

УДК: 536.24: 621.396:621.362

Моделирование сложных тепловых процессов в электронных системах методом обобщенного псевдорешения*

А.Г. Мадера

*Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук (НИИСИ РАН), Москва, 117218, Россия
e-mail: agtprof@mail.ru*

Поступила в редакцию 29.06.2019

После доработки 16.07.2019

Принята к публикации 16.07.2019

Предлагается метод математического моделирования нелинейных, стохастических тепловых процессов в электронных системах. Моделирование основано на обобщенном псевдорешении, методе анализа стохастических температурных распределений полями статистических мер и разложении стохастической нелинейной матрицы математической модели на произведение двух матриц той же размерности, одна из которых зависит только от температуры, а другая – только от стохастических факторов. Разработанный метод позволяет найти уравнения, определяющие статистические меры нелинейных стохастических распределений температуры. Сравнение результатов, полученных по данному методу и методу Монте-Карло, показало достаточно высокую степень адекватности моделирования. Применение метода к проектированию реальных систем показало его эффективность для инженерной практики.

Ключевые слова: обобщенное решение, псевдообратная матрица, тепловые процессы, электронная система, нелинейный, стохастический, математическая модель.

Введение

Проектирование конкурентоспособных электронных систем опирается на высокоадекватные эффективные методы математического и компьютерного моделирования сложных тепловых процессов, возникающих при функционировании электронных систем как в режиме их эксплуатации, так и испытаний. В силу нелинейного и стохастического характера сложных тепловых процессов, протекающих в реальных электронных системах, создаваемые для их моделирования методы и модели должны для соот-

ветствия требованиям, предъявляемым к уровню их адекватности, учитывать основные физические эффекты, приводящие к нелинейностям и стохастичности тепловых процессов [1–3].

Нелинейный характер тепловых процессов в электронных системах обуславливается нелинейными зависимостями факторов теплообмена от температуры и тепловой обратной связью, вызванной значительной зависимостью мощностей потребления электронных компонентов электронных систем (интегральных микросхем, электрорадиоэлементов) от температуры [2–5].

Стохастический характер тепловых процессов в электронных системах обуславливается как внутренними системными факторами, так и внешними факторами, возникающими при их функционировании и взаимодействии с окружающей средой [1, 6–9]. Стохастический характер внутренних системных факторов вызван

* Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (выполнение фундаментальных научных исследований ГП 14) по теме № 0065-2019-0001 «Математическое обеспечение и инструментальные средства для моделирования, проектирования и разработки элементов сложных технических систем, программных комплексов и телекоммуникационных сетей в различных проблемно-ориентированных областях» (АААА-А19-119011790077-1).

статистическим технологическим разбросом тепловых и электрических параметров электронных компонентов, возникающим как при их изготовлении, так и сборке и монтаже в электронных системах. Стохастичность внешних факторов обуславливается стохастическими величинами мощностей потребления электронных компонентов и параметров окружающей среды (температуры среды, давления, влажности, скорости потока жидкостной или воздушной среды).

Существующие в литературных источниках методы моделирования тепловых процессов учитывают, как правило, либо нелинейность в приближении отсутствия стохастичности, либо нелинейность и стохастичность, но лишь при воздействии внешних стохастических факторов [1, 6, 10–13]. В то же время работы, посвященные одновременно анализу и моделированию нелинейных интервально-стохастических тепловых процессов, причем при воздействии как внешних, так и внутренних стохастических факторов, практически отсутствуют. Так, приведенные в работах [1, 3, 14–16] методы, такие, например, как методы стохастической функции Грина, стохастического оператора и стохастической обратной матрицы, методы возмущений, разложения нелинейностей в ряд Тейлора, Монте-Карло, хотя и позволяют анализировать стохастические процессы при воздействии как внешних, так и внутренних стохастических факторов, применимы, однако, либо для простых, одномерных систем (патологических и не представляющих интереса, как сказано в [14]), либо требуют значительных компьютерных затрат для достижения приемлемой точности.

В настоящей работе разработан метод математического моделирования установившихся тепловых процессов в электронной системе, позволяющий моделировать нелинейные интервально-стохастические тепловые процессы при воздействии внешних и внутренних стохастических факторов. Метод основывается на обобщенном решении в форме концепции нормального псевдорешения и псевдообратной матрицы [17–19], методе анализа стохастических процессов посредством статистических мер [1, 20, 21], разложении матрицы тепловых проводимостей тепловой модели электронной системы на произведение двух матриц, одна из которых является детерминированной и нелиней-

но зависящей от температуры, а другая – стохастической и от температуры независящей, и методе линеаризации нелинейностей разложением в ряд Тейлора [1, 21]. Применение разработанного метода к реальной конструкции электронной системы, содержащей многослойную печатную плату и установленные на ней микросхемы, показало эффективность метода, малые затраты машинного времени и памяти и достаточную для практики теплового проектирования электронной системы погрешность расчета, не превышающую 6%.

1. Стохастическая нелинейная математическая модель

Тепловая модель электронной системы, представленная системой N изотермических элементов [1–3, 16, 21], представляет собой направленный граф, содержащий $N+1$ узел (узлы от 1 до $N-1$ моделируют элементы электронной системы, узел N – моделирует корпус системы, узел $N+1$ – среду внутри системы), M ветвей, $N-1$ независимых источников тепловых потоков ($\Phi_i, i = 1, 2, \dots, N-1$) и два узла, моделирующие *априори* известные температуры окружающей среды T_e .

Стохастическая математическая модель, описывающая стационарные нелинейные стохастические тепловые процессы в тепловой модели электронной системы для каждого элементарного события $\omega \in \Omega$ из пространства элементарных событий Ω , является системой матричных уравнений относительно неизвестного вектора стохастических температур $T(\omega)$ в узлах графа тепловой модели электронной системы [1, 2, 16, 21]:

$$AG(T, \omega)A^T \cdot T(\omega) = \Phi(\omega), \omega \in \Omega, \quad (1)$$

где $T(\omega) = (T_1(\omega), T_2(\omega), \dots, T_{N+1}(\omega))^T$ – $(N+1)$ -вектор стохастических температур в узлах графа тепловой модели (каждая температура $T_i(\omega)$ в i -м узле графа равна превышению температуры i -го элемента электронной системы над температурой среды $T_e(\omega)$ с известными математическим ожиданием \bar{T}_e и дисперсией D_{T_e}); A – $(N+1) \times M$ -матрица инцидентий графа тепловой модели;

$G(T, \omega) = \text{diag}(g_1(T, \omega), g_2(T, \omega), \dots, g_M(T, \omega))$ – диагональная нелинейная стохастическая $(M \times M)$ -матрица; $g_k(T, \omega), k = 1, 2, \dots, M$ –

стохастические, зависящие от температуры тепловые проводимости ветвей графа тепловой модели;

$\Phi(\omega) = (\Phi_1(\omega), \Phi_2(\omega), \dots, \Phi_{N-1}(\omega), 0, 0)^T$ – $(N+1)$ -вектор стохастических мощностей потребления $\Phi_i(T_i, \omega)$ электронных компонентов электронной системы (интегральных микросхем и электро-радиоэлементов); $\{\Omega, U, P\}$ – вероятностное пространство, U – σ -алгебра подмножеств пространства элементарных событий Ω , P – вероятность на U [21]; $(*)^T$ – операция транспонирования.

2. Решение стохастического уравнения тепловых процессов

Излагаемый в настоящей работе метод, позволяющий находить решение стохастического нелинейного, зависящего от искомого вектора температур уравнения (1), основан на следующих составляющих:

- концепции псевдорешения и псевдообратной матрицы [17–19];
- методе анализа стохастических процессов статистическими мерами [1, 20, 21];
- разложении матрицы тепловых проводимостей $G(T, \omega)$ тепловой модели электронной системы на произведение двух матриц, одна из которых является детерминированной $G(T)$ и нелинейно зависящей от температуры, а другая $G(\omega)$ – стохастической и от температуры независящей;
- методе линеаризации нелинейностей посредством разложения в ряд Тейлора.

Для получения решения нелинейного стохастического уравнения (1) приведем последовательно указанные методы и подходы.

2.1. Концепция псевдорешения и псевдообратной матрицы

Понятия псевдообратной матрицы и обобщенного псевдорешения введены впервые Муром [22] и позднее развиты Пенроузом [17].

Как известно, матричное уравнение $HX = Y$ с невырожденной квадратной $(N \times M)$ -матрицей системы H , искомым вектором X и известным вектором Y в правой части имеет единственное решение $X = H^{-1}Y$, где H^{-1} – обратная матрица. Если матрица H является вырожденной или прямоугольной $(N \times M)$ -мат-

рицей, ранг которой $r_H = \min\{N, M\}$, то система уравнений $HX = Y$ решений не имеет. Вместе с тем, можно поставить вопрос нахождения решения X системы уравнений $HX = Y$ с вырожденной $(N \times M)$ -матрицей $H = (h_{ij})_{i=1, N}^{j=1, M}$, если в качестве решения X принять вектор X_0 , минимизирующий квадрат нормы невязки между левой и правой частями исходного уравнения, а именно

$$\|Y - HX\|^2 = \sum_{i=1}^N \left(y_i - \sum_{j=1}^M h_{ij} x_j \right)^2.$$

В работах [17–19] доказывается, что решение X_0 , доставляющее минимальное значение норме $\|Y - HX\|^2$, является единственным и при этом решение X_0 имеет наименьшую длину $\|X_0\|^2$ среди любых других векторов X . Решение X_0 уравнения $HX = Y$ с вырожденной матрицей H , понимаемое в смысле евклидовой нормы l_2 [19], называется псевдорешением.

Для практического нахождения псевдорешения X_0 матричного уравнения $HX = Y$ с вырожденной $(N \times M)$ -матрицей H используется концепция псевдообратной матрицы. А именно, как известно [18, 19], любую вырожденную прямоугольную $(N \times M)$ -матрицу H можно представить в виде так называемого скелетного разложения, т.е. в виде произведения $H = UV$ двух прямоугольных матриц U и V размерностями $N \times K$ и $K \times M$ и рангами $r_U = \min\{N, K\}$, $r_V = \min\{K, M\}$ соответственно. Тогда псевдообратная матрица H^+ , с помощью которой искомое псевдорешение X_0 определяется в виде $X_0 = H^+Y$, будет равна $H^+ = V^+U^+ = V^T(VV^T)^{-1}(U^TU)^{-1}U^T$ [18]. Отметим, что хотя скелетное разложение $H = UV$ вырожденной матрицы H может быть осуществлено бесчисленным множеством способов, псевдообратная матрица H^+ будет, тем не менее, единственной. Если же матрица H является квадратной и невырожденной, то ее обратная матрица H^{-1} совпадает с ее псевдообратной матрицей H^+ . Таким образом, псевдообратная матрица H^+ для вырожденной матрицы H является аналогом обратной матрицы H^{-1} в случае, если матрица H невырожденная.

Применим концепцию псевдорешения и псевдообратной матрицы к решению уравнения (1),

являющегося одновременно и стохастическим, и нелинейным. Однако перед этим приведем метод разложения диагональной нелинейной стохастической матрицы тепловых проводимостей (см. уравнение (1)) на произведение двух диагональных матриц, одна из которых является только стохастической и не зависит от температуры, а другая нелинейно зависит от температуры и является детерминированной.

2.2. Разложение матрицы тепловых проводимостей на произведение двух диагональных матриц

Для того чтобы осуществить разложение стохастической температурозависимой матрицы тепловых проводимостей $G(T, \omega)$, входящей в матричное уравнение (1), рассмотрим структуру тепловых проводимостей $g_k(T, \omega)$, $k = 1, 2, \dots, M$ в матрице $G(T, \omega)$ уравнения (1).

Тепловые потоки J_{ij} между элементами i и j с температурами T_i и T_j описываются законом [4, 16]

$$J_{ij}^{cond,conv,rad} = g_{ij}^{cond,conv,rad} (T_i - T_j),$$

в котором тепловая проводимость $g_{ij}^{cond,conv,rad}$ между двумя элементами или элементом и средой, обусловленная кондукцией, конвекцией и излучением, выражается в виде

$$g_{ij}^{cond,conv,rad} = \alpha_{ij}^{cond,conv,rad} S_{ij}.$$

Коэффициенты теплоотдачи $\alpha_{ij}^{cond,conv,rad}$, вообще говоря, зависят от температуры элементов i и j , являются стохастическими и могут быть представлены в следующем виде:

– для естественной конвекции

$$\alpha_{ij}^{conv} (T_i, T_j, \omega) = A_{ij}^{conv}(\omega) \cdot (T_i - T_j)^n;$$

– для теплообмена излучением

$$\alpha_{ij}^{rad} (T_i, T_j, \omega) = A_{ij}^{rad}(\omega) \cdot (T_i^4 - T_j^4) / (T_i - T_j);$$

– для кондуктивного теплообмена

$$\alpha_{ij}^{cond}(\omega) = \lambda_{ij}(\omega) / \delta_{ij}(\omega),$$

где $A_{ij}^{conv}(\omega)$, $A_{ij}^{rad}(\omega)$ – случайные величины; n – показатель степени в законе теплообмена; $\lambda_{ij}(\omega)$ и $\delta_{ij}(\omega)$ – случайные величины теплопроводности и толщины материала в слое контакта между элементами i и j [4, 16].

Таким образом, тепловые проводимости $g_k(T, \omega)$ в матрице $G(T, \omega)$, как правило, могут быть представлены в виде произведения двух

проводимостей $g_k(T, \omega) = g_{k,s}(\omega) \cdot g_{k,T}(T)$, $k = 1, 2, \dots, M$, одна из которых $g_{k,s}(\omega)$ является только стохастической, а другая $g_{k,T}(T)$ зависит только от температуры. Тогда и диагональная матрица проводимостей $G(T, \omega)$ может быть представлена в виде произведения двух диагональных матриц, одна из которых $G_s(\omega)$ является стохастической и не зависит от температуры, другая $G_T(T)$ нелинейно зависит только от температуры и является детерминированной, а именно

$$G(T, \omega) = G_s(\omega) \cdot G_T(T), \quad \omega \in \Omega. \quad (2)$$

Тогда матричное уравнение (1) запишется в следующем виде:

$$AG_s(\omega)G_T(T)A^T T(\omega) = \Phi(\omega), \quad \omega \in \Omega. \quad (3)$$

2.3. Разделение нелинейности и стохастичности в матричном уравнении математической модели

Решение уравнения (1), являющегося как стохастическим, так и нелинейным, наталкивается на непреодолимые трудности. Между тем, матрица $AG(T, \omega)A^T$ в (1) имеет специфическую структуру, а именно, матрица инцидентий A графа тепловой модели и ее транспонированная A^T матрица состоит только из элементов 0, 1, -1, а матрица тепловых проводимостей $G(T, \omega)$ является диагональной и, согласно (2), равна произведению двух диагональных матриц, одна из которых $G_s(\omega)$ является только стохастической, а другая $G_T(T)$ – детерминированной и зависящей только от искомого вектора температур. Тем самым уравнение (1) может быть записано в виде (3). Такая структура уравнения позволяет, как показывается ниже, воспользоваться для поиска решения стохастического нелинейного уравнения (3) концепцией псевдообратной матрицы (см. п. 2.1), при этом разложение (2) позволяет разделить между собой стохастические и температурозависимые матрицы системы.

Умножив обе части уравнения (3) слева на транспонированную матрицу инцидентий A^T , получим

$$A^T AG_s(\omega)G_T(T)A^T T(\omega) = A^T \Phi(\omega), \quad \omega \in \Omega. \quad (4)$$

Матрица $B = A^T A$ является квадратной и вырожденной, и для нее обратной матрицы не существует. Вместе с тем для решения уравнения (4) можно построить псевдообратную

матрицу B^+ и найти приближенное наилучшее решение уравнения (4), понимаемое в смысле псевдорешения (см. п. 2.1), т.е. решения, минимизирующего квадрат нормы $\|B^+ A^T \Phi(\omega) - G_s(\omega) G_T(T) A^T T(\omega)\|^2$ для каждого $\omega \in \Omega$.

Принимая во внимание, что в тепловых моделях реальных электронных систем количество узлов графа не превосходит количества ветвей, для матрицы инцидентий A выполняется условие $N+1 \leq M$, а для ранга r матрицы B – соотношение $r \leq M$. В силу этого произведение $A^T A$ является скелетным разложением матрицы $B = A^T A$. Поэтому для матрицы B существует ее единственная псевдообратная матрица B^+ и она определяется выражением (см. п. 2.1)

$$B^+ = A^T (A A^T)^{-1} (A A^T)^{-1} A. \quad (5)$$

Тогда уравнение (4), записанное через псевдообратную матрицу B^+ , примет вид:

$$G_s(\omega) G_T(T) A^T T(\omega) = B^+ A^T \Phi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (6)$$

а умножая уравнение (6) слева на обратную матрицу $G_s^{-1}(\omega)$, получим

$$G_T(T) A^T T(\omega) = G_s^{-1}(\omega) B^+ A^T \Phi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (7)$$

где $G_s^{-1}(\omega) = \text{diag}(g_{1,s}^{-1}(\omega), \dots, g_{M,s}^{-1}(\omega))$ – обратная диагональная стохастическая $(M \times M)$ -матрица для диагональной стохастической матрицы $G_s(\omega) = \text{diag}(g_{1,s}(T, \omega), \dots, g_{M,s}(T, \omega))$; $G_T(T) = \text{diag}(g_{1,T}(T), \dots, g_{M,T}(T))$ – диагональная $(M \times M)$ -матрица.

3. Получение уравнений для статистических мер стохастических температур электронных систем

Для решения нелинейного стохастического уравнения (7) применим метод анализа стохастических процессов с помощью определения уравнений для статистических мер и линеаризацию нелинейностей путем их разложения в ряд Тейлора с удержанием только линейных членов [1, 20].

3.1. Анализ стохастических процессов методом определения статистических мер

Любой стохастический процесс, как известно, полностью определяется своими законами распределения вероятностей всех порядков в любые моменты времени, однако их определение для столь сложных уравнений невозможно

[14, 20, 24]. Между тем для моделирования тепловых процессов в электронных системах знание законов распределения вероятностей и не требуется, поскольку с приемлемой для практики точностью достаточно уметь находить статистические меры стохастических температур $T_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots, N+1$, а именно:

– математические ожидания $\bar{T}_i = E\{T_i(\omega)\}$,

где $E\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания;

– дисперсии $D_{T_i} = E\left\{\left(T_i(\omega)\right)^2\right\}$, где

$T_i^0(\omega) = T_i(\omega) - \bar{T}_i(t)$ – центрированный стохастический перепад температуры с нулевым математическим ожиданием $E\left\{T_i^0(\omega)\right\} = 0$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma_{T_i} = \sqrt{D_{T_i}}$;

– ковариации $K_{T_i, T_j} = E\left\{T_i^0(\omega) T_j^0(\omega)\right\}$ между стохастическими температурами $T_i = T_i(\omega)$ и $T_j = T_j(\omega)$ элементов i и j ($i, j = 1, 2, \dots, N+1$) тепловой модели.

Статистические меры $\bar{T}_i, D_{T_i}, \sigma_{T_i}, K_{T_i, T_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, N+1$, в свою очередь, определяют интервалы $[T_{Bot,i}, T_{Up,i}]$, внутри которых будут находиться реальные значения температур при функционировании электронной системы. Отметим, что границы $T_{Bot,i}$ и $T_{Up,i}$ интервалов $[T_{Bot,i}, T_{Up,i}]$ определяются как $T_{Bot,i} = \bar{T}_i - \epsilon \cdot \sigma_{T_i}$ и $T_{Up,i} = \bar{T}_i + \epsilon \cdot \sigma_{T_i}$, где ϵ – коэффициент, значение которого оценивается согласно неравенству Чебышева:

$$P\left\{T_i^0(\omega) \leq \epsilon \cdot \sigma_{T_i}(t)\right\} \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2} \quad [20, 24].$$

Для определения искомым статистических мер стохастических температур электронной системы, а также интервалов их изменения, необходимо располагать уравнениями, описывающими статистические меры.

3.2. Линеаризация стохастического уравнения

Для получения уравнений относительно статистических мер линеаризуем нелинейную матрицу $G_T(T)$ в уравнении (7). Используя для линеаризации матрицы $G_T(T)$ метод разложения в ряд Тейлора с удержанием членов первого порядка малости [1, 20], получим уравнение

относительно стохастического центрированного вектора $\overset{0}{T}(\omega) = T(\omega) - \bar{T}$, а именно

$$G_T(\bar{T})A^T\bar{T} + V(\bar{T})\overset{0}{T}(\omega) = G_s^{-1}(\omega)B^+A^T\Phi(\omega), \omega \in \Omega, \quad (8)$$

где $\overset{0}{T}(\omega) = (\overset{0}{T}_1(\omega), \overset{0}{T}_2(\omega), \dots, \overset{0}{T}_{N+1}(\omega))^T$ – $(N+1)$ -вектор стохастических центрированных температур в узлах тепловой модели; $\bar{T} = (\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{N+1})^T$ – $(N+1)$ -вектор математических ожиданий температур в узлах тепловой модели; $G_T(\bar{T}) = \text{diag}(g_{1,T}(\bar{T}), g_{2,T}(\bar{T}), \dots, g_{M,T}(\bar{T}))$ – диагональная $(M \times M)$ -матрица с элементами, зависящими от математических ожиданий температур \bar{T} ; $V(\bar{T}) = (\partial J_i / \partial T_j)_{\bar{T}}$ – $M \times (N+1)$ -матрица Якоби, $i = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, N+1$, вычисленная при значениях \bar{T} ; $J = G_T(T)A^T T(\omega)$ – вектор тепловых потоков в ветвях графа тепловой модели электронной системы.

Вопросы, связанные с погрешностями и границами применимости метода линеаризации температурных нелинейностей в математической модели тепловых процессов электронных систем, подробно и детально рассмотрены в [1, 21].

3.3. Получение уравнений для статистических мер стохастических температур

Стохастическое уравнение (8) является линейным относительно вектора $T(\omega)$ и нелинейным относительно вектора \bar{T} . При этом правая часть уравнения (8) содержит только стохастические члены, а левая – только температурно-зависимые нелинейные члены. Это позволяет получить уравнения для статистических мер стохастического вектора температур, а именно, для вектора математических ожиданий \bar{T} и ковариационной матрицы K_{TT} .

Применив к уравнению (8) оператор математического ожидания и принимая во внимание статистическую независимость элементов стохастической матрицы $G_s^{-1}(\omega)$ и стохастического вектора $\Phi(\omega)$ между собой, получим

$$G_T(\bar{T})A^T\bar{T} = \bar{G}_s^{-1}B^+A^T\bar{\Phi}, \quad (9)$$

где $\bar{G}_s^{-1} = \text{diag}(\bar{g}_{1,s}^{-1}, \bar{g}_{2,s}^{-1}, \dots, \bar{g}_{M,s}^{-1})$ – обратная диагональная $(M \times M)$ -матрица математичес-

ких ожиданий стохастических тепловых проводимостей.

Уравнение (9) нелинейно относительно искомого вектора \bar{T} и его решение может быть найдено с помощью известных численных методов. В силу диагональности матрицы $G_T(\bar{T})$ обратная ей матрица $G_T^{-1}(\bar{T})$ также является диагональной и поэтому может быть определена в явном виде, т.е. $G_T^{-1}(\bar{T}) = \text{diag}(g_{1,T}^{-1}(\bar{T}), g_{2,T}^{-1}(\bar{T}), \dots, g_{M,T}^{-1}(\bar{T}))$, где тепловые проводимости зависят от математического ожидания стохастической температуры.

Выражение для ковариационной матрицы $K_{TT} = E\{\overset{0}{T}(\omega)\overset{0}{T}^T(\omega)\}$ после несложных преобразований будет иметь вид:

$$K_{TT} = (AV(\bar{T}))^{-1}K_{WW}(V^T(\bar{T})A^T)^{-1}, \quad (10)$$

где $K_{WW} = E\{\overset{0}{W}(\omega)\overset{0}{W}^T(\omega)\}$ – ковариационная $(N+1) \times (N+1)$ -матрица стохастического вектора $\overset{0}{W}(\omega) = G_s^{-1}(\omega)B^+A^T\Phi(\omega) - \bar{G}_s^{-1}B^+A^T\bar{\Phi}$; $V(\bar{T})$ – матрица Якоби, рассмотренная в п. 3.2.

Решение уравнения (9) и вычисление выражения (10) определяют математические ожидания \bar{T}_i , дисперсии D_{Ti} и среднеквадратические отклонения $\sigma_{Ti} = \sqrt{D_{Ti}}$ стохастических температур $T_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots, N+1$, по которым затем рассчитываются интервалы $[T_{Bot,i}, T_{Up,i}] = [\bar{T}_i - \epsilon \cdot \sigma_{Ti}, \bar{T}_i + \epsilon \cdot \sigma_{Ti}]$ изменения реальных значений температур элементов электронной системы.

Для того чтобы определить значения статистических мер температур в узлах графа при различных температурах среды $T_e(\omega)$, достаточно к найденному математическому ожиданию температуры \bar{T}_i прибавить математическое ожидание температуры среды \bar{T}_e , а к дисперсии D_{Ti} – дисперсию температуры среды D_{T_e} .

4. Пример применения

Рассмотрим конструкцию электронной системы (ЭС) (рис. 1, а), представляющую собой электронный модуль (ЭМ), включающий в себя многослойную печатную плату (МПП) и припаянные к ней микросхемы (МС) различных типов в различных корпусах. Внешние и внутренние факторы, определяющие тепловой режим

ЭМ, являются интервально-стохастическими. Процессы теплообмена в рассматриваемой ЭС моделируются графом тепловой модели с 9 узлами и 18 ветвями, интервально-стохастическими факторами являются ($\omega \in \Omega$):

- мощность потребления i -й МС, ($i = 1, 2, 3$), $\Phi_i(\omega) \in [\Phi_{Bot,i}, \Phi_{Up,i}]$, где $\Phi_{Bot,i}$ и $\Phi_{Up,i}$ – нижняя и верхняя границы интервала разброса мощности потребления $\Phi_i(\omega)$;

- тепловое сопротивление корпуса i -й МС ($i = 1, 2, 3$) $R_{jc,i}(\omega) \in [R_{Bot,jc,i}, R_{Up,jc,i}]$, где $R_{Bot,jc,i}$ и $R_{Up,jc,i}$ – нижняя и верхняя границы интервала разброса теплового сопротивления корпуса МС $R_{jc,i}(\omega)$;

- тепловое сопротивление воздушного зазора $R_{g,i}(\omega) \in [R_{Bot,g,i}, \Phi_{Up,g,i}]$ между корпусом i -й МС ($i = 1, 2, 3$) и МПП, где $R_{Bot,g,i}$ и $R_{Up,g,i}$ – нижняя и верхняя границы интервала разброса теплового сопротивления зазора между корпусом МС и МПП $R_{g,i}(\omega)$;

- температура окружающей среды $T_e(\omega) \in [T_{Bot,e}, T_{Up,e}]$, где $T_{Bot,e}$ и $T_{Up,e}$ – нижняя и верхняя границы интервала разброса температуры окружающей среды $T_e(\omega)$.

Детерминированными факторами, определяющими тепловой режим ЭМ, являются:

- тепловое сопротивление от теплоотдающей поверхности корпуса i -й МС ($i = 1, 2, 3$) в среду $R_{ca,i}$;

- тепловое сопротивление выводов корпуса $R_{L,i}$ i -й МС ($i = 1, 2, 3$), припаянных к МПП;

- тепловое сопротивление кондукции по конструкции МПП между всеми МС $R_{PCB,i-j}$ ($i, j = 1, 2, 3$);

- тепловое сопротивление конвективного теплообмена между внешней поверхностью МПП в области размещения i -й МС ($i = 1, 2, 3$) и окружающей средой $R_{PCB-a,i}$.

Тепловые проводимости $g_{ca,i}(T) = R_{ca,i}^{-1}(T)$ и $g_{PCB-a,i}(T) = R_{PCB-a,i}^{-1}(T)$ в ветвях графа тепловой модели обусловлены естественной конвекцией поверхностей корпуса i -й МС ($g_{ca,i}$) и МПП ($g_{PCB-a,i}$) с окружающей средой, по-

этому являются температурозависимыми и равными $g_{ca,i}(T) = A_{ca,i} S_{ca,i} (T_{ca,i})^n$, $g_{PCB-a,i}(T) = A_{PCB-a,i} S_{PCB-a,i} (T_{ca,i})^n$, где $A_{ca,i}$, $A_{PCB-a,i}$ – коэффициенты, определяемые средой, с которой осуществляется конвективный теплообмен; $S_{ca,i}$, $S_{PCB-a,i}$ – площади теплообмена поверхностей корпуса i -й МС ($i = 1, 2, 3$) и МПП в области размещения i -й МС со средой; n – показатель степени, равный 1/3, 1/4 или 1/8 в зависимости от закона, по которому развивается конвективный теплообмен, формы и пространственной ориентации объекта [4, 16].

Значения детерминированных тепловых сопротивлений кондуктивного теплопереноса, входящих в тепловую модель ЭМ, рассчитываются посредством компьютерного моделирования температурного поля ЭМ по программному комплексу STF-ELECTRONMOD [25] при математических ожиданиях входных данных (рис. 1, б). Граф тепловой модели конструкции ЭМ приведен на рис. 2.

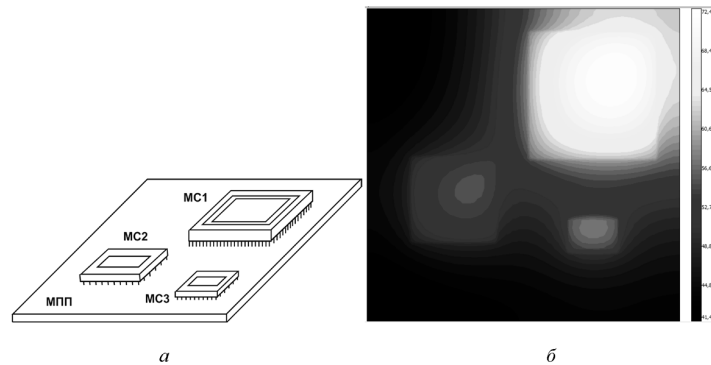


Рис. 1. Электронная система (а), содержащая микросхемы MC1, MC2, MC3, припаянные к многослойной печатной плате МПП, и поле математического ожидания температуры на поверхности МПП (б)

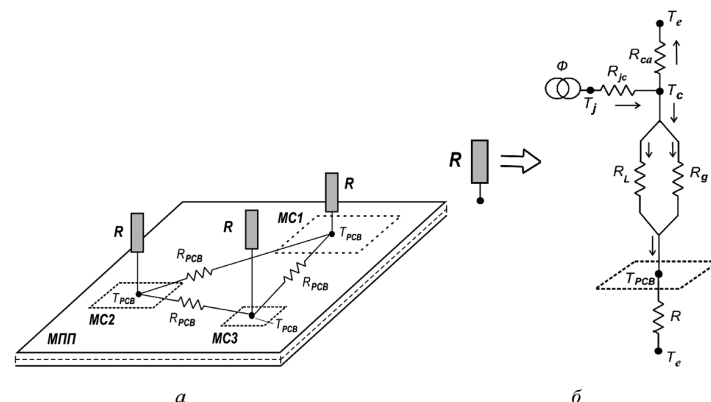


Рис. 2. Граф тепловой модели ЭС (а) и развертка графа МС с теплообменом в окружающую среду (б)

Статистические меры – вектор математического ожидания \bar{T} и корреляционная матрица K_{TT} – стохастического вектора $T(\omega)$ определяются матричным уравнением (9) и выражением (10) соответственно.

Результаты вычисления статистических мер стохастических температур кристаллов микросхем МС1, МС2, МС3 (математических ожиданий \bar{T}_i , дисперсий D_i , среднеквадратических отклонений σ_i , $i = 1, 2, 3$) и интервалов, внутри которых будут заключены реальные значения температур кристаллов микросхем, при температуре окружающей среды, равной 25°C, приведены в таблице. Для оценки погрешности метода вычисленные статистические меры сравнивались с их точными значениями, рассчитанными методом Монте-Карло для 10 тыс. реализаций. Погрешность отклонения (δ , %) результатов, полученных данным методом и методом Монте-Карло, оценивалась согласно выражению

$$\delta, \% = \frac{\bar{T}_{i(\text{МК})} - \bar{T}_{i(\text{ПОМ})}}{\bar{T}_{i(\text{МК})}} + 3 \frac{\sigma_{i(\text{МК})} - \sigma_{i(\text{ПОМ})}}{\bar{T}_{i(\text{МК})}},$$

в котором индексы «пом» и «мк» указывают на то, что результат получен методом псевдообратной матрицы или методом Монте-Карло.

Сравнение результатов вычислений статистических мер температуры кристаллов МС, полученных согласно рассматриваемому методу и методу Монте-Карло, показывает, что максимальная погрешность отклонения не превышает 6%, что является приемлемой величиной при моделировании тепловых процессов в электронных системах. Применение метода позволяет также значительно (в несколько раз) уменьшить компьютерное время, необходимое для вычислений в сравнении со временем, необходимым для достижения методом Монте-Карло приемлемой точности.

Статистические меры (\bar{T}_i , σ_i) и интервалы диапазона изменения стохастических температур кристаллов микросхем МС1, МС2, МС3, рассчитанные разработанным методом для температуры окружающей среды $T_e = 25^\circ\text{C}$

Номер МС на МПП	$\bar{T}_i, ^\circ\text{C}$	$\sigma_i, ^\circ\text{C}$	Интервалы диапазона изменения стохастических температур кристалла МС, $^\circ\text{C}$
МС1	80.148	3.146	70.7–89.6
МС2	49.269	2.026	43.2–55.3
МС3	48.347	2.403	41.1–55.6

Заключение

Разработанный метод позволяет моделировать стохастические распределения температуры в сложных электронных системах при наличии как интервальной стохастичности параметров системы, так и их нелинейной зависимости от температуры. Метод показал свою эффективность и адекватность при компьютерном и математическом моделировании тепловых процессов в сложных электронных системах. Сравнение результатов, полученных рассматриваемым методом и методом Монте-Карло, показало, что погрешность метода не превышает 6% и является достаточно приемлемой величиной для проектирования электронных систем. Исследования показывают, что погрешность метода уменьшается с уменьшением числа обусловленности $\aleph = \|G\| \cdot \|G^{-1}\|$ матрицы тепловых проводимостей G , а затраты компьютерного времени, необходимые для проведения вычислений по разработанному методу, в несколько раз меньше временных затрат, требующихся для вычислений по методу Монте-Карло. Пример применения разработанного метода к стохастическому нелинейному тепловому процессу в реальной конструкции электронной системы показал его эффективность как по точности, так и скорости вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мадера А.Г.** Математическое моделирование интервально-стохастических нестационарных нелинейных тепловых процессов в электронных системах // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 3. С. 126–136.
2. **Мадера А.Г.** Тепловые процессы в электронных системах в условиях влияния эффекта тепловой обратной связи // Тепловые процессы в технике. 2018. Т. 10. № 3-4. С. 144–151.
3. **Мадера А.Г.** Концепция математического и компьютерного моделирования тепловых процессов в электронных системах // Программные продукты и системы. 2015. №4. С. 79–86.
4. **Ellison G.N.** Thermal computations for electronics. Conductive, radiative, and convective air cooling. NY: CRC Press, 2011. 418p.
5. **da Silva C.R.A., de Deus H.P.A., Kozlik A., Garcia O.S.** Application of the method of Galerkin to non linear problem stochastic heat conduction one-dimensional // Applied Mechanics and Materials. 2015. V. 751. P. 325–330.
6. **Chiba R.** Stochastic analysis of heat conduction and thermal stresses in solids: A review // Heat Transfer Phenomena and Applications. Ed. Kazi S.N. Chapter 9. 2012. P. 243–266. DOI: 10.5772/50994
7. **Chang C.-M., Yeh H.-D.** Stochastic analysis of field-scale heat advection in heterogeneous aquifers // Hydrol. Earth Syst. Sci. 2012. V. 16. P. 641–648.

8. Wang C., Qiu Z., Wu D. Numerical analysis of uncertain temperature field by stochastic finite difference method // Science China: Physics, Mechanics and Astronomy. 2014. V. 57. Iss. 4. P. 698–707.
9. Wang C., Qiu Z., Chen X. Uncertainty analysis for heat convection-diffusion problem with large uncertain-but-bounded parameters // Acta Mechanica. November. 2015. V. 226. Iss. 11. P. 3831–3844.
10. Chantasiriwan S. Error and variance of solution to the stochastic heat conduction problem by multiquadric collocation method // Int. Comm. Heat Mass Trans. 2006. N 33. P. 342–349.
11. Saleh M.M., El-Kalla I.L., Ehab M.M. Stochastic finite element technique for stochastic one-dimension time-dependent differential equations with random coefficients // Differential Equations and Nonlinear Mechanics. 2007. art. ID 48527.16p.
12. Srivastava K. Modelling the variability of heat flow due to the random thermal conductivity of crust // Geophys J. Int. 2005. N 160. P. 776–782.
13. Stefanou G. The stochastic finite element method: past, present and future // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 2009. No. 198. P. 1031–1051.
14. Адомиан Дж. Стохастические системы / Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 376 с.
15. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. 296 с.
16. Мадера А.Г. Моделирование теплообмена в технических системах. М.: Науч. Фонд им. акад. В.А. Мельникова, 2005. 208 с.
17. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1955. V. 51. N 3. P. 406–413.
18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 576 с.
19. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 655 с.
20. Пугачев В.С. Теория случайных функций. М.: Наука, 1962. 884 с.
21. Madera A.G. Interval-stochastic thermal processes in electronic systems: Analysis and modeling // Journal of Engineering Thermophysics. 2017. V. 26. N 1. P. 17–28.
22. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bulletin of the American Mathematical Society. 1920. N 26. P. 394–395.
23. Мадера А.Г. Анализ тепловых процессов в технических системах методом псевдообратной матрицы // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 9. С. 61–65.
24. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985. 320 с.
25. Мадера А.Г., Кандалов П.И. Матрично-топологический метод математического и компьютерного моделирования температурных полей в электронных модулях: программный комплекс STF-ELECTRONMOD // Программные продукты и системы. 2012. № 4. С. 160–164.

Modeling of complex thermal processes in electronic systems by the method of generalized pseudosolution

A.G. Madera

*Scientific Research Institute for System Analysis of the Russia Academy of Sciences (SRISA RAS),
Moscow, 117218, Russia
e-mail: agmprof@mail.ru*

To increase the adequacy of modeling of thermal processes in electronic systems it is necessary that the developed methods and models take into account both the nonlinear and stochastic nature of real thermal processes in electronic systems. The nonlinear nature of thermal processes in the electronic systems is due to the non-linearity of temperature dependences of heat transfer factors and the power consumption of electronic components of the electronic systems as a result of the effect of thermal feedback. The stochastic character of thermal processes in such systems is determined by both internal system factors and external factors arising from the functioning of the electronic systems and its interaction with the environment. The stochasticity of the internal factors of the electronic systems arises due to their statistical technological variation in production and installation, and the stochasticity of external factors is due to the random nature of the environmental parameters. In this article proposed is a method to simulate thermal processes that are both nonlinear and stochastic, and which are influenced by external and internal stochastic factors. The modeling method is based on the generalized normal pseudosolution in the form of a pseudo-inverse matrix method, on the method of analyzing stochastic fields by statistical measures fields, and also on decomposing a stochastic nonlinear thermal conductivity matrix into a product of two matrices, one of which depends only on temperature and the other only on stochastic factors. The method developed in the article makes it possible to find the equations that determine the statistical measures of the stochastic temperature distributions in the electronic systems. Computation by this method requires significantly less computer time and computer RAM compared to the Monte Carlo method. The application of the method to the design of real electronic systems showed its adequacy and efficiency for engineering practice.

Keywords: generalized solution, pseudoinverse matrix, thermal processes, electronic system, nonlinear, stochastic, mathematical model.

REFERENCES

1. **Madera A.G.** Matematicheskoe modelirovanie interval'nostokhasticheskikh nestatsionarnykh nelineinykh teplovykh protsessov v elektronnykh sistemakh [Mathematical modeling interval stochastic nonlinear transient thermal processes in electronic systems]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 126–136. In Russ.
2. **Madera A.G.** Teplovye protsessy v elektronnykh sistemakh v usloviyakh vliyaniya effekta teplovoi obratnoi svyazi [Thermal processes in electronic systems in conditions of thermal feedback effect impact]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2018, vol. 10, no. 3–4, pp. 144–151. In Russ.
3. **Madera A.G.** Kontseptsiya matematicheskogo i komp'yuternogo modelirovaniya teplovykh protsessov v elektronnykh sistemakh [The concept of mathematical and computer simulation of thermal processes in electronic systems]. *Programmnyye produkty i sistemy – Software & System*, 2015, no. 4, pp. 79–86. In Russ.
4. **Ellison G.N.** *Thermal Computations for Electronics. Conductive, Radiative, and Convective Air Cooling*. N.Y.: CRC Press, 2011. 416 p.
5. **da Silva C.R.A., de Deus H.P.A., Kozlik A., Garcia O.S.** Application of the method of Galerkin to non linear problem stochastic heat conduction one-dimensional. *Applied Mechanics and Materials*, 2015, vol. 751, pp. 325–330.
6. **Chiba R.** *Stochastic analysis of heat conduction and thermal stresses in solids: A review*. Heat Transfer Phenomena and Applications. Ed. Kazi S.N., 2012. Chapter 9, pp. 243–266. DOI: 10.5772/50994
7. **Chang C.-M., Yeh H.-D.** Stochastic analysis of field-scale heat advection in heterogeneous aquifers. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 2012, vol. 16, pp. 641–648.
8. **Wang C., Qiu Z., Wu D.** Numerical analysis of uncertain temperature field by stochastic finite difference method. *Science China: Physics, Mechanics and Astronomy*, 2014, vol. 57, iss. 4, pp. 698–707.
9. **Wang C., Qiu Z., Chen X.** Uncertainty analysis for heat convection-diffusion problem with large uncertain-but-bounded parameters. *Acta Mechanica*, 2015, vol. 226, iss. 11, pp. 3831–3844.
10. **Chantasiriwan S.** Error and variance of solution to the stochastic heat conduction problem by multiquadric collocation method. *Int. Comm. Heat Mass Trans.*, 2006, no. 33, pp. 342–349.
11. **Saleh M.M., El-Kalla I.L., Ehab M.M.** Stochastic finite element technique for stochastic one-dimension time-dependent differential equations with random coefficients. *Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, 2007, art. ID 48527. 16 p.
12. **Srivastava K.** Modelling the variability of heat flow due to the random thermal conductivity of crust. *Geophys. J. Int.*, 2005, no. 160, pp. 776–782.
13. **Stefanou G.** The stochastic finite element method: Past, present and future. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2009, no. 198, pp. 1031–1051.
14. **Adomian G.** *Stochastic systems*. N.Y.: Academic Press, 1983. 380 p. (Rus. ed. Adomian G. Stokhasticheskie sistemy'. Moscow: Mir, 1987. 376 p.)
15. **Ermakov S.M., Mikhailov G.A.** *Statisticheskoe modelirovanie* [Stochastic modeling]. Moscow: Nauka, 1982. 296 p. In Russ.
16. **Madera A.G.** *Modelirovanie teploobmena v tekhnicheskikh sistemakh* [Modeling of heat transfer in technical systems]. Moscow: Publ. nauch. fond «Pervaya issled. lab. im. akad. V.A. Mel'nikova», 2005. 204 p. In Russ.
17. **Penrose R.** A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1955, vol. 51, no. 3, pp. 406–413.
18. **Gantmakher F.R.** *Teoriya matrits* [Theory of matrix]. Moscow: FIZMATLIT, 2010. 576 p. In Russ
19. **Horn R.A., Johnson C.R.** *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 662 p. (Rus. ed. Horn R., Johnson C. Matrichnyj analiz. Moscow: Mir, 1989. 655 p.)
20. **Pugachev V.S.** *Teoriya sluchainykh funktsii* [Theory of stochastic functions]. Moscow: Nauka, 1962. 884 p. In Russ.
21. **Madera A.G.** Interval-stochastic thermal processes in electronic systems: Analysis and modeling. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2017, vol. 26, no. 1, pp. 17–28.
22. **Moore E.H.** On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1920, no. 26, pp. 394–395.
23. **Madera A.G.** Analiz teplovykh protsessov v tekhnicheskikh sistemakh metodom psevdootbratnoi matritsy [Analysis of the thermal processes in technical systems by the pseudo-inverse matrix method]. *Sovremennyye naukoemkie tekhnologii – Modern high technology*, 2018, no. 9, pp. 61–65. In Russ.
24. **RozaNov Yu.A.** *Teoriya veroyatnostei, sluchainyye protsessy i matematicheskaya statistika* [Probability theory, stochastic processes and mathematical statistics]. Moscow: Nauka. 1985. 320 p. In Russ.
25. **Madera A.G., Kandalov P.I.** Matrichno-topologicheskii metod matematicheskogo i komp'yuternogo modelirovaniya temperaturnykh polei v elektronnykh modul'yakh: programmnyi kompleks STF-ELECTRONMOD [Matrix-topological method for mathematical and computer modeling of temperature fields in electronic modules: programming complex STF-ELECTRONMOD]. *Programmnyye produkty i sistemy – Software & System*, 2012, no. 4, pp. 160–164. In Russ.