УДК 621.391

Оценка линейных сигналов в условиях непараметрической априорной неопределенности.

А.В.Чикин

В статье излагается подход к решению задачи оценки линейных сигналов в условиях непараметрической априорной неопределенности. Эта проблема возникает во многих приложениях цифровой радиосвязи.

Введение.

Задача оценки принятых символов цифровой информации естественна почти для всех цифровых средств радиосвязи. В литературе[1-4] исследовано большое количество ситуаций, возникающих при синтезе оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов оценивания. Как правило, оптимальное решение этой задачи сводится к проверке статистических гипотез в силу того, что передаваемая цифровая информация представляет собой конечное множество. Тем не менее, в данной работе будет показано, что это не единственный оптимальный способ оценивания и при этом практическая значимость предлагаемого способа существенно выше. Единственное требование, предъявляемое к совокупности передаваемых сигналов, заключается в их линейности. Изложение метода оценки развивается для случая полного отсутствия информации о канале связи. В статистической теории этот случай носит название *непараметрической априорной неопределенности.*

Изложение материала ведется в терминах «пространства состояний» передающей системы по аналогии с непрерывными системами. Под пространством состояний подразумевается конечное множество всех возможных на фиксированном отрезке времени реализаций передаваемых цифровых последовательностей.

Общая модель цифровой системы связи.

В самом общем виде модель системы передачи цифровой информации может быть представлена в виде структурной схемы, изображенной на рис.1.

Рис. 1

Цифровая система радиосвязи состоит, как правило, из трех основных элементов: передающая часть, канал связи и приемная часть. Основным звеном передающей части является генератор последовательности цифровых символов *(цифровой временной последовательности)*, которые генерируются по определенному математическому закону из некоторой совокупности, которая должна быть известна на приемной стороне. Выбор математического закона генерации символов осуществляется в соответствии с сигналами некоторого дискретного внешнего источника – объекта наблюдений. При этом текущее состояние внешнего источника (выбранный математический закон генерирования символов) может быть назван текущим *состоянием системы передачи*. Будем считать, что допустимое внешнее воздействие на генератор системы передачи состоит из элементов некоторого конечного множества $\mathbf{\Theta} = \{\theta_i, i = 1,...N\}$. При этом в течение интервала дискретного времени $\mathbf{T} = \{1,...,T\} \subset ¢$, где ¢ - множество целых неотрицательных чисел, внешнее управление сохраняет свое значение θ_i. Множество $\mathbf{\Theta}$ далее будет называться *пространством состояний системы передачи*.

Генератор временной цифровой последовательности генерирует определенный цифровой сигнал из некоторого конечного множества $\mathbf{V}$ в соответствии с текущим состоянием системы передачи. Это означает, что с каждым элементом $\theta_i \in \mathbf{\Theta}$ поставлен во взаимнооднозначное соответствие элемент $\mathbf{v}^{(i)} \in \mathbf{V}$, $\theta_i \leftrightarrow \mathbf{v}^{(i)}$. Таким образом, множество $\mathbf{V}$ может быть названо *пространством передаваемых цифровых сигналов* или *кодовым пространством* (как принято в работах по помехоустойчивому кодированию информации).

Требование конечности указанных множеств естественно для цифровых систем. Как правило, непосредственно передавать сигналы из кодового пространства по каналу связи не представляется возможным, поэтому обычно предварительно перед передачей осуществляется дополнительное преобразование сигналов из кодового пространства в сигналы, удобные для передачи. Практически всегда эти сигналы являются непрерывными во времени и передаются в течение промежутка времени $\mathbf{T}_\mathbf{A} = [0,t] \in \mathbb{R}^1$, где $\mathbb{R}^1$ - вещественная числовая ось. Множество всех таких сигналов будет обозначаться $\tilde{\mathbf{V}}$, причем каждому элементу $\tilde{\mathbf{v}}^{(i)} \in \tilde{\mathbf{V}}$ поставлен во взаимнооднозначное соответствие элемент $\mathbf{v}^{(i)} \in \mathbf{V}$ или же $\theta_i \in \mathbf{\Theta}$. Понятно, что $\tilde{\mathbf{V}}$ является <u>подмножеством</u> определенного класса $L(\mathbf{T}_\mathbf{A})$ непрерывных на интервале $\mathbf{T}_\mathbf{A}$ функций, т.е. $\tilde{\mathbf{V}} \subset L(\mathbf{T}_\mathbf{A})$. Множество $\tilde{\mathbf{V}}$ может быть названо *пространством передаваемых аналоговых сигналов.* Таким образом, можно считать, что задан оператор отображения $\tilde{\mathbf{H}} : \mathbf{V} \to \tilde{\mathbf{V}}$, осуществляющий отображение пространства цифровых сигналов во множество аналоговых сигналов и при этом существует обратный оператор $\tilde{\mathbf{H}}^{-1} : \tilde{\mathbf{V}} \to \mathbf{V}$. Как правило, отображение $\tilde{\mathbf{H}}$ некоторого элемента $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ осуществляется не на точечный элемент $\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{V}}$, а на некоторую его окрестность $\{\tilde{v}' : \rho(\tilde{v}' - v) < \varepsilon, \forall \varepsilon\}$ в выбранной метрике пространства. Это связано с тем, что радиоэлементы всегда имеют инерционность и, следовательно, необходимо учитывать влияние всех предшествующих до интервала времени $\mathbf{T}_\mathbf{A}$ отображений. Так как учет всех предшествующих отображений и построение соответствующих метрик для определения окрестностей – достаточно сложная математическая задача, то в данной работе принято традиционное предположение о том, что элементы из рассматриваемой окрестности выбираются случайным образом, причем вероятностная мера на элементах окрестности имеет равномерное распределение. Данное допущение не является, как будет видно, принципиальным в данной работе, поэтому в последствии, чтобы быть математически корректными, будем говорить об элементе $\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{V}}$, подразумевая при этом некоторую неизвестную его окрестность.

Как правило, влияние помехи в канале связи может быть описано совокупностью случайных функций, принадлежащих тому же классу $L(\mathbf{T}_\mathbf{A})$, что и $\tilde{\mathbf{V}} \subset L(\mathbf{T}_\mathbf{A})$. При этом характер взаимодействия полезного сигнала и помехи может быть описан случайным оператором $\tilde{\mathbf{W}} : \tilde{\mathbf{V}} \to \mathbf{U}$, отображающим множество передаваемых аналоговых сигналов в некоторое множество наблюдаемых сигналов $\mathbf{U}$, которое удобно называть *пространством наблюдений*. Современными техническими средствами обработка принимаемого сигнала в приемных устройствах может выполняться двумя различными способами: в непрерывном и дискретном режимах. Представлению в дискретном или непрерывном виде может подвергаться как временной параметр, так и амплитуда сигнала.

Из этого следует, что пространство наблюдений может представлять собой либо конечномерное пространство (в случае дискретного времени), либо бесконечномерное (в случае непрерывного времени). Всюду далее рассматриваются исключительно лишь конечномерные пространства.

В задачу блока оценки временной последовательности приемной системы входит процедура вынесения решения о текущем состоянии передающей системы $\hat{\theta}_i$ из множества $\boldsymbol{\Theta}$ по принятому сигналу $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, использующая при этом всю (или часть) имеющуюся априорную информацию о статистических характеристиках источника внешнего управления и о канале связи. Необходимо отметить, что множество возможных решений может быть снабжено дополнительными элементами $\boldsymbol{\Theta}'$ (например, решением о недостаточности проведенных наблюдений). Таким образом, блок оценки представляет собой реализацию определенного решающего правила $\delta(\mathbf{u})$ (оператора), согласно которому каждому элементу $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ ставится в соответствие элемент $\hat{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}'$. Понятно, что в силу наличия помехи в канале связи выносимые решения могут быть ошибочными и при этом возникают потери. Величину потерь, возникающих при принятии решения θ_j, если текущее состояние передающей системы θ_i, будет обозначено $\alpha_{i,j}$.

Представленная конструкция, описывающая процесс формирования и приема сигнала в цифровых системах связи, может быть представлена в операторной форме в следующем виде

$$\boldsymbol{\Theta} \leftrightarrow \mathbf{V} \underset{\vec{\mathbf{H}}}{\rightarrow} \tilde{\mathbf{V}} \underset{\vec{\mathbf{W}}}{\rightarrow} \mathbf{U} \underset{\delta}{\rightarrow} \boldsymbol{\Theta}' \subseteq \boldsymbol{\Theta}.$$

Математическая модель кодового пространства и пространства наблюдений может различаться для конкретных приложений. Несмотря на это, далее будут рассмотрены общие определения и свойства для этих пространств, поскольку они могут быть описаны в терминах принадлежности векторным пространствам.

Элементы кодового пространства и пространства наблюдений удобно представлять в виде векторов соответствующих векторных пространств. Выше указывалось, что характерным для цифровой радиосвязи является представление кодового пространства в виде векторного линейного пространства над полем Галуа $GF(q)$ с алгебраическими операциями сложения векторов и умножения вектора на скаляр по модулю q. Подробное описание данной конструкции может быть найдено в литературе по линейной алгебре, например, в [6]. В настоящей работе обращение к алгебраическим конструкциям кодового пространства почти не понадобится, однако необходимо отметить некоторые общие положения, которые будут использоваться в дальнейшем при синтезе алгоритмов оценивания:

1. кодовое пространство конечномерно;
2. кодовое пространство линейно;
3. кодовое пространство является частным случаем гильбертова пространства и, следовательно, в нем существует подмножество векторов, представляющее собой базис пространства;
4. кодовое пространство как частный случай гильбертова пространства может быть расщеплено на ортогональные подпространства.

Пусть задано T-мерное евклидово пространство $\mathbf{U}^T$, образованное путем T-кратного прямого произведения числовой оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbf{U}^T = \mathbb{R}^T$, с σ-алгеброй B борелевских множеств на ней. Борелевская σ-алгебра B^T T-мерного пространства $\mathbf{U}^T$ образуется как продолжение полуалгебры всех прямоугольников вида $\prod_{i}^{\infty} A_i,\ A_i \in B$. В частных случаях $\mathbf{U}^T$ может быть также образованно посредством прямого произведения компактов $\mathbf{R}_c \in B$. После этого в введенном T-мерном векторном пространстве $\mathbf{U}^T$ выделяется некоторое точечное подмножество $\mathbf{U}_V^T \subset \mathbf{U}^T$, которое принято называть *сигнальным созвездием*, следующим образом. Задается изоморфизм относительно каждого из элементов вектора $\mathbf{v} = \{v_1, ..., v_T\}$ и вектора $\mathbf{u}_V = \{u_1, ..., u_T\}$, т.е. $v_i \leftrightarrow u_i$. Таким образом, $\mathbf{U}_V^T$ изоморфно $\mathbf{V}$.

Необходимо отметить, что под описание введенной конструкции попадает подавляющие большинство современных систем передачи цифровой информации, а также некоторые системы из смежных областей знаний, например, радиолокации и радионавигации. Таким образом, представленная выше модель цифровой системы связи охватывает очень широкий класс систем, поэтому все приводимые ниже результаты могут быть (возможно, с некоторыми изменениями) перенесены на необходимые вновь разрабатываемые или же модифицируемые системы (устройства).

Постановка задачи.

Так как данная работа ориентирована в основном на случай «наихудшей» ситуации, то такой ситуацией с точки зрения проблемы оценки является полное отсутствие какой-либо априорной информации о статистических характеристиках состояний системы передачи и канала связи. Это обосновывается тем, что некоторые типы устройств по своему принципу не могут иметь никаких априорных сведений. Например, такая ситуация часто возникает сразу после включения приемного устройства в то время как задержки по времени, требуемые для вынесения решений, являются существенными. Эта ситуация может также возникать при глубоких замираниях сигнала, а также при быстрых флуктуациях параметров канала, когда «старая» информация становится дезинформирующей. В связи с этим формально постановка задачи может быть записана так.

Будем считать, что в результате наблюдения на интервале дискретного времени $\mathbf{T}$ получена последовательность *отсчетов* канала связи $\mathbf{u} = \{u_i; i = 1, T\}$. Известно, что $\mathbf{u}$ содержит одну из возможных передаваемых цифровых последовательностей $\tilde{\mathbf{v}}^{(i)}$, характеризующую текущее состояние системы передачи $\theta_i \in \mathbf{\Theta}$. О характере вхождения $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{S}}^{(i)}$ в $\mathbf{u}$ не делается каких-либо предположений. Также известно, что совокупность $\mathbf{V}$ образует линейное пространство. Вероятностные характеристики состояний $\mathbf{\Theta}$ источника полагаются не известными.

В этих условиях необходимо синтезировать решающее правило $\delta(\mathbf{u})$ со значениями в $\mathbf{\Theta}$, которое являлось бы оптимальным относительно некоторого обоснованно выбранного критерия. Может быть также построена последовательность решающих правил $\{\delta_k(\mathbf{u}, \alpha); k = 1, 2, ...\}$, зависящая от некоторого дополнительного параметра α, которая при возрастании k стремится к оптимальному, т.е.

$$\delta(\mathbf{u}) = \lim_k \delta_k(\mathbf{u}, \alpha)$$

Будем считать, что в результате ошибочных решений возникают потери, которые могут быть записаны в виде так называемой *функции потерь,* представленной в матричной форме

$$\gamma(\theta, \hat{\theta}) = \begin{vmatrix} a_{\theta_1,\theta_1} & & a_{\theta_1,\theta_N} \\ & \dots & \\ a_{\theta_N,\theta_1} & & a_{\theta_N,\theta_N} \end{vmatrix}.$$

Выбор и обоснование критерия оптимальности.

Вследствие конечности множества передаваемых сигналов поставленная задача естественным образом приводится к задаче проверки статистических гипотез. К проверке статистических гипотез сводятся все задачи, в которых на основе наблюдений необходимо произвести некоторую классификацию, т.е. определить, к какому из заданных классов распределений вероятностей относится закон распределения, описывающий наблюдаемые сигналы. Можно показать также, что задачи оценивания по существу являются задачами проверки статистических гипотез, но отличие заключается в конструкции пространства, которому принадлежат оцениваемые (исходные) сигналы, что и приводит к различным правилам синтеза устройств обработки наблюдаемых данных. В задачах оценивания пространствами, описывающими исходные сигналы, являются функциональные пространства. Исходя из этих соображений, далее не будет делаться различий между терминами *оценивание* и *проверка гипотез.*

Как известно [2], решение задачи проверки статистических гипотез (также как и оценивания) приводит к построению вероятностной меры на множестве решений $\mathbf{\Theta} = \{\theta_1, ..., \theta_N\}$. Для такого построения необходимо осуществить N процедур проверки гипотезы $\mathbf{H}_i$ о том, что принятая совокупность отсчетов $\mathbf{u} = \{u_1, ..., u_n\}$ была порождена случайным процессом с вероятностной мерой на множестве $\mathbf{U}$, соответствующей θ_i. После этого выносится решение о параметре θ_i, который вероятнее всего имел место в рассматриваемой ситуации. Причем сами процедуры построения меры и правила принятия решений могут быть различными и, главным образом, зависеть от количества априорных сведений. Очевидно, что практическая реализация синтезированных алгоритмов приводит к необходимости построения N параллельных каналов обработки, каждый из которых соответствует «своей» гипотезе. Однако при очень больших значениях N, что в подавляющем большинстве случаев представляет значительный практический интерес при синтезе систем цифровой радиосвязи, осуществление технической реализации алгоритмов неизбежно наталкивается на значительные трудности, предъявляемые к ресурсам устройств обработки сигналов.

Известно множество методов оценивания и все они различаются в основном спецификой подходов к определению количества априорной информации. Это же, в свою очередь, определяет и понятие оптимальности синтезированных алгоритмов. Может быть проведена классификация подходов по уровню полноты имеющейся априорной информации у наблюдателя. Наиболее полным описанием наблюдаемых явлений считается случай, когда полностью известны статистические характеристики источника, т.е. внешнего управления, и статистические характеристики канала связи, а также характер взаимодействия помехи и полезного сигнала в канале связи. Синтезированные в таких условиях оптимальные алгоритмы основываются на байесовских правилах принятия решений. В случае отсутствия априорной информации о текущем состоянии системы передачи наиболее распространенными являются правила принятия решений, основанные на принципе максимального правдоподобия, а также минимаксные правила в том случае, если дополнительно частично известны статистические характеристики канала связи. В случае же отсутствия (либо сильной ограниченности) априорной информации о состоянии системы передачи и канале связи вся имеющаяся информация сводится только к знанию закона формирования полезного сигнала (конструкция кодового пространства) и конструкции пространства наблюдений. В таких условиях наиболее целесообразным является правило принятия решений на основе метода наименьших квадратов (МНК). Однако в силу незнания характеристик канала связи этот метод принципиально не является статистически обоснованным. Тем не менее, во многих случаях он является единственно возможным и «разумным». Более того, в некоторых частных случаях (например, гауссовские аддитивные каналы) характеристики синтезированных по этому методу алгоритмов совпадают с оптимальными [7].

Необходимо отметить также, что ограниченные априорные сведения в поставленной задаче приводят к тому, что правило принятия решения не является статистическим. В связи с этим не удается вычислить средний риск от ошибок при принятии решений и, следовательно, невозможно качественно судить об алгоритме оценивания.

Как указано в постановке задачи будем считать, что совокупность отсчетов наблюдаемого сигнала может быть представлена в виде вектора $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_T\}$ в евклидовом пространстве $\mathbf{U} = \mathbb{R}^T = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{T}$, образованном T-кратным прямым произведением множеств $\mathbb{R}$, т.е. $u_i \in \mathbb{R}$, и снабженным метрикой ρ_u, порожденной естественной нормой векторов $\|\mathbf{u}\|$. При этом полезный сигнал образовывает некоторое точечное подмножество (*сигнальное созвездие*) векторов $\mathbf{U}_V = \{\mathbf{u}_V\} \subset \mathbf{U}$. Тогда в соответствии с методом принятия решения согласно МНК потери характеризуются квадратом расстояния в ρ_u-метрике между принятым вектором отсчетов $\mathbf{u}$ и множеством $\mathbf{U}_V$, т.е.

$$\rho_u{}^2\left(\mathbf{u},\mathbf{U}_V\right)=\min\rho_u{}^2\left(\mathbf{u},\mathbf{u}_V\right)\quad \text{для} \quad \text{всех} \quad \mathbf{u}_V\in\mathbf{U}_V$$

При этом считается, что полезным сигналом, имеющим место в наблюдаемой ситуации, является вектор $\hat{\mathbf{u}}_V\in\mathbf{U}_V$, для которого достигается соотношение . Для этого вектора потери минимальны.

Может быть показано, что синтезированные по этому методу оптимальные алгоритмы являются также оптимальными при аддитивном гауссовском характере помех и по статистическим характеристикам совпадают с алгоритмами, синтезированными по принципу максимума правдоподобия. Другими словами класс правил принятия МНК–решений является значительно шире по сравнению, например, с классом решений по максимуму правдоподобия.

Оценка линейных сигналов.

Ниже приводится алгоритм оценивания текущего состояния дискретной системы передачи, основанный на общих соображениях, т.е. не конкретизируется вид передаваемых сигналов и модель канала связи.

Задавшись критерием оптимальности необходимо уточнить первоначальную постановку задачи. Пусть пространство наблюдений $\mathbf{U}^T$ является T-мерным евклидовым пространством с естественной нормой векторов и порожденной ею метрикой ρ_u. Наблюдению доступен некоторый вектор $\mathbf{u}\in\mathbf{U}^T$. Задача заключается в синтезе алгоритма оптимальной МНК–оценки $\theta^*\in\mathbf{\Theta}$ текущего состояния системы передачи. Другими словами, необходимо найти такой вектор в кодовом пространстве $\hat{\mathbf{v}}\ \in\mathbf{V}^T\leftrightarrow\hat{\theta}$ так, чтобы квадрат расстояния между вектором, соответствующим его отображению $\hat{\mathbf{v}}\ \leftrightarrow\hat{\mathbf{u}}_V\in\mathbf{U}_V^T\subset\mathbf{U}^T$, и $\mathbf{u}$ в ρ_u–метрике пространства наблюдений было бы минимальным, т.е.

$$\rho_u\left(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{u}\right)=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{T}\left(\hat{u}_{1i}-u_{1i}\right)^2}\right)^2=\sum_{i=1}^{T}\left(\hat{u}_{1i}-u_{1i}\right)^2\to\min$$

для всех $\mathbf{v}\ \in\mathbf{V}^T$, где под знаком суммы стоят соответствующие элементы векторов.

В теории статистических решений существует общее указание к построению решающих правил, относящееся к первоначальному построению достаточных (а в лучшем случае минимальных) *статистик* от наблюдений $g(\mathbf{u})$. При этом считается, что осуществление хотя бы малой редукции данных наблюдений является значительным шагом к решению задачи. В рамках поставленной задачи есть возможность добиться значительной редукции данных наблюдений за счет имеющейся априорной информации о виде передаваемых сигналов. Действительно, m-мерное кодовое пространство $\mathbf{V}$ линейно. Это означает [8], что оно является линейной оболочкой $L(\mathbf{V_B}) = \mathbf{V}$ некоторого подмножества векторов $\mathbf{V_B} = \{\mathbf{v}_{\mathbf{B}i}, i = 1,...,m\}$, называемых базисными, т.е. каждый вектор из пространства состояний может быть представлен, причем только единожды, линейной комбинацией базисных векторов

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}\mathbf{V_B} = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{v}_{\mathbf{B}i} ,$$

где вектор-строка $\mathbf{c}$ - называется координатным вектором в выбранном базисе, а $\mathbf{V_B}$ - матрица размером $m \times n$. Необходимо отметить, что всегда существует базис, который принято называть натуральным (или единичным), образованный векторами вида $\{\mathbf{v}_{\mathbf{e},T} = (1,0,0,...0), \mathbf{v}_{\mathbf{e},T-1} = (0,1,0,...0),..., \mathbf{v}_{\mathbf{e},1} = (0,0,...,0,1)\}$. Линейной оболочкой единичного базиса, как легко может быть показано, является все пространство $\mathbf{V}^T \supset \mathbf{V}$. Соотношение позволяет редуцировать тривиальную достаточную статистику $\mathbf{u}$. Необходимо отметить, что МНК по своей сути не статистический, а аппроксимационный метод. Использование данного метода обосновывается отсутствием априорной статистической информации. Вследствие этого предварительно необходимо сделать некоторые заключения по общей теории аппроксимации, используемой в приложениях цифровой связи.

В [8] описывается общая схема аппроксимации. Допустим, что исходные сигналы $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ и результаты наблюдений $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ связаны некоторым оператором $\mathbf{H}$ и могут быть представлены в виде соотношения

$$\mathbf{H}\mathbf{v} = \mathbf{u} ;$$

при этом $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ - пространства исходных сигналов и наблюдений, соответственно. Аппроксимация решения сводится к введению дополнительной последовательности операторов и пространств $\mathbf{H}_n, \mathbf{V}_n, \mathbf{U}_n$, аппроксимирующих оператор $\mathbf{H}$ и пространства $\mathbf{V}, \mathbf{U}$, соответственно. Тогда общая схема аппроксимации представляется в виде

$$\mathbf{H}_n \mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n .$$

Для введения дополнительных аппроксимирующих пространств необходимо задаться соответствующими операторами проектирования $\mathbf{P}_n : \mathbf{V} \to \mathbf{V}_n$ и $\mathbf{Q}_n : \mathbf{U} \to \mathbf{U}_n$. Если $\mathbf{V}_n, \mathbf{U}_n$ являются подпространствами $\mathbf{V}, \mathbf{U}$, соответственно, то такие операторы называются *идемпотентными.* Таким образом, возникает задача аппроксимации элемента одного пространства элементами другого. За меру приближения $\mathbf{v}_n$ к решению $\mathbf{v}$ удобно принимать значение разности $\left\| \mathbf{P}_n \mathbf{u} - \mathbf{u}_n \right\|$ по норме в $\mathbf{U}_n$. Тем не менее, возможен случай, когда за меру могут быть приняты значения некоторого функционала $f\left(\left\| \mathbf{P}_n \mathbf{u} - \mathbf{u}_n \right\|\right)$, вид которого, возможно, зависит от $\mathbf{u}$, или же, если существует обратный оператор $\mathbf{P}^{-1}$, разность $\left\| \mathbf{u} - \mathbf{P}_n^{-1} \mathbf{u}_n \right\|$ по норме в $\mathbf{U}$. При этом во всех случаях могут быть установлены соответствующие условия сходимости к решению.

Необходимо отметить, что возможны два случая: оператор $\mathbf{H}$ отображает линейное пространство $\mathbf{V}$ в некоторое подпространство $\mathbf{U}_V$ линейного пространства $\mathbf{U}$; и оператор $\mathbf{H}$ отображает линейное пространство $\mathbf{V}$ в некоторое подмножество (не подпространство) $\mathbf{U}_V$ линейного пространства $\mathbf{U}$. Первый случай исследован достаточно подробно и сводится к следующей схеме аппроксимации.

В силу известной из анализа теоремы о разложении вектора [8] в гильбертовом пространстве может быть записано

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_V + \mathbf{z}, \qquad \mathbf{u}_V \in \mathbf{U}_V, \mathbf{z} \in \mathbf{U}_V^{\perp} = \mathbf{U} \setminus \mathbf{U}_V .$$

Всякий вектор $\mathbf{u}_V$ может быть представлен в виде линейной комбинации *базисных* векторов $\{\mathbf{u}_{b1}, ..., \mathbf{u}_{bm}\}$ подпространства $\mathbf{U}_V$ и, следовательно,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{u}_{bi} + \mathbf{z},$$

где α_i - весовые коэффициенты. Для их определения следует скалярно умножить левую и правую часть на $\mathbf{u}_{bj}, j = 1,..,m$. Тогда, принимая во внимание, что вектор $\mathbf{z}$ ортогонален подпространству $\mathbf{U}_V$ и, следовательно, результат произведения этого вектора с каждым из базисных векторов равен нулю, то

$$\left(\mathbf{u},\mathbf{u}_{bj}\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(\mathbf{u}_{bi},\mathbf{u}_{bj}\right),\qquad j=1,...,m.$$

Из полученной системы уравнений находятся неизвестные весовые коэффициенты, определяющие вектор наилучшей аппроксимации.

Второй случай исследован менее полно, но, тем не менее, может быть указан следующий общий факт, когда пространства исходных сигналов и наблюдений заданы над полем вещественных чисел. Будем полагать, что пространство наблюдений $\mathbf{U}$ допускает разложение по некоторой системе базисных векторов $\{\mathbf{u}_{b1},...,\mathbf{u}_{bn}\}$. В евклидовом пространстве такая система всегда существует и представляет собой единичный базис, образованный векторами вида $\{\{1,0,0,...\},\{0,1,0,...\},\{0,0,1,...\}\}$. В свою очередь m–мерное пространство исходных сигналов также допускает разложение по некоторой системе базисных векторов $\{\mathbf{v}_{b1},...,\mathbf{v}_{bm}\}$. В анализе доказывается результат о том, что всякий линейный оператор $\mathbf{H}^{-1}$, отображающий конечномерное линейное пространство в конечномерное линейное пространство, может быть представлен в матричном виде. Для его нахождения рассматривается разложение по базису $\{\mathbf{v}_{b1},...,\mathbf{v}_{bm}\}$ образов базисных векторов $\{\mathbf{u}_{b1},...,\mathbf{u}_{bn}\}$

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{u}_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\mathbf{v}_{bj},\qquad i=1,...,n.$$

Пусть теперь $\mathbf{v}=\mathbf{H}^{-1}\mathbf{u}$, тогда

$$\mathbf{v}=\mathbf{H}^{-1}\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{n}b_i\mathbf{H}^{-1}\mathbf{u}_{bi}=\sum_{i=1}^{n}b_i\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\mathbf{v}_{bj}=\sum_{j=1}^{m}d_j\mathbf{v}_{bj},$$

где

$$d_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}b_i.$$

Из полученного соотношения видно, что для задания линейного оператора отображения $\mathbf{H}^{-1}$ необходимо определить $n+m$ матричных коэффициентов. Таким образом, система уравнений всегда будет переопределена и непосредственное ее разрешение невозможно. Однако, следуя принципу МНК, видно, что вектор наилучшей аппроксимации $\mathbf{v}$ будет получен, если норма вектора, составленного из коэффициентов b_i, минимальна.

Всюду далее в настоящей работе рассматривается именно второй случай, так как в задачах цифровой радиосвязи он имеет важное практическое значение.

Непрерывное множество исходных сигналов.

В рамках описанной общей схемы первоначально будет принято, что исходные пространства евклидовы и заданы над множеством коэффициентов $C = \mathbb{R}^1$, представляющем собой поле действительных чисел с борелевской σ-алгеброй F. При этом пространство наблюдений $\mathbf{U}^{\mathbf{T}}$ образовано как $\mathbf{T}$-кратное прямое произведение числовой оси $\mathbf{U} = \mathbb{R}^1$ с выделенной на ней борелевской системой множеств Ξ и заданной на этой системе мерой Лебега λ. $\mathbf{T}$ - некоторое конечное множество, состоящее из T элементов и трактуемое как дискретное время. Тогда пространство наблюдений будет обозначаться $\left(\mathbf{U}^T, \Xi_U^T, \lambda^T\right)$, причем, необходимо, чтобы $\dim \mathbf{V} = m \le \dim \mathbf{U}^T = T$. Будем также считать, что в отсутствие шума наблюдений известен оператор $\mathbf{H}_0 : \mathbf{V} \to \mathbf{U}_V^T$, отображающий $\mathbf{V}$ в некоторое подмножество $\mathbf{U}_V \subset \mathbf{U}$. Операторы проектирования $\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_n = \mathbf{I}$ тождественны.

Введем в рассмотрение m-кратное прямое произведение множества коэффициентов $C^m = C \underset{m}{\times \ldots \times} C, F^m = F \underset{m}{\times \ldots \times} F$, тогда измеримое пространство $\mathbf{C} = \left\{C^m, F^m\right\}$ далее будет называться *пространством коэффициентов.* В силу линейности $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ оператор $\mathbf{H}$ может быть представлен в другой форме. Действительно, каждый вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ может быть представлен лишь единственным способом в виде линейной комбинации относительно некоторой линейно независимой системы базисных векторов $\mathbf{B} = \left\{\mathbf{v}_{B1}, \ldots, \mathbf{v}_{Bm}\right\} \subset \mathbf{V}$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{c} = \left\{c_1, \ldots, c_m\right\} \in \mathbf{C},$$

где $\mathbf{c}$ - так называемый m-мерный координатный вектор относительно базисной системы $\mathbf{B}$. Необходимо отметить, что, в свою очередь, $\mathbf{B}$ может трактоваться как линейный оператор в матричном виде, отображающий m-мерное пространство координат C^m в $\mathbf{V}$. Далее, в силу того, что пространства $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ заданы над одним и тем же полем коэффициентов, следует

$$\mathbf{H} : \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{u} \in \mathbf{U}_V, \mathbf{c} = \left\{c_1, \ldots, c_m\right\} \in C^m.$$

Для $T = m$ существует обратный оператор $\mathbf{B}^{-1}$ (обратная матрица), тогда

$$\mathbf{H}^{-1} : \mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} \in \mathbf{U}_V, \mathbf{c} = \left\{c_1, \ldots, c_m\right\} \in C^m.$$

Ясно, что обратный оператор $\mathbf{B}^{-1}$ оказывается $\left(\Xi^m, F^m\right)$-измеримым, поэтому отображение $\mathbf{H}^{-1}$ индуцирует меру λ^T на σ-алгебру F^m. Таким образом,

$$\mu(A) = \lambda^T\left(\mathbf{B}(A)\right), \quad A \in F^m$$

- мера на пространстве коэффициентов.

Нормы оператора $\mathbf{B}$ и обратного к нему $\mathbf{B}^{-1}$ могут быть вычислены из следующих соотношений

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{c}\|},$$

$$\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| = \frac{\|\mathbf{c}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{B}\|}.$$

Пусть $T > m$, а $\{\mathbf{R}, \Re, \eta\}$ - некоторое не более, чем счетное множество, состоящее из R элементов, и в котором выделена алгебра (σ-алгебра) дискретных множеств $\Re$ и задана дискретная мера η, порожденная множеством целых чисел ¥ . В этом случае введем в рассмотрение вспомогательное пространство, образованное R-кратным прямым произведением пространств $\mathbf{C}$,

$$\mathbf{C}^R = \prod_{r=1}^{R} \mathbf{C}_r, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{C}$$

с σ-алгеброй Ξ_C, порожденной полуалгеброй всех измеримых прямоугольников вида

$$A \times B, \quad A \in F^m, B \in \Re.$$

Введенное пространство оказывается измеримым относительно прямого произведения мер $(\mu \times \eta)$.

Выберем произвольное множество $M \subset \mathbf{T}$ и соответствующее произведение пространств

$$\mathbf{U}^M = \prod_{t \in M} \mathbf{U}_t.$$

Полученное таким образом пространство будет подпространством $\mathbf{U}^T$, а точки $\{u_t : t \in \mathbf{M}\}$ - проекции на $\mathbf{U}^M$ соответствующих точек $\mathbf{u} = \{u_t, t \in \mathbf{T}\}$ пространства $\mathbf{U}^T$. При этом, необходимо отметить, что проектирование осуществляется относительно единичного базиса в $\mathbf{U}^T$. Теперь введем в рассмотрение упорядоченную совокупность проекций $\pi_E = \{\pi_i; i = 1, ..., R\}$ пространства $\mathbf{U}^T$ на $\mathbf{U}^{M=m} = \mathbf{U}^m, \dim \mathbf{U}^m = m$. Максимально возможное число R таких проекций вычисляется, очевидно, как число сочетаний из m по T, т.е. является известной комбинаторной функцией

$$R = \frac{T!}{m!(T-m)!}.$$

Для каждой проекции $\pi_i \mathbf{u}$ возможно вполне однозначное разрешение системы уравнений , т.е.

$$\mathbf{c}_i = (\pi_i \mathbf{B})^{-1} \pi_i \mathbf{u}, \qquad i = 1,...,R.$$

Таким образом, поставив в некоторое взаимнооднозначное соответствие номер проекции i и проекцию $\mathbf{C}_i$ в пространстве $\mathbf{C}^R$, задается оператор отображения $\mathbf{G}: \mathbf{U}^T \to \mathbf{C}^R$; при этом существует обратный оператор $\mathbf{G}^{-1}$. Ясно, что, так как $R > T$ отображение $\mathbf{G}$ возможно лишь в некоторое подмножество векторов из $\mathbf{C}^R$.

Допустим, что в результате случайного исхода ω наблюдению подлежит некоторый вектор $\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{u} \in \mathbf{U}^T$. Введем для каждой проекции π_i на $\mathbf{U}^m$ совокупность Ξ^m-измеримых и зависящих от $\mathbf{u}$ неограниченных функционалов вида

$$f(\pi_i \mathbf{u}, \pi_i \mathbf{u}') = f_u(\pi_i \mathbf{u}') = \|\pi_i \mathbf{u} - \pi_i \mathbf{u}'\|^2, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{U}^n, i = 1,...,R$$

определяемых нормой векторов в евклидовом пространстве, или

$$f(\pi_i \mathbf{u}, \pi_i \mathbf{u}') = f_u(\pi_i \mathbf{u}') = \rho_u(\pi_i \mathbf{u}, \pi_i \mathbf{u}')^2, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{U}^n, i = 1,...,R,$$

определяемых метрикой $\rho_u(\cdot,\cdot)$. Нетрудно убедиться, что совокупность функционалов f_u непрерывна и выпукла вниз. Линейное (Ξ^m, F^m)-измеримое отображение $\mathbf{B}^{-1}$ выделяет аналогичную совокупность F^m-измеримых функционалов $f^c_{u,r}$ в пространстве $\mathbf{C}_r$ с сохранением непрерывности и выпуклости

$$f^c_{u,r}(\mathbf{c}') = f^c_{u,r}\left((\pi_i \mathbf{B})^{-1} \pi_i \mathbf{u}'\right) = f_{u,r}(\pi_i \mathbf{u}')$$

Вследствие выпуклости вниз функционалов $f^c_{u,r}$ существует некоторое точечное множество $\hat{\mathbf{c}}_r \in \mathbf{C}_r; r = 1,...,R$, при котором значение функционала достигает своей нижней грани

$$\left\{\hat{\mathbf{c}}_r : f^c_{u,r}(\hat{\mathbf{c}}_r) = \inf f^c_{u,r}(x), x \in \mathbf{C}_r\right\}.$$

В соответствии с принципом МНК данное множество (точку) удобно называть *локально оптимальным.* Из математического анализа известно, что на данном множестве функция обладает тем свойством, что ее первая производная равна нулю

$$\left.\frac{d}{d\mathbf{c}} f_{u,r}^{c}(\mathbf{c})\right|_{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}}_r} = 0 .$$

Далее вводится дельта–мера Дирака, сосредоточенная в точке $\hat{\mathbf{c}}_r$,

$$\delta_{\hat{\mathbf{c}}_r}(A) = \begin{cases} 1,\text{если} & \hat{\mathbf{c}}_r \in A \\ 0,\text{если} & \hat{\mathbf{c}}_r \notin A \end{cases}, \qquad A \in F^m .$$

Необходимо отметить, что интегрирование $\mathbf{C}^R$ может быть выполнено как по мере μ_r, так и по дельта–мере. С практической точки зрения представляет интерес интегрирование по второй из указанных мер. Тем не менее, мера μ_r будет использована ниже при доказательстве утверждения о возможности интегрирования пространства по дельта–мере с целью определения МНК–оптимальных решений.

Таким образом, можно считать, что на пространстве $\mathbf{C}^R$, а именно на произведении $C^m \times \mathbf{R}$, задана совокупность $F^m \times \Re$ –измеримых функционалов $\Phi_u(\mathbf{c}, r)$ двух переменных, сечение которой при каждом фиксированном r совпадает с соответствующей совокупностью $f_{u,r}^{c}$. В этом случае отображение $\mathbf{G} : \mathbf{U}^T \to \left(\mathbf{C}^R, F^m \times \Re, \delta_{\hat{\mathbf{c}}_r} \times \eta\right)$ удобно называть нерандомизированным *правилом локально оптимальных МНК–решений.* Действительно, каждый $\hat{\mathbf{c}}_r$ определяет некоторый вектор в пространстве $\mathbf{U}^T$, который оказывается МНК–оптимальным на некоторой i-й проекции из π_E. Некоторый вектор $\mathbf{w}^* \in \mathbf{C}_R$, координатами которого являются локально оптимальные точки, $\mathbf{w}^* = \{\hat{\mathbf{c}}_1, \hat{\mathbf{c}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{c}}_R\}$ может рассматриваться как случайный исход, соответствующий ω, т.е. как случайный процесс в фазовом пространстве $\mathbf{C}$, и может быть назван *вектором локально оптимальных МНК–решений или достаточной статистикой* (достаточность доказывается ниже).

Теперь, выполнив интегрирование $\mathbf{C}^R$ по координате r, определяется функция

$$g(\mathbf{c}, \mathbf{u}) = g(\mathbf{c}, \omega) = g_u(\mathbf{c}) = \int_{\mathbf{R}} \Phi_u(\mathbf{c}, r)\eta(dr) = \sum_{r=1}^{R} \Phi_u(\mathbf{c}, r)\eta_r = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} \Phi_u(\mathbf{c}, r).$$

Ясно, что введенная функция $g_u(\mathbf{c})$ оказывается F^m-измеримой и неотрицательной. Теперь может быть доказан следующий результат.

Утверждение 1. Координатный вектор $\bar{\mathbf{c}} = \{\bar{\mathbf{c}}_1, ..., \bar{\mathbf{c}}_R\}$, при котором функция $g_u(\mathbf{c})$ принимает свое среднее значение $\bar{g}_u(\bar{\mathbf{c}})$, задает вектор $\hat{\mathbf{v}}_{МНК}$ наилучшей аппроксимации $\mathbf{u}$, т.е. является оптимальным МНК–решением.

Доказательство. Из анализа известна теорема о том, что непрерывная функция, принимающая на концах области определения равные значения, достигает своего экстремального значения в некоторой точке. Такой функцией является квадратичная функция вида . При этом необходимым условием экстремума в этой точке является равенство нулю ее первой производной. Учитывая то, что оператор дифференцирования $D_c = \frac{d}{d\mathbf{c}}$ функции может быть внесен под знак суммирования, имеем

$$D_c g_u(\mathbf{c}) = \frac{1}{R} D_c \sum_{r=1}^{R} \Phi_u(\mathbf{c}, r) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} D_c \Phi_u(\mathbf{c}, r) = 0 .$$

Допустим, что существует точка $\bar{\mathbf{c}} = \{\bar{\mathbf{c}}_1, ..., \bar{\mathbf{c}}_R\}$, в которой достигается приведенное равенство, т.е.

$$D_c g_u(\mathbf{c})\Big|_{\mathbf{c}=\bar{\mathbf{c}}} = \frac{1}{R} D_c \sum_{r=1}^{R} \Phi_u(\mathbf{c}, r)\Bigg|_{\mathbf{c}=\bar{\mathbf{c}}} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} D_c \Phi(\mathbf{c}, r)\Bigg|_{\mathbf{c}=\bar{\mathbf{c}}} = 0 .$$

Необходимо показать, что выражение справедливо при

$$\bar{\mathbf{c}} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \hat{\mathbf{c}}_r .$$

Для этого введем постоянную величину, представляющую собой разность между средним и локально оптимальным координатным вектором

$$\Delta_r = \bar{\mathbf{c}}_r - \hat{\mathbf{c}}_r .$$

Ясно, что сумма по всем Δ_r равна нулю, так как после подстановки в

$$\frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \Delta_r = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \left(\bar{\mathbf{c}}_r - \hat{\mathbf{c}}_r \right) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \bar{\mathbf{c}}_r - \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \hat{\mathbf{c}}_r = \bar{\mathbf{c}} - \bar{\mathbf{c}} = 0 .$$

Из с учетом имеем

$$\bar{\mathbf{c}} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \left(\hat{\mathbf{c}}_r + \Delta_r \right)$$

С учетом линейности операций суммирования и дифференцирования, а также , выражение может быть переписано в виде

$$\sum_{r=1}^{R} D_c f_{u,r}^{c}(\mathbf{c})\Big|_{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}}_r + \Delta_r} = 0$$

или

$$\sum_{r=1}^{R} D_{\hat{c}_r} f_{u,r}^c \left(\hat{\mathbf{c}}_r + \Delta_r \right) = 0 .$$

После подстановки функции $f_{u,r}^c$ из имеем

$$\sum_{r=1}^{R} D_{\hat{c}_r} f^c \left(\hat{\mathbf{c}}_r + \Delta_r , r \right) = \sum_{r=1}^{R} D_{\hat{c}_r} \left\| \hat{\mathbf{c}}_r + \Delta_r \right\|^2 = \sum_{r=1}^{R} D_{\hat{c}_r} \left[\left\| \hat{\mathbf{c}}_r \right\|^2 + \left\| \Delta_r \right\|^2 + 2 \left(\hat{\mathbf{c}}_r , \Delta_r \right) \right].$$

Применив оператор дифференцирования к слагаемым в правой части , получаем

$$\sum_{r=1}^{R} D_{\hat{c}_r} \left[\left\| \hat{\mathbf{c}}_r \right\|^2 + \left\| \Delta_r \right\|^2 - 2 \left(\hat{\mathbf{c}}_r , \Delta_r \right) \right] = \sum_{r=1}^{R} D_{\hat{c}_r} \left\| \hat{\mathbf{c}}_r \right\|^2 + 2 \sum_{r=1}^{R} \Delta_r .$$

Последнее слагаемое в правой части, следуя , равно нулю. Первое же слагаемое представляет собой действие оператора дифференцирования на функцию $f_{u,r}^c \left(\mathbf{c} \right)$ в точке $\hat{\mathbf{c}}_r$, результат которого по определению равен нулю. Теперь может быть записано выражение

$$\sum_{r=1}^{R} D_{\hat{c}_r} \left\| \hat{\mathbf{c}}_r \right\|^2 = \sum_{r=1}^{R} D_c f_{u,r}^c \left(\mathbf{c} \right) |_{\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}_r} = 0 ,$$

которое доказывает справедливость , а, следовательно, и сформулированное утверждение.

Необходимо отметить, что вспомогательное пространство (локально оптимальных решений) $\mathbf{C}^R$ может рассматриваться не только как прямое произведение вида $C^m \times \mathbf{R}$, но также как прямое произведение вида $\left(C \times \mathbf{R} \right)^m$. Распишем подробно соотношение, связывающее пространство координатных векторов и m-мерную проекцию пространства наблюдений $\pi_i \mathbf{u} = \pi_i \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$, следуя

$$\begin{aligned} & u_1 = \pi_i \mathbf{v}_{b1,1} \cdot c_1 + \pi_i \mathbf{v}_{b1,2} \cdot c_2 + \ldots + \pi_i \mathbf{v}_{b1,m} \cdot c_m , \\ & u_2 = \pi_i \mathbf{v}_{b2,1} \cdot c_1 + \pi_i \mathbf{v}_{b2,2} \cdot c_2 + \ldots + \pi_i \mathbf{v}_{b2,m} \cdot c_m , \\ & \ldots \\ & u_m = \pi_i \mathbf{v}_{bm,1} \cdot c_1 + \pi_i \mathbf{v}_{bm,2} \cdot c_2 + \ldots + \pi_i \mathbf{v}_{bm,m} \cdot c_m ; \\ & \pi_i \mathbf{u} = \left\{ u_1 , \ldots , u_m \right\} ; \mathbf{c} = \left\{ c_1 , \ldots , c_m \right\} . \end{aligned}$$

Зафиксируем в этой записи произвольный элемент координатного вектора, например c_1. Тогда вектор $\pi_i \mathbf{B}_1 = \left\{ \pi_i \mathbf{v}_{b1,1} , \pi_i \mathbf{v}_{b2,1} , \ldots , \pi_i \mathbf{v}_{bm,1} \right\}$, составленный из коэффициентов, стоящих при c_1 может трактоваться как линейный оператор, а запись представляется в виде

$$\pi_i \mathbf{u} = \pi_i \mathbf{B}_1 \Theta c_1 + \quad ,$$

где $\mathbf{\Theta}$ - матрица, составленная из оставшихся слагаемых в правой части . Действительно,

$$\pi_i \mathbf{u}_1 + \pi_i \mathbf{u}_2 = \pi_i \mathbf{B}_1 \mathbf{\Theta} c_1^{(1)} + \mathbf{B}^{(1)} + \pi_i \quad {}_1 \mathbf{\Theta} c_1^{(2)} + \mathbf{B}^{(2)} = \pi_i \quad {}_1 \cdot \left(c_1^{(1)} + \mathbf{\Theta}_1^{(2)} \right) + \quad ',$$

$$\alpha \pi_i \mathbf{u}_1 = \alpha \pi_i \mathbf{B}_1 \mathbf{\Theta} c_1 + \mathbf{B} = \pi_i \quad {}_1 \cdot \mathbf{\Theta} c_1 + \quad ,$$

$$\alpha \in ¡^{1}.$$

Таким образом, доказанное выше утверждение может быть применено к каждой компоненте $C \times \Re$ пространства $\mathbf{C}^R$ по отдельности. Такое построение означает, что, так как координатный вектор рассматривается как состоящий из m элементов, то среднее вычисляется для каждого элемента независимо. Тогда результат МНК–оценки будет представлять собой вектор, все элементы которого есть средние значения, т.е. $\hat{\mathbf{c}}_{МНК} = \{\overline{c}_1, \overline{c}_2, ..., \overline{c}_m\}$. Следовательно, доказано

Утверждение 2. Координатный вектор $\hat{\mathbf{c}} = \{\overline{c}_1, ..., \overline{c}_m\}$, составленный из средних значений соответствующих функций $g_u(c_i)$, задает вектор $\hat{\mathbf{v}}_{МНК}$ наилучшей аппроксимации $\mathbf{u}$, т.е. является оптимальным МНК–решением.

Конечное множество линейных сигналов.

Полученные выше результаты могут быть перенесены на случай конечного пространства исходных сигналов $\mathbf{V}$. Допустим, что векторное линейное m–мерное пространство $\mathbf{V}$ задано над произвольным конечным полем коэффициентов C, состоит из конечного числа элементов и порождено системой линейно независимых базисных векторов $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_{b1}, \mathbf{v}_{b2}, ..., \mathbf{v}_{bm}\}$. Как и выше отображение $\mathbf{H} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}_V \subset \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ выделяет в T-мерном евклидовом пространстве наблюдений некоторое подмножество.

В этом случае, совершенно аналогично может быть построено вспомогательное пространство локально оптимальных решений $\mathbf{C}^R = \left(C^m\right) \times \mathbf{R}$. При этом функция $f_{u,r}^c$ теперь имеет конечный носитель C^m и задается также как и выше, т.е. каждое значение функции равно квадрату нормы разности между принятым вектором и образом (по оператору $\mathbf{B}$) ее аргумента. Локальное решающее правило $\mathbf{G}$ приписывает меру μ_r нуль множествам, на которых функция $f_{u,r}^c$ не принимает экстремального (минимального) значения, а на экстремальном множестве – единицу. Очевидно, в данном случае мера μ_r является мерой Дирака.

$$v_r(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1, \text{если} & \mathbf{c} \in \left\{ \hat{\mathbf{c}}_r \quad f_{u,r}^c(\hat{\mathbf{c}}_r) = \min \right\} \\ 0, \text{если} & \mathbf{c} \notin \left\{ \hat{\mathbf{c}}_r \quad f_{u,r}^c(\hat{\mathbf{c}}_r) = \min \right\} \end{cases}.$$

Далее, как и выше определяется интеграл Бохнера по множеству $\mathbf{R}$ от двумерной функции $\Phi_u(\mathbf{c}, r)$, образованной совокупностью одномерных функций $f_{u,r}^c$. Таким образом, в результате интегрирования имеем функцию $g_u(\mathbf{c})$. Однако для дальнейшего будет представлять интерес лишь функция $\tilde{g}_u(\mathbf{c})$ с ограниченным носителем, т.е. функция $g_u(\mathbf{c})$, но вычисленная лишь для множества локально оптимальных точек $\hat{\mathbf{c}} \in \{\hat{\mathbf{c}}_1, \hat{\mathbf{c}}_2, ..., \hat{\mathbf{c}}_R\}$. В остальных точках условно может быть принято равенство функции бесконечности, хотя это не играет особой роли, так как эти точки рассматриваться не будут. Формально это может быть записано в виде

$$\tilde{g}_u(\mathbf{c}) = \begin{cases} g(\mathbf{c}), \text{если} & \mathbf{c} \in \{\hat{\mathbf{c}}_1, \hat{\mathbf{c}}_2, ..., \hat{\mathbf{c}}_R\} \\ \infty, \text{если} & \mathbf{c} \notin \{\hat{\mathbf{c}}_1, \hat{\mathbf{c}}_2, ..., \hat{\mathbf{c}}_R\} \end{cases}$$

Утверждение 3. Пусть $T >> m$ (случай, когда T соизмеримо с m должен рассматриваться отдельно). Функция $\tilde{g}_u(\mathbf{c})$ является достаточной статистикой для МНК–оценивания зашумленных линейных сигналов.

Доказательство. Для того, чтобы доказать утверждение, достаточно показать, что для произвольных двух векторов $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbf{C}$ и для произвольного $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^T$ всегда выполняются следующие соотношения

$$\begin{cases} \tilde{g}_u(\mathbf{c}_1) > \tilde{g}_u(\mathbf{c}_2), \text{если} & \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}\|^2 < \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}\|^2 \\ \tilde{g}_u(\mathbf{c}_1) \le \tilde{g}_u(\mathbf{c}_2), \text{если} & \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}\|^2 \ge \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}\|^2 \end{cases}.$$

Рассмотрим отдельно случай, когда

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}\|^2 < \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}\|^2.$$

В силу известного в анализе *неравенства треугольника*, справедливого в евклидовом пространстве, имеем

$$\rho_u(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) \le \rho_u(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + \rho_u(\mathbf{u}_2, \mathbf{u})$$

Обозначим вектора разностей

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}\,. \\ \mathbf{z} &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

Из следует

$$\|\mathbf{r}_1\| \le \|\mathbf{z}\| + \|\mathbf{r}_2\|.$$

Пусть $\pi^k \mathbf{u}$ обозначает некоторую k-мерную проекцию вектора $\mathbf{u}$ относительно единичного базиса. Разложим вектор $\mathbf{r}_1$ на два ортогональных вектора

$$\mathbf{r}_1 = \pi^{k1}\mathbf{r}_1 + \pi^{k2}\mathbf{r}_1$$

так, чтобы выполнялось следующее соотношение

$$\begin{aligned} \|\pi^{k1}\mathbf{r}_1\| &< \|\pi^{k1}\mathbf{z}\| \\ \|\pi^{k2}\mathbf{r}_1\| &\ge \|\pi^{k2}\mathbf{z}\|. \end{aligned}$$

При этом $k_1 + k_2 = T$, а множества $\pi^{k1}\mathbf{r}_1$ и $\pi^{k2}\mathbf{r}_1$ имеют непустое пересечение. Размерность пересечения $\dim \pi^{k1}\mathbf{r}_1 \cap \pi^{k2}\mathbf{r}_1 < m$ не может превышать m. Это следует из линейности пространства исходных сигналов.

Из условия может быть записано

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_1\| &< \|\mathbf{z}\| = \|\pi^{k1}\mathbf{r}_1\| + \|\pi^{k2}\mathbf{r}_1\| \\ \|\mathbf{r}_2\| &\ge \|\mathbf{z}\| = \|\pi^{k1}\mathbf{r}_2\| + \|\pi^{k2}\mathbf{r}_2\| \end{aligned}.$$

Теперь также могут быть записаны системы неравенств, при соблюдении которых выполняется условие

$$\begin{cases} \|\pi^{k2}\mathbf{r}_1\| = \|\pi^{k2}\mathbf{z}\| + \tilde{\mathbf{o}}_1 \ge \|\pi^{k2}\mathbf{z}\| \\ \|\pi^{k1}\mathbf{r}_1\| = \mathbf{o}_1 < \|\pi^{k1}\mathbf{z}\| - \tilde{\mathbf{o}}_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\pi^{k2}\mathbf{r}_2\| = \mathbf{o}_2 = \|\pi^{k2}\mathbf{z}\| - \tilde{\mathbf{o}}_2 < \|\pi^{k2}\mathbf{z}\| \\ \|\pi^{k1}\mathbf{r}_2\| = \|\pi^{k1}\mathbf{z}\| + \tilde{\mathbf{o}}_2 > \|\pi^{k1}\mathbf{z}\|, \end{cases}$$

где введены дополнительные обозначения. Отсюда может быть записано

$$\begin{cases} \mathbf{o}_1 + \tilde{\mathbf{o}}_1 < \|\pi^{k1}\mathbf{z}\| \\ \mathbf{o}_2 + \tilde{\mathbf{o}}_2 \ge \|\pi^{k2}\mathbf{z}\| \end{cases}$$

и далее

$$\mathbf{o}_1 + \tilde{\mathbf{o}}_1 + \|\pi^{k2}\mathbf{z}\| < \mathbf{o}_2 + \tilde{\mathbf{o}}_2 + \|\pi^{k1}\mathbf{z}\|.$$

Из и непосредственно следуют равенства

$$\mathbf{o}_1 = \tilde{\mathbf{o}}_2,$$
$$\mathbf{o}_2 = \tilde{\mathbf{o}}_1.$$

и, следовательно,

$$\left\| \pi^{k2} \mathbf{z} \right\| < \left\| \pi^{k1} \mathbf{z} \right\|.$$

После вычисления интеграла по соответствующим множествам

$$\tilde{g}_u(\mathbf{c}_1) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} f_{u,r}^c(\mathbf{c}_1) \mu_r(\mathbf{c}_1) = \frac{1}{k1} \sum_{r=1}^{k1} f_{u,r}^c(\mathbf{c}_1) \mu_r(\mathbf{c}_1) + \frac{1}{k2} \sum_{r=1}^{k2} f_{u,r}^c(\mathbf{c}_1) \mu_r(\mathbf{c}_1) =$$
$$= \frac{1}{k1} \sum_{r=1}^{k_1} f_{u,r}^c(\mathbf{c}_1) \mu_r(\mathbf{c}_1) = \frac{1}{k1} C_{k1}^m,$$
$$\tilde{g}_u(\mathbf{c}_2) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} f_{u,r}^c(\mathbf{c}_2) \mu_r(\mathbf{c}_2) = \frac{1}{k1} \sum_{r=1}^{k1} f_{u,r}^c(\mathbf{c}_2) \mu_r(\mathbf{c}_2) + \frac{1}{k2} \sum_{r=1}^{k2} f_{u,r}^c(\mathbf{c}_2) \mu_r(\mathbf{c}_2) =$$
$$= \frac{1}{k2} \sum_{r=1}^{k2} f_{u,r}^c(\mathbf{c}_1) \mu_r(\mathbf{c}_1) = \frac{1}{k2} C_{k2}^m,$$
$$\tilde{g}_u(\mathbf{c}_1) > \tilde{g}_u(\mathbf{c}_2),$$

что и доказывает утверждение.

Следствие 1. Вектор $\hat{\mathbf{v}}$, задаваемый координатным вектором $\hat{\mathbf{c}}$ и при котором функция $\tilde{g}_u(\mathbf{c})$ принимает максимальное значение, является вектором наилучшей МНК–аппроксимации, т.е. оптимальной МНК–оценкой.

Следствие 2. В силу указанных выше свойств МНК–оценок функция $\tilde{g}_u(\mathbf{c})$ также является достаточной статистикой для оценки по критерию максимума функции правдоподобия в случае, когда канал связи может быть описан моделью аддитивного шума с независимыми значениями.

Заключение.

Данная работа направлена на восполнение существующего пробела в теории оценивания дискретных сигналов. Особенностью поставленной задачи является различие в конструкции пространств, в которых заданы исходные дискретные сигналы и выборки наблюдений. При этом другой важной особенностью задачи является отсутствие каких-либо априорных сведений об операторе отображения одного пространства в другое, характеризующего случайную помеху в канале связи. Было установлено, что в таких условиях решение задачи может быть получено лишь с помощью нестатистических аппроксимационных методов. Вследствие этого в качестве критерия оптимальности был выбран аппрокимационный метод наименьших квадратов.

Для того, чтобы поставленная задача имела решение были предъявлены ограничивающие требования на класс исходных сигналов, заключающиеся в линейности пространства, в которых они описываются. Однако из практических соображений это ограничение не является существенным, так как подавляющее большинство используемых в приложениях цифровой радиосвязи и смежных науках сигналов принадлежат указанному классу.

Далее при анализе общей схемы аппроксимации было установлено, что возможны два варианта решения задачи, зависящие от характера вхождения исходных сигналов в пространство наблюдений при отсутствии случайной помехи. Возможен вариант, когда исходное пространство сигналов оказывается подпространством пространства наблюдений и вариант, когда – подмножеством. Указанный факт является существенным при решении поставленной задачи; если первый случай исследован достаточно подробно в литературе, то второй – недостаточно.

Таким образом, задавшись априорной информацией и методом оценивания, было найдено решение поставленной задачи, заключающееся в формировании достаточных и минимальных статистик от наблюдений. При этом была также найдена процедура оценивания по полученным статистикам, дающая в итоге оптимальное по методу наименьших квадратов решение. Были рассмотрены два случая несчетного и конечного множества исходных линейных сигналов. Полученные результаты сформулированы и доказаны в виде утверждений.

Найденное решение поставленной задачи имеет важное прикладное значение. Действительно, в работе указан общий подход к решению большинства вопросов, связанных с оценкой линейных сигналов, например, таких, как декодирование линейных блоковых и древовидных (сверточных) кодов, с оценкой задержки псевдослучайных последовательностей и т.п. Более того, найденное решение позволяет конструктивно понять структуру построения оптимальных и квазиоптимальных решающих правил. Например, построение последовательного во времени квазиоптимального решающего правила заключается в соответствующем выборе упорядоченной совокупности проекций π_E, которая теперь будет иметь мощность, равную $R = T - m + 1$. Ясно, что оценка по полученной в этом случае минимальной достаточной статистике $g(\mathbf{u})$ будет отличаться от оптимальной, но, тем не менее, с аналитической точки зрения появляется возможность оценивать степень отклонения квазиоптимальной оценки от оптимальной и ее асимптотические свойства. Более того, таким образом, намечен непосредственный путь к построению адаптивных алгоритмов. Необходимо также отметить, что при выборе соответствующих критериев вид функции $g(\mathbf{u})$ удобен для успешного решения других задач, например, таких, как *обнаружение* полезного сигнала и *многоальтернативное обнаружение*. При этом в дальнейшем представляет значительный интерес исследование метода в условиях частичной или полной априорной информативности о канале связи.

Литература.

1. *Лихарев В.А. Цифровые методы и устройства в радиолокации. - М.: Советское радио, 1973. - 456с.*
2. *Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. - М.: Радио и связь, 1991. - 608с.*
3. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. – М.: Советское радио, 1977. -432с.*
4. *Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. – М.: Советское радио, 1978. - 320с.*
5. *Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 632с.*
6. *Муттер В.М. Основы помехоустойчивой телепередачи информации. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. - 288с.*
7. *Теряев Е.Д., Шамриков Б.М. Цифровые системы и поэтапное адаптивное управление. - М.: Наука, 1999. - 330с.*
8. *Пугачев В.С. Лекции по функциональному анализу. - М.: МАИ, 1996. - 744с.*

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Чикин Алексей Викторович, аспирант кафедры радиосистем передачи информации и управления Московского авиационного института (государственного технического университета) e-mail: avchikin@mail.ru.