задач теплопроводности,- ИФЖ, 1980, т.39, N 2, с.264-269.

57. Геращенко О.П., Гордов А.Н., Лах В.И. и др. Температурные измерения,- Киев: Наукова думка, 1984, с. 496.

58. Елисеев В.Н., Соловов В.А. Теоретическое и экспериментальное исследование погрешности измерения температур термопарами в теплоизоляционных материалах.

/ИФЖ, 1983, Т45, К" 5, с.737-742.

59. Алифанов О.М., Румянцев С.В. О выводе формул для градиента невязки при итерационном решении обратных задач теплопроводности. II. Определение градиента через сопряженную переменную.- ИФЖ, 1987, т.52, N 4, с.668-675.

60. Алифанов О.М., Румянцев С.В. О выводе формул для градиента невязки при итерационном решении обратных задач теплопроводности. III. Расчет градиента с помощью сопряженной краевой задачи.- ИФЖ, 1987, т.52, N 6, с.981-986.

61. Алифанов О.М., Румянцев С.В. Некоторые вопросы применения итерационной регуляризации для решения некорректных обратных задач.- ИФЖ, 1987, т.53, N 5, с.843-852.

62. Авдуевский В.С., Анфимов Н.А., Антонов Б.М. и др. Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. Г.С. Нариманова и М.К. Тихонравова.- М.: Машиностроение, 1972, 607 с.

63. Авдуевский В.С., Галицейский Б.М., Глебов Г.А. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. Под ред. В.К. Кошкина.- М.: Машиностроение, 1992, с. 520

64. Алексеев А.К., Чистов А.Ю., Шведов Б.А. К определению температуры в плотности теплового потока из решения обратной задачи теплопроводности в термодеструктурирующем материале.- ИФЖ, 1993, т.65, N 6, с.652-656.

65. Геращенко О.П., Гордов А.Н., Лах В.И. и др. Температурные измерения,- Киев: Наукова думка, 1984, 496 с,

66. Гольдман Н.Л. Обратные задачи Стефана, - ИФЖ, 1993, т.65, N 6, с.684-689,

67. Гончаров Н.В., Миков В.П. Решение обратной задачи по определению трех характеристик волокнистого композита,- ИФЖ, 1990, т.58, N 3, с.493-499,

68. Гончаров И.В., Миков В.П., Соболев В.П. Временная зависимость коэффициента теплообмена между компонентами композита в процессе теплопередачи, - ИФЖ, т.60, N 6, с.947

69. Беляев Н.М., Рядно А.А., Методы теории теплопроводности, ч.1,2,- М.: Высшая школа, 1982. с 327,304.

70. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Изд. Факториал., 2011.
71. Калашников А.Л. порядковая регуляризация некорректной задачи оптимального управления// Сб. Дифференциальные и интегральные уравнения, вып. 2- Горький. Изд-во горьковского университета, 1978.
72. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход: Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 374 с. 72.
73. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 509 с. 73.
- 74.Svanberg K. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization // International Journal for Numerical Methods of Engineering. 1987. – Vol. 24, № 2. – P. 359 – 373. 74.
- 75.Пантелеев А.В. Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. – М.: Изд-во МАИ-Принт, 2009 – 160 с. 75.
- 76.Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 432 с. 76. Адрианов В.Н.
77. Алифанов О.М., Колесников В.А. Определение элементов тензора теплопроводности анизотропных материалов из решения обратной задачи
- 78.Сea Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. Изд. Мир, 1973.
79. Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики
80. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. -М.: Физматлит, 2009.
81. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. -М.: Физматлит, 2005.
- 82.Кунц К.С. Численный анализ. Пер.с англ. под ред. Ю.В. Благовещенского. Изд. Техника, 1964.
83. Самасрский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. Изд. Либроком,

2009.

84. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений-М.:Наука, 2009.

85. Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А. Численные методы линейного программирования-М.: Наука, 1977

86. Ашманов С.А. Линейное программирование. -М.: Наука, 1981

87. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. -М.: прогресс, 1962.

88. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения-М.: Наука, 1972.

89. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : Учеб. пособие для вузов: В 2 т. — 13-е изд..М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1985. — 432 с.

90. Власов В.И., Горшков А.Б., Ковалев Р.В.. Исследование ламинарного тепловых потоков на поверхности аппарата сегментально-конической формы при его спуске с околоземной орбиты.

91. Альтов В.В., Винокуров Д.К., Залетаев С.В., Копяткевич Р.М., Саква Н.В.. Программный комплекс «Вычислительная система «СОТР». Свидетельство о регистрации ФАП РКТ № 4196 от 12.03.14 г.

92. Борщев Н.О., Антонов В.А.. Моделирование аэродинамического теплового нагрева автономного спускаемого аппарата лучистым нагревом для условий теплостатическим испытаний. Труды 7-ой российской национальной конференции по теплообмену 2018 г.

93. Борщев Н.О., Антонов В.А.. Теоретическое исследование тепловых режимов автономного спускаемого аппарата в плотных слоях атмосферы Земли для условий теплостатических испытаний. Труды 7-ой российской национальной конференции по теплообмену 2018 г.

94. Борщев Н.О., Антонов В.А., Протопопов И.А. Оценка влияния теплофизических процессов на объект в условиях тепловакуумных испытаний. Тезисы 17-ой международной конференции «Авиация и космонавтика» 2017 г.

95. Андронов В.Г., Белоусов Е.Г. О слабой сходимости по аргументу метода штрафных функций//Ж.вычисл. матем. и физики-Т.37 №4 С.404-414-1997.

96. Андронов В.Г., Белоусов Е.Г. О бержевой сходимости метода штрафных функций//Ж.вычисл. матем. и физики-Т.38 №4 С.404-414-1998.

97. Борщев Н.О., Сорокин А.Е., Белявский А.Е. Алгоритм параметрического определения теплофизических характеристик покрытий.- СТИН, 2019, номер 9, С. 34-37.

98. Борщев Н.О., Сорокин А.Е., Белявский А.Е. Алгоритм определения тензора теплопроводности методом регуляризации Тихонова А.Н. в сферических координатах.- СТИН, 2020, номер 2, С. 25-27.