

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"

На правах рукописи



УДК 531.01, 531.36, 521.131

Волков Евгений Валерьевич

**Исследование устойчивости стационарных и
периодических движений в плоской круговой
ограниченной задаче четырёх тел**

1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

Бардин Борис Сабирович

Москва – 2024

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Существование и бифуркация центральных конфигураций в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел . .	11
1.1. Плоская круговая ограниченная задача четырёх тел. Постановка задачи. Уравнения движения	11
1.2. Центральные конфигурации	18
1.3. О бифуркации центральных конфигураций	25
1.4. Предельные случаи плоской круговой ограниченной задачи четырёх тел	31
Глава 2. Исследование устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия тела малой массы	34
2.1. Линейный анализ устойчивости положений относительного равновесия	34
2.2. Нелинейный анализ устойчивости положений относительного равновесия	39
2.3. Об устойчивости положений относительного равновесия при малых значениях параметров задачи	48
Глава 3. Периодические движения в окрестности положений относительного равновесия и их орбитальная устойчивость . . .	57
3.1. Постановка задачи	57
3.2. Аналитическое исследование нерезонансных периодических движений	59
3.3. Параметрический резонанс и орбитальная неустойчивость короткопериодических движений	63

3.4.	Об алгоритме численного продолжения	68
3.5.	Области существования и линейный анализ орбитальной устойчивости короткопериодических движений	78
3.6.	Локальные переменные и изоэнергетическая редукция	82
3.7.	Анализ орбитальной устойчивости	86
3.8.	Алгоритм исследования орбитальной устойчивости короткопериодических движений	89
Заключение		95
Приложение А.		99
A.1.	Формулы для коэффициентов матрицы линейной замены переменных, нормализующих квадратичную часть функции Гамильтона	99
A.2.	Выражения для коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона системы с двумя степенями свободы	101
A.3.	Выражения для коэффициентов a_i, b_i, c_i ($i = 0, 1, 2$) рядов (2.29)	107
A.4.	Выражения для коэффициентов $\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}$ и $\mu_2^*, \mu_2^{(i+1)}$ ($i = 0, 1, 2$) рядов (2.24), (2.30)	109
Список литературы		114

Введение

Актуальность задачи. Задачу о движении тела малой массы в гравитационном поле трёх взаимодействующих по закону всемирного тяготения массивных тел называют ограниченной задачей четырёх тел. В такой постановке предполагают, что тело малой массы не влияет на движение трех притягивающих тел, орбиты которых считают известными. В данной диссертационной работе рассматривается случай, когда три массивных притягивающих тела располагаются в вершинах равностороннего треугольника неизменного размера и движутся по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости. Такое движение описывается хорошо известным решением Лагранжа задачи трёх тел [68]. Кроме того, предполагается, что все четыре тела движутся в одной плоскости. В этом случае данную задачу называют плоской круговой ограниченной задачей четырёх тел.

Уравнения движения тела малой массы, записанные во вращающейся системе координат, допускают стационарные решения, которые описывают положения относительного равновесия во вращающейся системе координат, связанной с равносторонним треугольником, образованным притягивающими телами. Тело малой массы, находясь в положении относительного равновесия, составляет с тремя притягивающими телами так называемую центральную конфигурацию – четырёхугольник неизменной формы и размеров. Находясь в центральной конфигурации тело малой массы движется по круговой орбите, а действующая на него результирующая сила гравитационного притяжения направлена к центру масс системы.

Вопросы существования и бифуркаций центральных конфигураций в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел исследовались численно [8, 9, 38, 56, 64, 73, 79, 80, 87] и аналитически [36, 58, 66, 67, 73, 74]. Установлено [79, 80, 87], что в зависимости от значений параметров задачи (отношений

масс притягивающих тел) может быть восемь, девять или десять различных центральных конфигураций. Существуют такие центральные конфигурации, когда тело малой массы находится внутри треугольника, образованного притягивающими телами. Доказано [36, 79, 80, 87], что всегда существует две, три или четыре таких центральных конфигураций. Исследование существования центральных конфигураций в задаче многих проведено в работах [59, 61, 81].

Решению задачи об устойчивости центральных конфигураций посвящено значительное число работ. Необходимым условием устойчивости центральных конфигураций в задаче четырёх тел является устойчивость соответствующей лагранжевой конфигурации из трёх тел [84]. Если лагранжева конфигурация устойчива, то задача об устойчивости всей конфигурации из четырёх тел сводится к задаче об устойчивости положения относительного равновесия, в котором находится тело малой массы во вращающейся системе координат. В рамках такой постановки линейный анализ устойчивости центральных конфигураций (положений относительного равновесия тела малой массы) в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел выполнен в работах [6, 7, 35, 42, 44–46, 49, 80, 87]. В частности, в работах [6, 42, 44] проведён линейный анализ устойчивости для случая, когда массы двух притягивающих тел равны. В работе [35, 50] в плоскости параметров задачи численно были построены кривые, отвечающие резонансам до шестого порядка включительно. Строгие выводы об устойчивости по Ляпунову центральных конфигураций в случае равных масс двух из притягивающих тел получены в работах [42, 44, 50]. Для положений относительного равновесия тела малой массы, располагающихся вблизи притягивающего тела, исследование об устойчивости в линейном приближении проведено в работах [54, 70]. В работе [70] был проведён нелинейный анализ устойчивости для некоторых нерезонансных и резонансных случаев данной задачи. В работах [51, 52] исследовался вопрос об устойчивости в пространственной круговой ограниченной задаче четырёх тел, где были получены выводы об устойчивости или неустой-

чивости для большинства начальных условий. Показано, что неустойчивость может иметь место при резонансах третьего и четвертого порядка.

В случае плоской круговой ограниченной задачи четырёх тел, когда три притягивающих тела располагаются на одной прямой, т.е. находятся в коллинеарных точках либрации, вопросы существования, бифуркации и устойчивости численно исследовались в работах [62, 71, 82, 83]. В работе [62, 82] проведен строгий нелинейный анализ устойчивости центральных конфигураций для случая, когда два притягивающих тела движутся по круговым орбитам, а третье притягивающее тело покоится в центре масс системы.

Как с теоретической, так и с прикладной точек зрения немалый интерес представляет также изучение периодических движений тела малой массы. В частности, к таким движениям относятся движения вблизи стационарных решений (положений относительного равновесия), т.е. движения по замкнутым траекториям в подвижной системе координат, вращающейся вместе с притягивающими телами. Эти периодические движения представляют собой так называемые естественные семейства, период которых зависит от параметров задачи. В малой окрестности положения относительного равновесия естественные семейства можно получить аналитически в виде рядов по степеням малого параметра (амплитуды нелинейных колебаний в окрестности положения относительного равновесия). Аналитически полученные семейства периодических движений можно численно продолжить по параметру и исследовать данные периодические движения во всей области их существования.

Существование и орбитальная устойчивость этих периодических орбит представляет большой интерес для задач небесной механики и астродинамики. В частности, эти орбиты могут представлять интерес при планировании космических миссий в окрестности малых небесных тел (астероидов, расположенных вблизи точек либрации). Выводы об устойчивости центральной конфигурации позволяют находить области устойчивости движения космических аппаратов

в окрестности этих небесных тел. В таких областях возможна стабилизация положения космического аппарата посредством только гравитационных сил, действующих со стороны трёх естественных небесных тел (например: Солнце, Юпитер и астероид из группы Троянцев). Гравитационная стабилизация даёт возможность минимизировать затраты топлива, предназначенного для коррекции орбиты космического аппарата.

Исследованию периодических орбит в задаче четырёх тел посвящено множество работ. Исследование симметричных и несимметричных плоских периодических орбит проведено в работах [34, 37, 53, 77, 78] для случая, когда массы двух притягивающих тел равны. В работе [75] рассматривается ограниченной задаче четырёх тел в предположении, что притягивающие тела образуют коллинеарную конфигурацию. Проводится численное исследование периодических движений, рождающихся из этих положений относительного равновесия. В работе [65] предложен метод построения периодических орбит в ограниченной задаче четырёх тел, суть которого состоит в том, что определяется периодическое движение трёх основных тел, а затем, используя гало-орбиту в качестве начальных приближений, строятся периодические орбиты в задаче четырёх тел. Установлено, что во всех случаях влияние дополнительного гравитационного поля на движение оказывает дестабилизирующее воздействие.

В последние годы были разработаны новые и эффективные методы строгого нелинейного анализа орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновых систем [29], позволяющие эффективно решать задачу об орбитальной устойчивости периодических движений механических систем. Данные методы основаны на нормализации уравнений возмущенного движения и применении теории КАМ [1, 19, 25, 30, 55, 76]. Первым и важным шагом применения указанных методов является введение локальных координат и получение уравнений возмущенного движения, описывающих движение в малой окрестности невозмущенной периодической орбиты. Из общей теории гамильтоновых

систем [48, 63] следует, что такие координаты всегда ввести можно. Однако на практике получение канонической замены переменных для перехода к локальным координатам является нетривиальной задачей. Существует ряд работ [24, 72], посвященных данной тематике, в которых представлены методы получения вышеупомянутого канонического преобразования. Наиболее универсальный метод был недавно предложен в работах [40, 41]. Данный метод позволяет вводить локальные координаты как для периодических движений, построенных аналитически, так и для периодических движений, полученных численно с помощью метода продолжения по параметрам [18, 32, 33, 57, 88]. Задачу об орбитальной устойчивости можно существенно упростить если рассмотреть движение на уровне энергии, соответствующем невозмущенной периодической орбите. После проведения изоэнергетической редукции задача об орбитальной устойчивости периодических движений сводится к задаче об устойчивости положения равновесия редуцированной системы с одной степенью свободы, гамильтониан которой является периодической функцией новой независимой переменной. Решение последней задачи может быть получено на основе хорошо развитых к настоящему времени методов теории нормальных форм и теории КАМ. Также эффективным способом решения этой задачи является построение симплектического отображения [29], генерируемого фазовым потоком редуцированной системы и исследование эквивалентной задачи об устойчивости неподвижной точки симплектического отображения. Описанный выше подход применим как для периодических движений, которые были получены аналитически, так и для тех, которые получены численно. Таким образом, к настоящему времени разработаны эффективные численно-аналитические методы, позволяющие получать строгие выводы об орбитальной устойчивости как стационарных, так и периодических движений в задачах небесной механики. Исследование, проведённое в данной диссертационной работе, базируется на применении данных методов.

Целью данной диссертационной работы является исследование бифурка-

ции и устойчивости положений относительного равновесия тела малой массы в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел, а также решение вопроса об орбитальной устойчивости периодических движений в окрестности устойчивого положения относительного равновесия.

В первой главе данной диссертационной работы сформулирована постановка задачи и получены уравнения движения тела малой массы в форме уравнений Гамильтона. Уравнения движения допускают частные стационарные решения, описывающие положения относительного равновесия тела малой массы во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат. Если тело малой массы находится в положении относительного равновесия, то все четыре тела образуют четырёхугольник неизменной формы и размеров, так называемую центральную конфигурацию. В рамках плоской круговой ограниченной задачей четырёх тел подробно исследован вопрос о существовании центральных конфигураций. Были описаны все возможные сценарии бифуркации центральных конфигураций. Все исследования проводились в предположении, что треугольные точки либрации, в которых находятся притягивающие тела, устойчивы в линейном приближении.

Во второй главе выполнен строгий нелинейный анализ устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия тела малой массы во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат. Для исследования устойчивости применялась методика, основанная на методе нормальных форм и теории КАМ. В рамках этой методики был выполнен численный анализ коэффициентов нормализованного гамильтониана уравнений возмущенного движения и получены строгие выводы об устойчивости. Исследование было выполнено как для нерезонансного случая, так и для случаев резонансов второго, третьего и четвёртого порядка. В предельном случае, когда одно из трёх притягивающих тел является малым, на основании метода малого параметра были получены аналитические выражения для коэффициентов нормализован-

ного гамильтониана. Показано, что результаты аналитического и численного исследования устойчивости хорошо согласуются. Строгие выводы об устойчивости были представлены на диаграммах, построенных в плоскости параметров задачи.

В третьей главе исследуется вопрос об орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия. В начале главы даётся описание методики решения задачи об орбитальной устойчивости. В частности, описывается методика введения локальных координат в окрестности периодических орбит, алгоритмы выполнения изоэнергетической редукции и построения симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком редуцированной системы. На основе данной методики разработан алгоритм численно-аналитического исследования орбитальной устойчивости короткопериодических движений, полученных численно в малой окрестности положений относительного равновесия. Далее, используя данный алгоритм, были получены строгие выводы об орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия, когда два притягивающих тела имеют равные массы. Исследование орбитальной устойчивости было выполнено как для нерезонансного случая, так и для случаев резонансов третьего и четвёртого порядка. Строгие выводы об орбитальной устойчивости были представлены на диаграммах, построенных в плоскости параметров задачи.

Основные результаты данной диссертационной работы опубликованы в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК [13, 43–47, 89], а также докладывались на научных семинарах, российских и международных конференциях [2–5, 10–12, 14–17].

Глава 1

Существование и бифуркация центральных конфигураций в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел

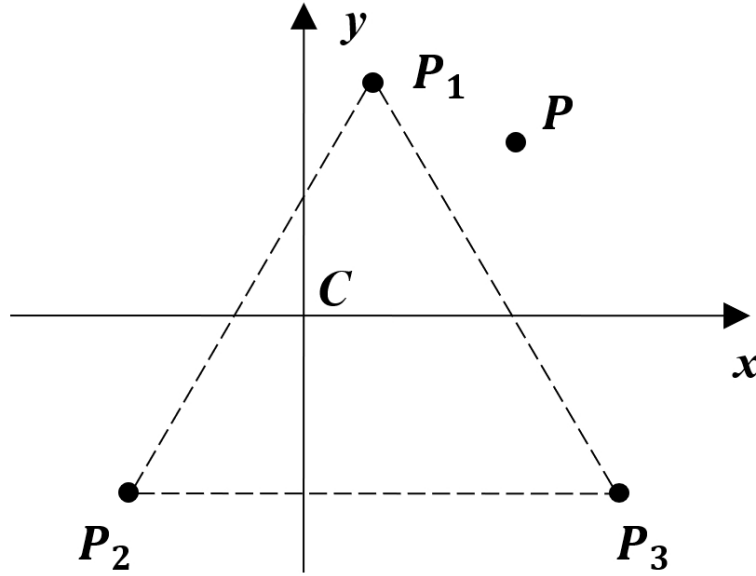
1.1. Плоская круговая ограниченная задача четырёх тел.

Постановка задачи. Уравнения движения

Рассмотрим движение тела P в гравитационном поле трёх массивных тел P_1 , P_2 и P_3 , которые взаимодействуют друг с другом по закону всемирного тяготения. Предполагается, что масса m тела P пренебрежимо мала по сравнению с массами m_1 , m_2 и m_3 тел P_1 , P_2 и P_3 . Поэтому влияние тела P на движение тел P_1 , P_2 и P_3 не учитывается. Далее рассматривается частный случай движения массивных тел, когда они находятся в лагранжевых точках либрации, т.е., двигаясь по кеплеровским орбитам, лежат в одной плоскости и образуют равносторонний треугольник.

Для описания движения тела P введем (см. Рис. 1.1) подвижную систему координат $Sxyz$ с началом в центре масс системы тел P_1 , P_2 и P_3 . Плоскость Sxy совместим с плоскостью, в которой движутся все четыре тела. В данной системе координат ось Sx параллельна прямой P_2P_3 и направлена в сторону тела P_3 . Ось Sy перпендикулярна оси Sx и направлена в сторону тела P_1 . Ось Sz дополняет систему координат $Sxyz$ до правой ортогональной тройки. Через x , y , z обозначим координаты тела P в подвижной системе координат $Sxyz$.

Координаты тел $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ и $P_3(x_3, y_3, z_3)$ удовлетворяют

Рис. 1.1: Система координат $Cxyz$

следующим условиям

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_2 &= \frac{r}{2}, & x_3 - x_1 &= \frac{r}{2}, & x_3 - x_2 &= r, \\
 y_2 &= y_3, & y_1 - y_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}r, \\
 z_1 &= z_2 = z_3 = 0,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где r — расстояние между телами P_1 , P_2 и P_3 .

Так как центр масс C системы тел P_1 , P_2 и P_3 находится в начале системы координат $Cxyz$, то дополнительно имеем два следующих соотношения

$$\begin{aligned}
 m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 &= 0, \\
 m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

В подвижной системе координат $Cxyz$ координаты тел P_1 , P_2 и P_3 задаются формулами

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{r}{2} \frac{m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, & y_1 &= \frac{\sqrt{3}r}{2} \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, & z_1 &= 0, \\
 x_2 &= -\frac{r}{2} \frac{m_1 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, & y_2 &= -\frac{\sqrt{3}r}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}, & z_2 &= 0, \\
 x_3 &= \frac{r}{2} \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3}, & y_3 &= -\frac{\sqrt{3}r}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}, & z_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Введем безразмерные параметры μ_2 и μ_3 по формулам

$$\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \mu_3 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (1.4)$$

тогда координаты (1.3) тел P_1 , P_2 и P_3 запишутся в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}r(\mu_2 - \mu_3), & y_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}r(\mu_2 + \mu_3), & z_1 &= 0, \\ x_2 &= -\frac{1}{2}r(1 - \mu_2 + \mu_3), & y_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}r(1 - \mu_2 - \mu_3), & z_2 &= 0, \\ x_3 &= \frac{1}{2}r(1 + \mu_2 - \mu_3), & y_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}r(1 - \mu_2 - \mu_3), & z_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Кинетическая энергия T тела P и силовая функция U вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \left((\dot{x} - \nu y)^2 + (\dot{y} + \nu x)^2 + \dot{z}^2 \right), \\ U &= fm \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} \right), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где f — универсальная гравитационная постоянная, ν — угол поворота системы координат $Sxyz$ (истинная аномалия), а ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 — расстояние от тела P до тел P_1 , P_2 и P_3 соответственно

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}r(\mu_2 - \mu_3)\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}r(\mu_2 + \mu_3)\right)^2 + z^2}, \\ \rho_2 &= \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}r(1 - \mu_2 + \mu_3)\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}r(1 - \mu_2 - \mu_3)\right)^2 + z^2}, \\ \rho_3 &= \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}r(1 + \mu_2 - \mu_3)\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}r(1 - \mu_2 - \mu_3)\right)^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Дифференциальные уравнения движения тела P , записанные в форме уравнений Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа $L = T + U$, имеют

ВИД

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} - \ddot{\nu}y - 2\dot{\nu}\dot{y} - \dot{\nu}^2x &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\
 \ddot{y} + \ddot{\nu}x + 2\dot{\nu}\dot{x} - \dot{\nu}^2y &= \frac{\partial W}{\partial y}, \\
 \ddot{z} &= \frac{\partial W}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где через W обозначена силовая функция U деленая на m .

Введём безразмерные координаты Нехвила ξ , η и ζ по формулам

$$x = r\xi, \quad y = r\eta, \quad z = r\zeta, \tag{1.9}$$

где $r = p/(1 + e \cos \nu)$, p — фокальный параметр, e — эксцентриситет орбиты.

Учитывая формулы для $\dot{\nu}$, $\ddot{\nu}$ и c — константы интеграла площадей

$$\begin{aligned}
 \dot{\nu} &= \frac{c}{r^2} = \frac{c}{p^2} (1 + e \cos \nu)^2, \\
 \ddot{\nu} &= -2\frac{c^2}{p^4} e \sin \nu (1 + e \cos \nu)^3, \\
 c^2 &= f (m_1 + m_2 + m_3) p,
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

можно получить следующие необходимые в дальнейшем соотношения

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{c}{p} (e\xi \sin \nu + (1 + e \cos \nu) \xi'), \\
 \dot{y} &= \frac{c}{p} (e\eta \sin \nu + (1 + e \cos \nu) \eta'), \\
 \dot{z} &= \frac{c}{p} (e\zeta \sin \nu + (1 + e \cos \nu) \zeta'), \\
 \ddot{x} &= \frac{c^2}{p^3} (1 + e \cos \nu)^2 ((1 + e \cos \nu) \xi'' + e\xi \cos \nu), \\
 \ddot{y} &= \frac{c^2}{p^3} (1 + e \cos \nu)^2 ((1 + e \cos \nu) \eta'' + e\eta \cos \nu), \\
 \ddot{z} &= \frac{c^2}{p^3} (1 + e \cos \nu)^2 ((1 + e \cos \nu) \zeta'' + e\zeta \cos \nu),
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

где штрихом ' обозначено дифференцирование по ν .

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{p^2} \frac{\partial W}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{p^2} \frac{\partial W}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{p^2} \frac{\partial W}{\partial \zeta},\end{aligned}\tag{1.12}$$

В выражении для функции W , величины ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{\left(\xi - \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3)\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}(\mu_2 + \mu_3)\right)^2 + \zeta^2}, \\ \rho_2 &= \sqrt{\left(\xi + \frac{1}{2}(1 - \mu_2 + \mu_3)\right)^2 + \left(\eta + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \mu_2 - \mu_3)\right)^2 + \zeta^2}, \\ \rho_3 &= \sqrt{\left(\xi - \frac{1}{2}(1 + \mu_2 - \mu_3)\right)^2 + \left(\eta + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \mu_2 - \mu_3)\right)^2 + \zeta^2}.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Подставим выражения (1.10), (1.11), (1.12) в (1.8). После данной подстановки уравнения движения тела P преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1 + e \cos \nu} \xi &= \frac{1}{1 + e \cos \nu} \frac{\partial S}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' - \frac{1}{1 + e \cos \nu} \eta &= \frac{1}{1 + e \cos \nu} \frac{\partial S}{\partial \eta}, \\ \zeta'' + \frac{e \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \zeta &= \frac{1}{1 + e \cos \nu} \frac{\partial S}{\partial \zeta},\end{aligned}\tag{1.14}$$

где функция S , введена по формуле

$$S = \frac{p}{c^2} W = \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1} + \frac{\mu_2}{\rho_2} + \frac{\mu_3}{\rho_3}.\tag{1.15}$$

Уравнения (1.14) имеют форму уравнений Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \eta' \xi - \xi' \eta + \\ &+ \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(\frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2} e \zeta^2 \cos \nu + S \right).\end{aligned}\tag{1.16}$$

Введём обобщённые импульсы по следующим формулам

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \xi'} = \xi' - \eta, \quad p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \eta'} = \eta' + \xi, \quad p_\zeta = \frac{\partial L}{\partial \zeta'} = \zeta'. \quad (1.17)$$

Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi - \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(S - \frac{1}{2} e (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \cos \nu \right). \quad (1.18)$$

Далее будем рассматривать случай, когда массивные тела P_1 , P_2 и P_3 движутся по круговым орбитам ($e = 0$). В случае круговой задачи трёх тел $\dot{\nu} = \omega = \text{const}$, где ω — угловая скорость вращения подвижной системы координат $Cxyz$, определяемая равенством

$$\omega^2 = \frac{f(m_1 + m_2 + m_3)}{r^3}. \quad (1.19)$$

В этом случае функция Гамильтона (1.18) принимает вид

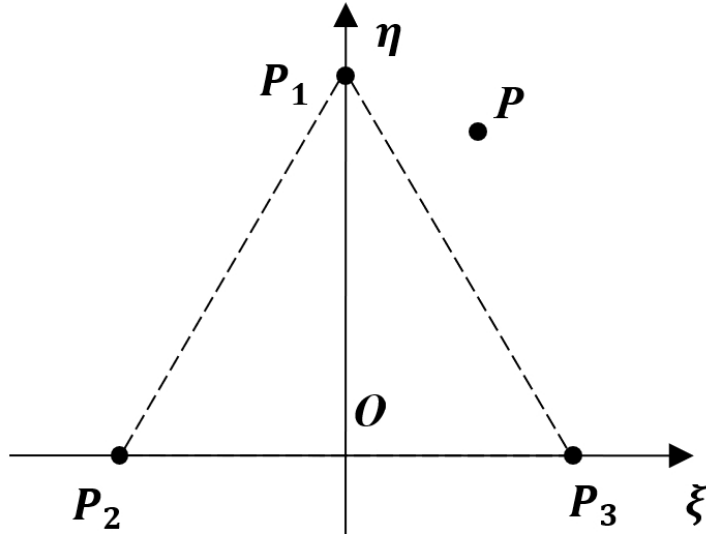
$$H = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi - \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{\mu_3}{\rho_3}. \quad (1.20)$$

Равносторонний треугольник образованный телами P_1 , P_2 и P_3 будет иметь постоянный размер.

Перенесём начало системы координат $C\xi\eta\zeta$ в точку O , которая является серединой отрезка соединяющего тела P_2 и P_3 . Координаты точки O в подвижной системе координат $C\xi\eta\zeta$ следующие

$$\xi_O = \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_3), \quad \eta_O = -\frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \mu_2 - \mu_3), \quad \zeta_O = 0. \quad (1.21)$$

Далее будем работать в подвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$ (см. Рис. 1.2). В данной системе координат ось $O\xi$ проходит через прямую P_2P_3 в сторону тела P_3 . Ось $O\eta$ перпендикулярна оси $O\xi$ и проходит через тело P_1 , а ось $O\zeta$ дополняет систему координат $O\xi\eta\zeta$ до правой ортогональной тройки. Также стоит

Рис. 1.2: Система координат $O\xi\eta$

отметить, что далее будем рассматривать случай плоского движения, когда тело P находится в плоскости $O\xi\eta$, где его положение задается координатами ξ , η .

Уравнения движения тела P можно записать в гамильтоновой форме

$$\frac{d\xi}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\eta}, \quad \frac{dp_\xi}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{dp_\eta}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \quad (1.22)$$

Функция Гамильтона (1.20) примет вид

$$H = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi - \frac{\sqrt{3}(1 - \mu_2 - \mu_3)}{2} p_\xi - \frac{\mu_2 - \mu_3}{2} p_\eta - \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1} - \frac{\mu_2}{\rho_2} - \frac{\mu_3}{\rho_3}. \quad (1.23)$$

В выражении (1.23) ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 – расстояние от тела P до тел P_1 , P_2 и P_3 определяются следующими соотношениями

$$\rho_1 = \sqrt{\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2}, \quad (1.24)$$

$$\rho_3 = \sqrt{\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2}.$$

1.2. Центральные конфигурации

Далее предполагается, что точки либрации, в которых расположены притягивающие тела, устойчивы в линейном приближении. Это означает, что значения параметров μ_2 и μ_3 удовлетворяют известному неравенству Рауса [84]

$$1 + 27 (\mu_2^2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3^2 - \mu_2 - \mu_3) > 0. \quad (1.25)$$

Уравнения движения тела P допускают стационарные решения

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_*, & \eta &= \eta_*, \\ p_\xi &= p_{\xi_*} = -\eta_* + \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \mu_2 - \mu_3), & p_\eta &= p_{\eta_*} = \xi_* + \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_3), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где ξ_* , η_* определяются в результате решения следующей системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \xi + \frac{\mu_2 - \mu_3}{2} - \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1^3} \xi - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu_3}{\rho_3^3} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) &= 0, \\ \eta - \frac{\sqrt{3} (1 - \mu_2 - \mu_3)}{2} - \frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1^3} \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} \eta - \frac{\mu_3}{\rho_3^3} \eta &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Стационарные движения, отвечающие решению (1.26), представляют собой положения относительного равновесия тела P во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат $O\xi\eta\zeta$. В абсолютной системе координат этим частным решениям соответствуют центральные конфигурации, когда все четыре тела образуют четырехугольник неизменной формы и размеров.

Рассмотрим только такие положения относительного равновесия тела P , для которых конфигурация из основных притягивающих тел P_1 , P_2 и P_3 будет устойчивой, т.е. для которых выполнено условие Рауса (1.25). Заметим, что параметры задачи μ_2 и μ_3 линейно входят в выражение (1.27), и каждому положению относительного равновесия соответствует единственная пара значений μ_2 и μ_3 . Выражая μ_2 и μ_3 из (1.27) и подставляя их в неравенство (1.25), можно

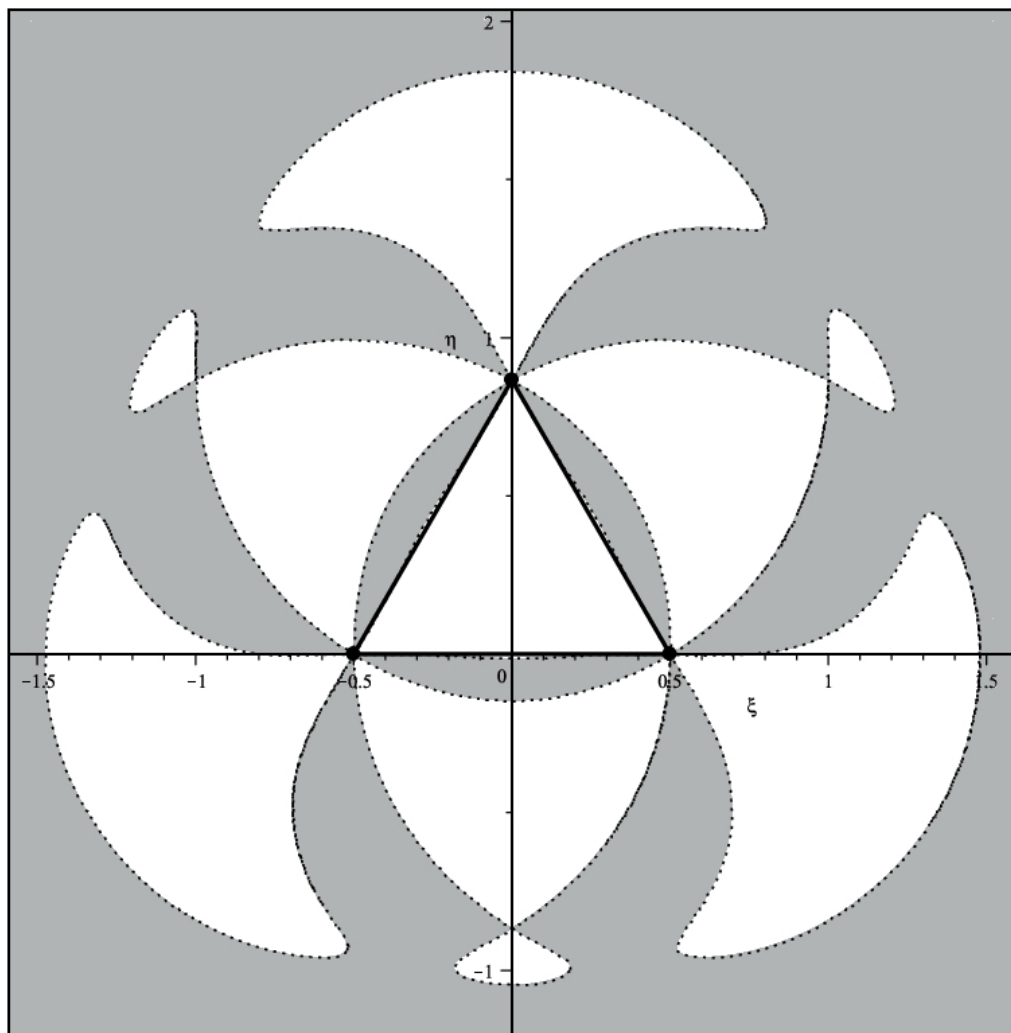


Рис. 1.3: Области тела P , где сохраняется устойчивость конфигурации из трёх притягивающих тел P_1 , P_2 и P_3

показать, что положения относительного равновесия, для которых конфигурация из трёх притягивающих тел будет устойчивой, могут располагаться лишь в областях, обозначенных на Рис. 1.3 серым цветом. Стоит отметить, что положения относительного равновесия существуют не при любых значениях ξ и η .

Вопросы существования и бифуркации положений относительного равновесия в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел исследовались численно [79, 80, 87] и аналитически [36, 58, 66, 67]. Установлено, что в зависимости от значений параметров задачи (отношений масс притягивающих тел) существует

8, 9 или 10 положений относительного равновесия тела малой массы. Доказано, что внутри треугольника, образованного притягивающими телами, всегда существует 2, 3 или 4 положения относительного равновесия.

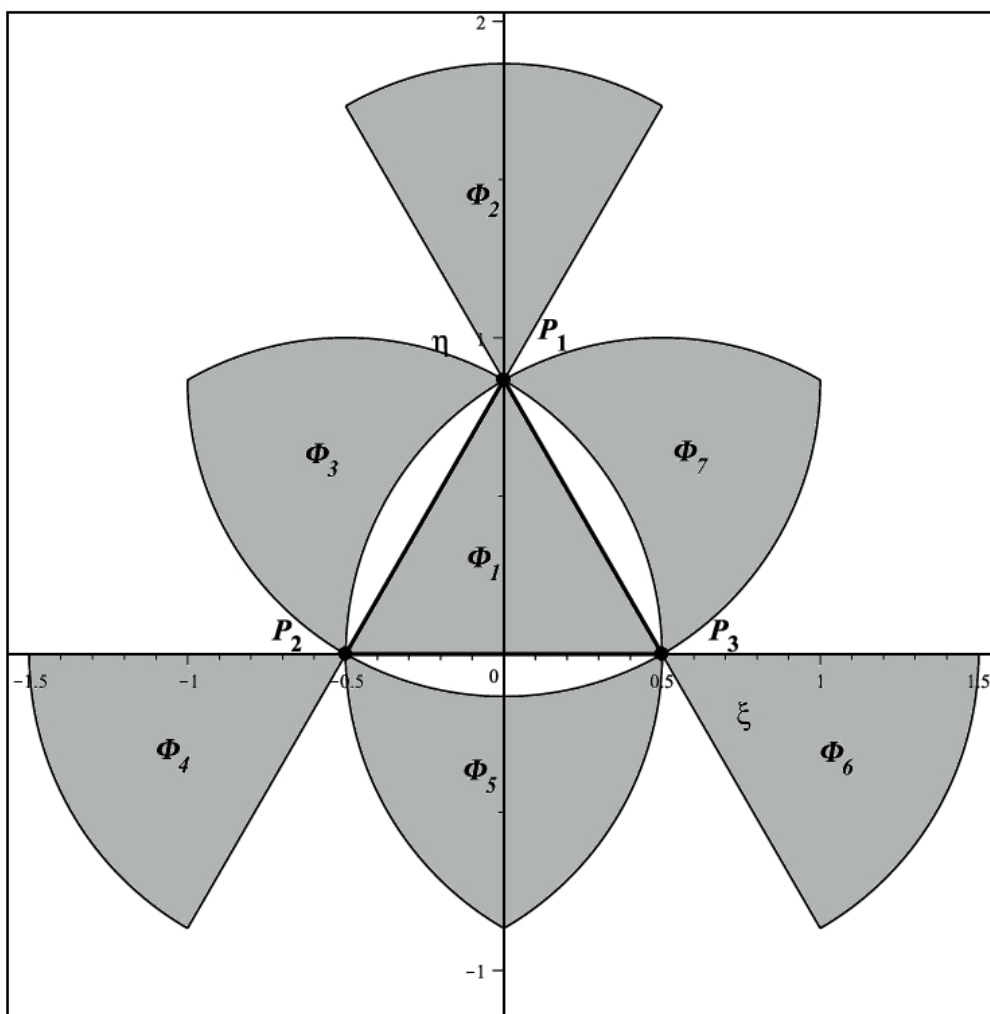


Рис. 1.4: Возможные области положений относительного равновесия тела P

На Рис. 1.4 тёмно-серым цветом изображены семь возможных областей, где в зависимости от значений масс притягивающих тел P_1 , P_2 и P_3 может располагаться тело малой массы P . Обозначим эти области через Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , Φ_4 , Φ_5 , Φ_6 , Φ_7 , впервые они были найдены в работе [79]. В области Φ_1 существует 2, 3 или 4 положения относительного равновесия, а в областях Φ_2 , Φ_3 , Φ_4 , Φ_5 , Φ_6 , Φ_7 существует только одно положение относительного равновесия. При непрерывном изменении значений параметров задачи μ_2 и μ_3 положения относи-

тельного равновесия, которые находятся в данных областях, могут смещаться внутри этих областей, но не могут покидать их.

При выполнении условия (1.25) рассматриваемая система имеет восемь положений относительного равновесия, которым соответствуют различные конфигурации из четырёх тел. В этом случае в области Φ_1 существует только два положения относительного равновесия. Положения относительного равновесия, для которых выполнено условие Рауса, расположены в узких областях. Данные области получаются в результате пересечения областей существования положений относительного равновесия, изображенных на Рис. 1.4, с областями, где выполнено условия Рауса (1.25) (Рис. 1.3). Эти области изображены на Рис. 1.6, о чём пойдёт речь ниже.

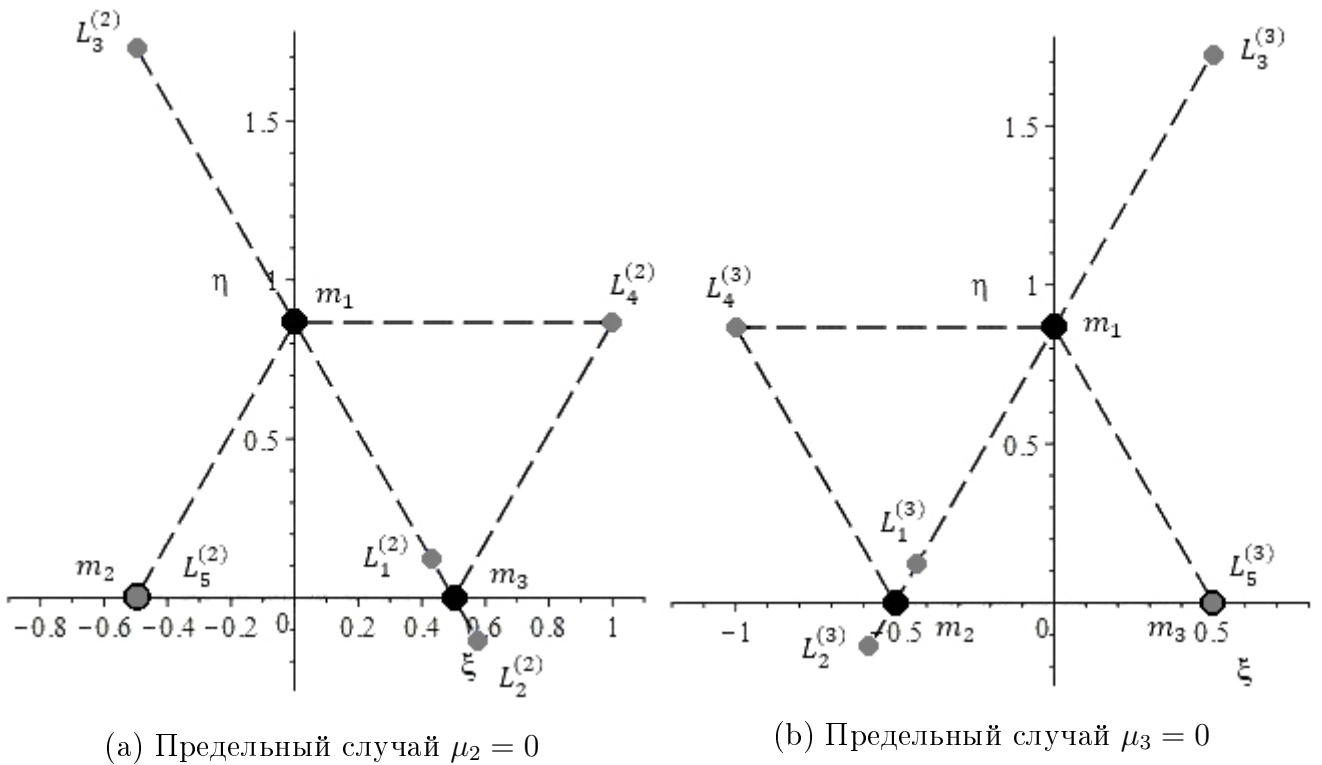


Рис. 1.5: Положения относительного равновесия тела P в предельных случаях

Положения относительного равновесия при $\mu_2 = 0$ или $\mu_3 = 0$ переходят в лагранжевы или эйлеровы точки либрации. В этом случае задача вырождается в плоскую круговую ограниченную задачу трёх тел. Таким образом, для каж-

дого положения относительного равновесия тела малой массы существует два предельный случая $\mu_2 = 0$ и $\mu_3 = 0$, т.е. у каждого положения относительного равновесия два предельных положения. Два различных положения относительного равновесия не могут иметь два одинаковых предельных положения. На Рис. 1.5а и Рис. 1.5b изображены центральные конфигурации в упомянутых выше предельных случаях. Положение тела P обозначены через $L_i^{(2)}$ и $L_j^{(3)}$ в случаях $\mu_2 = 0$ и $\mu_3 = 0$ соответственно.

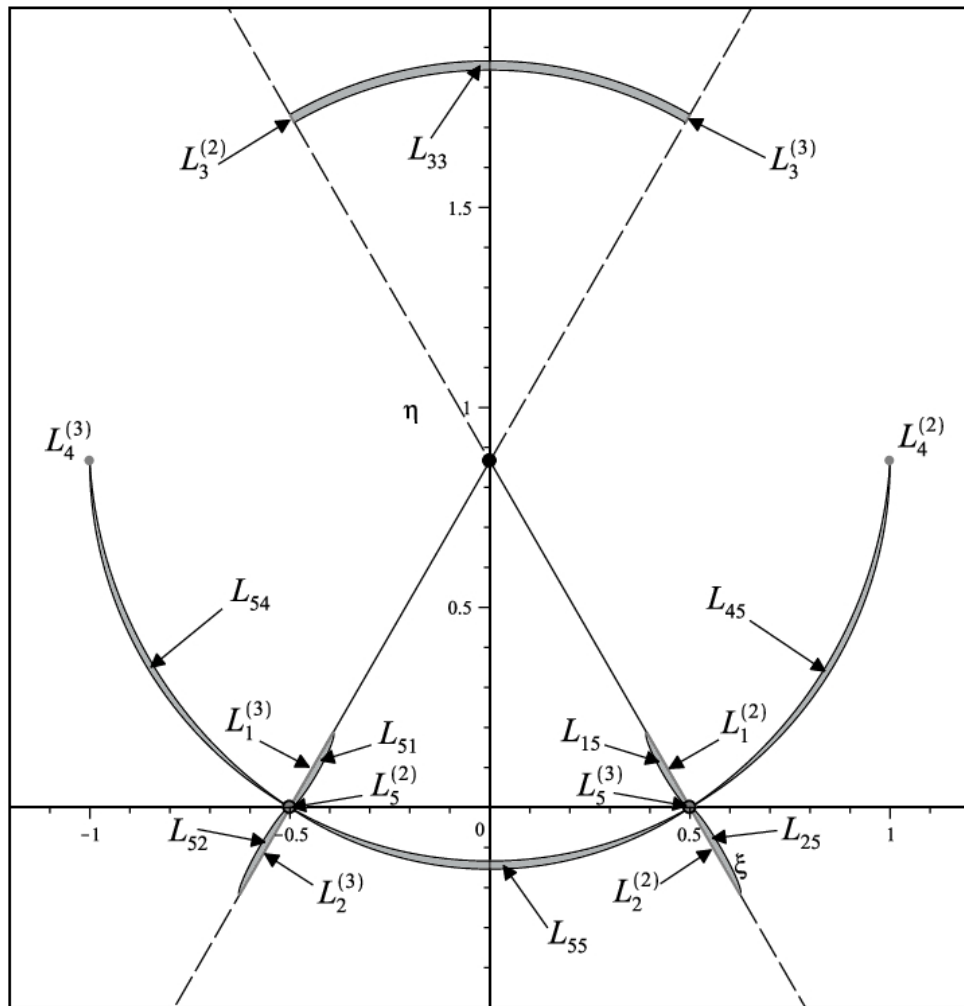
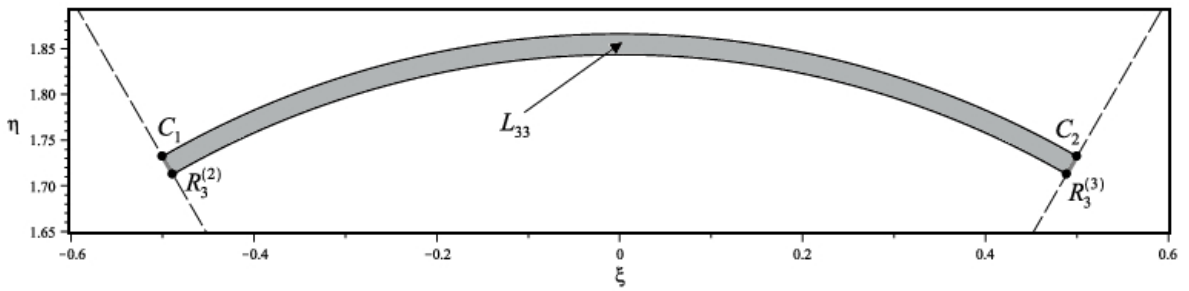


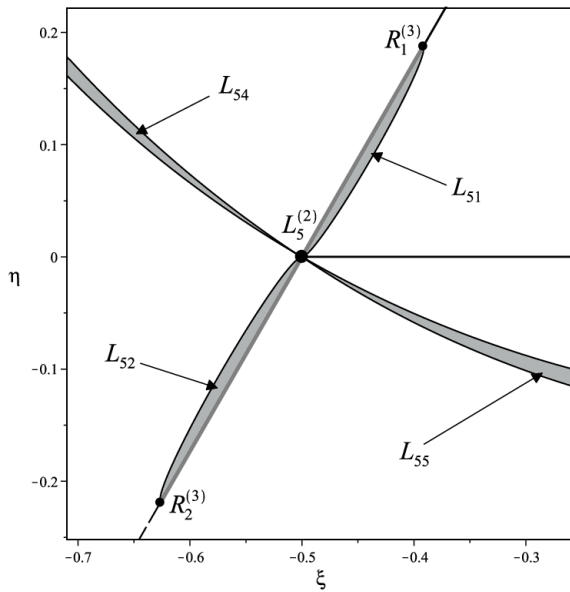
Рис. 1.6: Области возможных положений относительного равновесия

Для того, чтобы различать данные положения относительного равновесия тела P , были введены следующие обозначения. Через L_{ij} будем обозначать положение относительного равновесия тела P , которое при $\mu_2 = 0$ переходит в

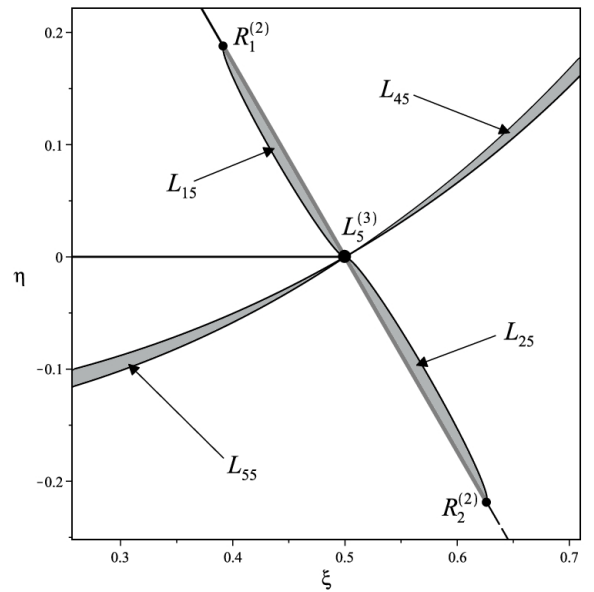
точку либрации $L_i^{(2)}$, а при $\mu_3 = 0$ в точку либрации $L_j^{(3)}$. При выполнении неравенства (1.25) существуют следующие восемь возможных положений относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{33} , L_{45} , L_{51} , L_{52} , L_{54} и L_{55} . Области возможных положений относительного равновесия очень узкие, поэтому они были схематично изображены на Рис. 1.6. Серым цветом обозначены области возможных положений относительного равновесия, в которых может располагаться тело малой массы P .



(а) Область положения относительного равновесия L_{33}



(b) Области вблизи точки $L_5^{(2)}$



(c) Области вблизи точки $L_5^{(3)}$

Рис. 1.7: Увеличенные области положений относительного равновесия тела P

На Рис. 1.7 наиболее важные фрагменты Рис. 1.6 представлены в увеличенном виде. В частности, на Рис. 1.7а схематично представлена область по-

ложения относительного равновесия L_{33} . Области положений относительного равновесия L_{51} , L_{52} , L_{54} , L_{55} вблизи точки $L_5^{(2)}$ схематично представлены на Рис. 1.7b, а области положений относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{45} , L_{55} вблизи точки $L_5^{(3)}$ представлены на Рис. 1.7c.

Области положений относительного равновесия L_{15} и L_{25} с одной стороны ограничены отрезком $R_1^{(2)}R_2^{(2)}$, который является частью прямой проходящей через притягивающие тела P_1 и P_3 , а другая граница определяется из условия Рауса. Аналогично, области положений относительного равновесия L_{51} и L_{52} с одной стороны ограничены отрезком $R_1^{(3)}R_2^{(3)}$, который является частью прямой проходящей через притягивающие тела P_1 и P_2 , а другая граница также определяется из условия Рауса. Область положения относительного равновесия L_{33} сверху ограничена дугой C_1C_2 окружности единичного радиуса с центром в точке P_1 . Слева ограничена отрезком $C_1R_3^{(2)}$, который является частью прямой проходящей через тела P_1 и P_3 , а справа ограничена отрезком $C_2R_3^{(3)}$, который является частью прямой проходящей через тела P_1 и P_2 . Снизу область положения относительного равновесия L_{33} ограничена дугой $R_3^{(2)}R_3^{(3)}$, которая определяется из условия Рауса. Области положений относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} с одной стороны ограничены дугой окружности единичного радиуса с центром в точке P_1 , а с другой стороны дугой, которая определяется из условия Рауса. Эти граничные дуги, соответствующие положениям относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} , пересекаются в треугольных точках либрации $L_4^{(2)}$, $L_5^{(2)}$, $L_4^{(3)}$ и $L_5^{(3)}$. Также стоит отметить, что коллинеарные точки либрации $L_1^{(2)}$, $L_2^{(2)}$ и $L_3^{(2)}$ расположены на отрезках $R_1^{(2)}L_5^{(3)}$, $L_5^{(3)}R_2^{(2)}$ и $C_1R_3^{(2)}$ соответственно. Аналогично, точки либрации $L_1^{(3)}$, $L_2^{(3)}$ и $L_3^{(3)}$ расположены на отрезках $R_1^{(3)}L_5^{(2)}$, $L_5^{(2)}R_2^{(3)}$ и $C_2R_3^{(3)}$ соответственно.

Для дальнейшего исследования важно отметить, что гамильтониан задачи

(1.23) инвариантен относительно преобразования

$$\begin{aligned}\mu_2 &\rightarrow \mu_3, & \mu_3 &\rightarrow \mu_2, \\ \xi &\rightarrow -\xi, & \eta &\rightarrow \eta, \\ p_\xi &\rightarrow p_\xi, & p_\eta &\rightarrow -p_\eta.\end{aligned}\tag{1.28}$$

При указанной замене положения относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{45} переходят в L_{51} , L_{52} , L_{54} соответственно. Оставшиеся два положения относительного равновесия L_{33} и L_{55} при данной замене переходят сами в себя.

1.3. О бифуркации центральных конфигураций

В предельных случаях происходит бифуркация положений относительного равновесия. Четыре положения относительного равновесия L_{51} , L_{52} , L_{54} и L_{55} приближаются к основному телу P_2 , когда значение параметра μ_2 приближается к нулю ($\mu_2 \rightarrow 0$), и в точности совпадают с точкой либрации $L_5^{(2)}$, когда $\mu_2 = 0$. В этом предельном случае тело малой массы P занимает положение основного тела P_2 и образует конфигурацию Лагранжа с телами P_1 и P_3 (см. Рис. 1.5а). Аналогично, четыре положения относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{45} и L_{55} приближаются к основному телу P_3 , когда значение параметра μ_3 приближается к нулю ($\mu_3 \rightarrow 0$), и в точности совпадают с точкой либрации $L_5^{(3)}$, когда $\mu_3 = 0$. В этом предельном случае тело малой массы P занимает положение основного тела P_3 и образует конфигурацию Лагранжа с телами P_1 и P_2 (см. Рис. 1.5b).

Для более детального изучения вопроса бифуркации центральных конфигураций был применен метод малого параметра. Сначала рассмотрим предельный случай $\mu_2 \ll 1$. Для этого введем малый параметр $\varepsilon = \mu_2^{1/3}$, когда $\varepsilon = 0$ система алгебраических уравнений (1.27) имеет частное решение, соответствующее точке либрации $L_5^{(2)}$

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \eta = 0.\tag{1.29}$$

Сначала покажем, что при $\varepsilon \neq 0$ решение системы (1.27) может быть получено в виде сходящегося ряда по степеням малого параметра ε . Для этого сделаем замену переменных по формулам

$$\xi = -\frac{1}{2} + \tilde{\xi}\varepsilon, \quad \eta = \tilde{\eta}\varepsilon. \quad (1.30)$$

В новых переменных уравнения (1.27) имеют вид

$$\begin{aligned} 3\mu_3\tilde{\xi} + \frac{3(1-\mu_3)}{4}(\tilde{\xi} + \sqrt{3}\tilde{\eta}) - \frac{\tilde{\xi}}{(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2)^{3/2}} + O(\varepsilon) &= 0, \\ \frac{3\sqrt{3}(1-\mu_3)}{4}(\tilde{\xi} + \sqrt{3}\tilde{\eta}) - \frac{\tilde{\eta}}{(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2)^{3/2}} + O(\varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

При $\varepsilon = 0$ система алгебраических уравнений (1.31) имеет четыре решения следующего вида

$$\tilde{\xi}_* = \delta_1 \left(\frac{2}{(z^2 + 1)^{3/2} (3 + \sqrt{3}\delta_2 \sqrt{9\mu_3^2 - 9\mu_3 + 3})} \right)^{1/3}, \quad \tilde{\eta}_* = z\tilde{\xi}_*. \quad (1.32)$$

где коэффициенты z , δ_1 и δ_2 находятся по формулам

$$z = \frac{3\sqrt{3}\mu_3 - \sqrt{3} - 2\delta_2 \sqrt{9\mu_3^2 - 9\mu_3 + 3}}{3(\mu_3 - 1)}, \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1. \quad (1.33)$$

Якобиан системы (1.31), вычисленный при $\varepsilon = 0$ на решениях (1.32), имеет вид

$$J = -\frac{27(3\mu_3^2 - 3\mu_3 + 1)}{z^2 + 1} (\sqrt{3}z + 1). \quad (1.34)$$

Принимая во внимание формулы (1.33), легко показать, что выражение (1.34) может обращаться в ноль только при $\mu_3 = 0$. Следовательно, за исключением случая $\mu_3 = 0$ якобиан системы (1.31) отличен от нуля. Таким образом, в соответствии с теоремой о неявной функции система (1.31) при $\varepsilon \neq 0$ имеет четыре решения зависящих от малого параметра ε , то есть исходная система (1.27) имеет четыре решения. Используя метод аналитического продолжения,

приведенные выше решения можно записать в виде следующих сходящихся рядов

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{1}{2} + \xi_1\varepsilon + \xi_2\varepsilon^2 + \xi_3\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \\ \eta &= \eta_1\varepsilon + \eta_2\varepsilon^2 + \eta_3\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),\end{aligned}\tag{1.35}$$

где $\xi_1 = \tilde{\xi}_*$, $\eta_1 = \tilde{\eta}_*$.

Решения (1.35) описывают положения относительного равновесия L_{51} , L_{52} , L_{54} и L_{55} , рождающиеся из треугольной точки либрации $L_5^{(2)}$ при $\varepsilon \ll 1$. Отметим также, что в формулах (1.32), (1.33) $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$ соответствуют положению относительного равновесия L_{51} ; $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ положению относительного равновесия L_{55} ; $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 1$ положению относительного равновесия L_{52} ; $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = -1$ положению равновесия L_{54} .

Аналогично для $\mu_3 \ll 1$ положения относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{45} и L_{55} можно построить в виде сходящихся рядов по малому параметру ε ($\varepsilon = \mu_3^{1/3}$)

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2} + \xi_1\varepsilon + \xi_2\varepsilon^2 + \xi_3\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \\ \eta &= \eta_1\varepsilon + \eta_2\varepsilon^2 + \eta_3\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),\end{aligned}\tag{1.36}$$

где ξ_1 , η_1

$$\xi_1 = \delta_1 \left(\frac{2}{(z^2 + 1)^{3/2} \left(3 + \sqrt{3}\delta_2 \sqrt{9\mu_2^2 - 9\mu_2 + 3} \right)} \right)^{1/3}, \quad \eta_1 = z\xi_1.\tag{1.37}$$

а z имеет следующий вид

$$z = -\frac{3\sqrt{3}\mu_2 - \sqrt{3} - 2\delta_2 \sqrt{9\mu_2^2 - 9\mu_2 + 3}}{3(\mu_2 - 1)},\tag{1.38}$$

В уравнениях (1.37), (1.38) значения коэффициентов $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$ соответствуют положению относительного равновесия L_{25} ; $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ положению относительного равновесия L_{45} ; $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = 1$ положению относительного равновесия L_{15} ; $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = -1$ положению относительного равновесия L_{55} .

При малых значениях параметра μ_2 положения относительного равновесия L_{5j} располагаются в узких областях, исходящих из точки либрации $L_5^{(2)}$, эти области изображены серым цветом на Рис. 1.8. При $\mu_2 \ll 1$ границы указанных областей были получены аналитически в виде сходящегося ряда по малому параметру $\mu_2^{1/3}$, аналитические выражения для границ областей положений относительного равновесия L_{5j} ($j = 1, 2, 4, 5$) приведены в Таблице 1.1. На Рис. 1.8 при $\mu_2 \ll 1$ границы областей положений относительного равновесия L_{5j} ($j = 1, 2, 4, 5$) выделены пунктиром, и для них введены следующие обозначения $\Gamma_{5j}^{(0)}$ и $\Gamma_{5j}^{(R)}$. Границы $\Gamma_{51}^{(0)}$ и $\Gamma_{52}^{(0)}$ положений относительного равновесия L_{51} и L_{52} задаются предельной задачей трёх тел ($\mu_3 = 0$), а границы $\Gamma_{54}^{(0)}$ и $\Gamma_{55}^{(0)}$ положений относительного равновесия L_{54} и L_{55} задаются предельной задачей двух тел ($\mu_2 = 0$ и $\mu_3 = 0$). Границы $\Gamma_{51}^{(R)}$, $\Gamma_{52}^{(R)}$, $\Gamma_{54}^{(R)}$ и $\Gamma_{55}^{(R)}$ положений относительного равновесия L_{51} , L_{52} , L_{54} и L_{55} задаются условием Рауса (1.25).

Таблица 1.1: Уравнения границ положений относительного равновесия L_{5j} .

	$\mu_3 \rightarrow 0$	$\mu_3 \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} + O(\mu_2)$
L_{51}	$\xi + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\eta = 0$	$\xi + \frac{1}{2} + k_1\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$
L_{52}	$\xi + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\eta = 0$	$\xi + \frac{1}{2} + k_1\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$
L_{54}	$\xi + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$	$\xi + \frac{1}{2} + k_2\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$
L_{55}	$\xi + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$	$\xi + \frac{1}{2} + k_2\eta + O(\mu_2^{1/3}) = 0$

Приближенные значения коэффициентов k_1 и k_2 в формулах таблицы 1.1 принимают вид

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (4 + 3\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{46}}{2} - 2\sqrt{3} \right) \approx -0.60119039, \\
 k_2 &= -(4 - 3\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{46}}{2} + 2\sqrt{3} \right) \approx 1.66336660.
 \end{aligned}
 \tag{1.39}$$

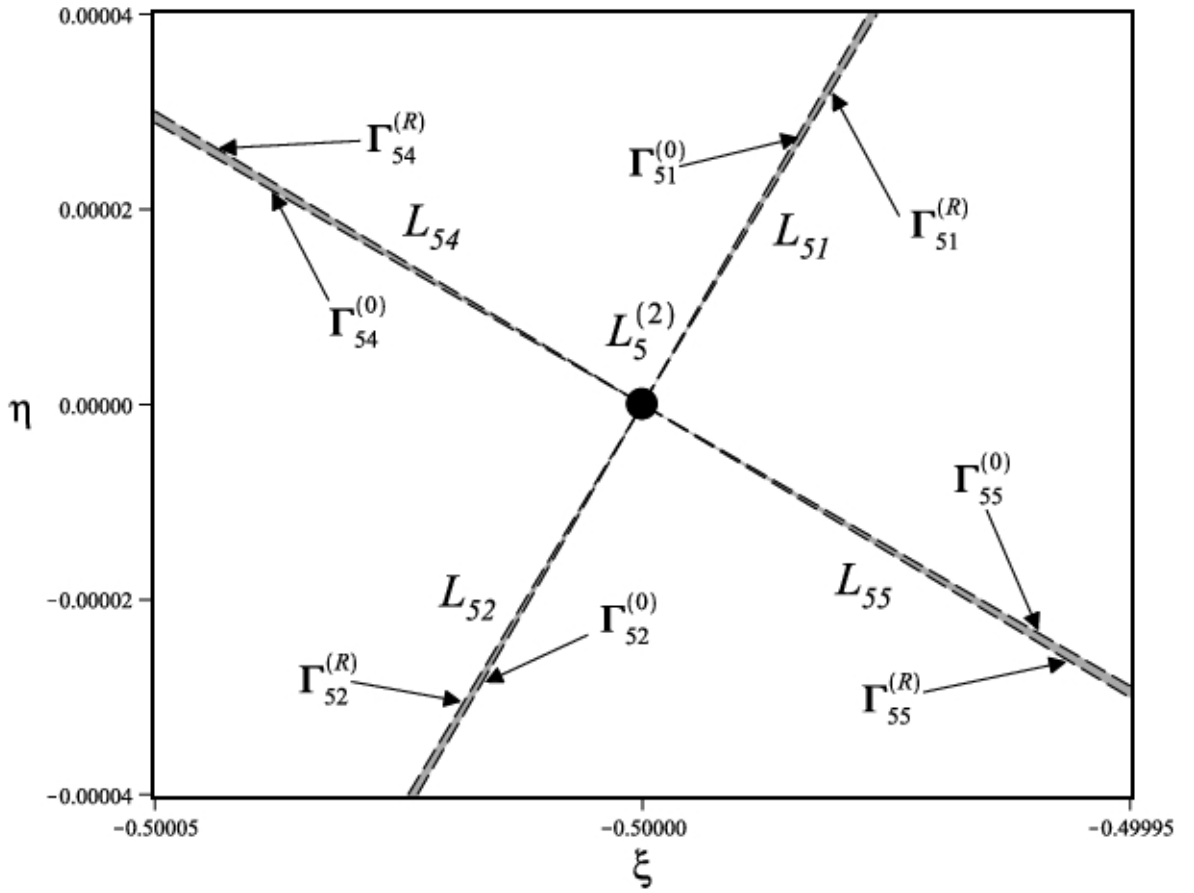


Рис. 1.8: Области положений относительного равновесия L_{5j} ($j = 1, 2, 4, 5$) в окрестности точки либрации $L_5^{(2)}$

Отметим, что значения коэффициентов k_1 и k_2 близки к $-\sqrt{3}/3$ и $\sqrt{3}$ соответственно, поэтому области существования положений относительного равновесия L_{5j} очень узкие.

Аналогично, при малых значениях параметра μ_3 положения относительного равновесия L_{i5} ($i = 1, 2, 4, 5$) располагаются в узких областях, исходящих из точки либрации $L_5^{(3)}$, данные области показаны на Рис. 1.9. При $\mu_3 \ll 1$ границы указанных областей получены аналитически в виде сходящегося ряда по малому параметру $\mu_3^{1/3}$, границы областей положений относительного равновесия L_{i5} приведены в таблице 1.2. На Рис. 1.9 при $\mu_3 \ll 1$ границы областей положений относительного равновесия L_{i5} ($i = 1, 2, 4, 5$) выделены пунктиром, и для них введены следующие обозначения $\Gamma_{i5}^{(0)}$ и $\Gamma_{i5}^{(R)}$. Границы $\Gamma_{15}^{(0)}$ и $\Gamma_{25}^{(0)}$ по-

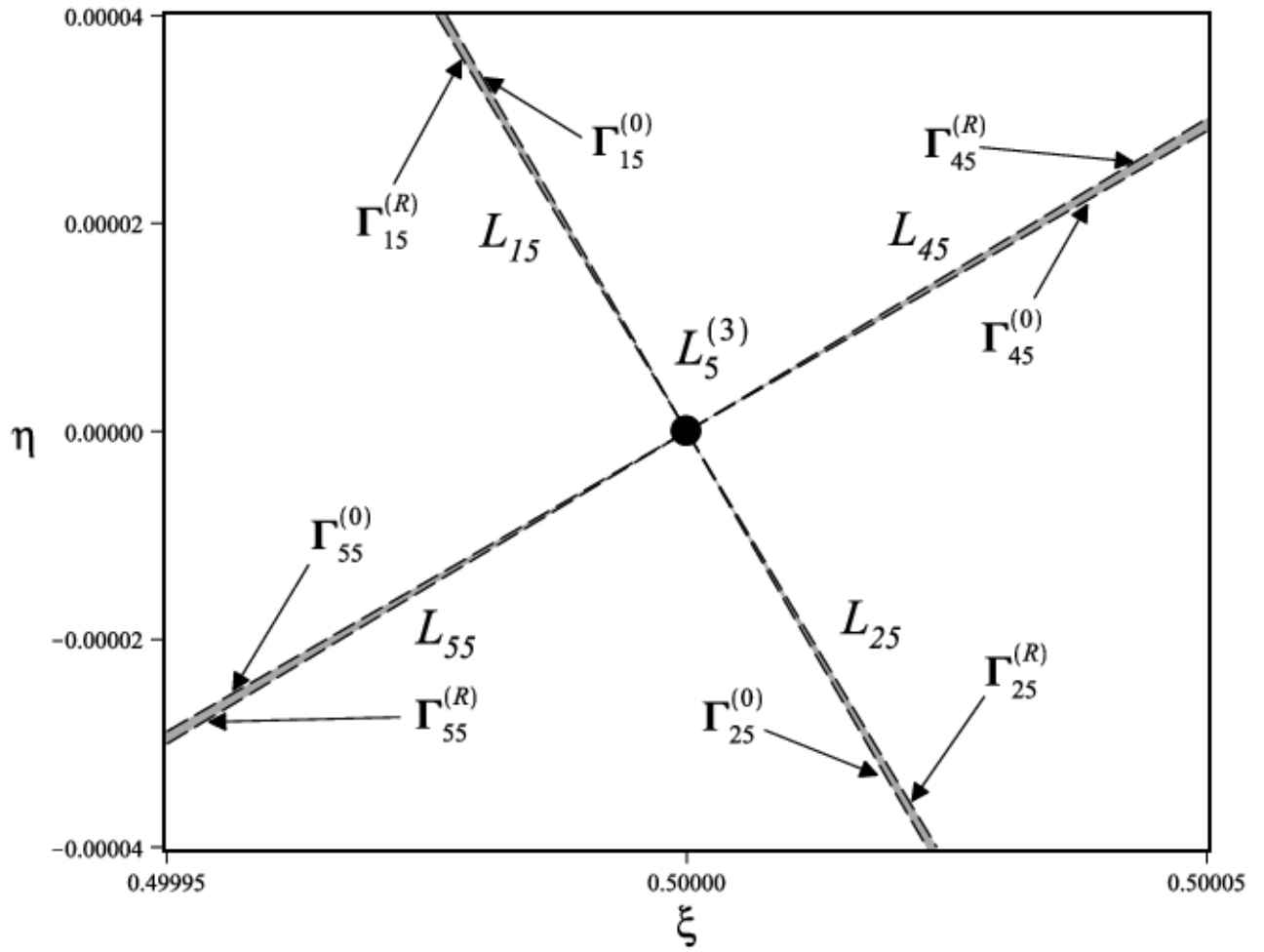


Рис. 1.9: Области положений относительного равновесия L_{i5} ($i = 1, 2, 4, 5$) в окрестности точки либрации $L_5^{(3)}$

положений относительного равновесия L_{15} и L_{25} задаются предельной задачей трёх тел ($\mu_2 = 0$), а границы $\Gamma_{45}^{(0)}$ и $\Gamma_{55}^{(0)}$ положений относительного равновесия L_{45} и L_{55} задаются предельной задачей двух тел ($\mu_2 = 0$ и $\mu_3 = 0$). Границы $\Gamma_{15}^{(R)}$, $\Gamma_{25}^{(R)}$, $\Gamma_{45}^{(R)}$ и $\Gamma_{55}^{(R)}$ положений относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{45} и L_{55} задаются условием Рауса (1.25).

Приближенные значения коэффициентов k_1 и k_2 в формулах таблицы 1.2

Таблица 1.2: Уравнения границ положений относительного равновесия L_{i5} .

	$\mu_2 \rightarrow 0$	$\mu_2 \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} + O(\mu_3)$
L_{15}	$\xi - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\eta = 0$	$\xi - \frac{1}{2} + \tilde{k}_1\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$
L_{25}	$\xi - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\eta = 0$	$\xi - \frac{1}{2} + \tilde{k}_1\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$
L_{45}	$\xi - \frac{1}{2} - \sqrt{3}\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$	$\xi - \frac{1}{2} + \tilde{k}_2\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$
L_{55}	$\xi - \frac{1}{2} - \sqrt{3}\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$	$\xi - \frac{1}{2} + \tilde{k}_2\eta + O(\mu_3^{1/3}) = 0$

принимают вид

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1 &= -k_1 = -\left(4 + 3\sqrt{2}\right) \left(\frac{\sqrt{46}}{2} - 2\sqrt{3}\right) \approx 0.60119039, \\ \tilde{k}_2 &= -k_2 = \left(4 - 3\sqrt{2}\right) \left(\frac{\sqrt{46}}{2} + 2\sqrt{3}\right) \approx -1.66336660.\end{aligned}\tag{1.40}$$

Как и выше, отметим, что значения коэффициентов \tilde{k}_1 и \tilde{k}_2 близки к $\sqrt{3}/3$ и $-\sqrt{3}$ соответственно, поэтому области существования положений относительного равновесия L_{i5} очень узкие.

1.4. Предельные случаи плоской круговой ограниченной задачи четырёх тел

Если одна из масс притягивающих тел P_2 или P_3 является малой ($\mu_2 \rightarrow 0$ или $\mu_3 \rightarrow 0$), то положения относительного равновесия тела малой массы P располагаются либо вблизи точек либрации $L_1^{(2)}$, $L_2^{(2)}$, $L_3^{(2)}$, $L_4^{(2)}$ или $L_1^{(3)}$, $L_2^{(3)}$, $L_3^{(3)}$, $L_4^{(3)}$, либо находятся вблизи притягивающего тела (P_2 или P_3), масса которого является малой. Для определенности будем предполагать, что масса притягивающего тела P_3 много меньше масс тел P_1 и P_2 . Тогда в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел в рассматриваемой здесь постановке возмож-

ны следующие предельные случаи.

1. При $\mu_3 \rightarrow 0$ положения относительного равновесия приближаются к точке либрации и в предельном случае, когда масса притягивающего тела P_3 обращается в ноль ($\mu_3 = 0$), приходим к плоской круговой ограниченной задаче трёх тел, которая хорошо изучена.
2. Положения относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{45} и L_{55} тела P располагаются вблизи притягивающего тела P_3 .

Рассмотрим второй случай более подробно. Выполним унивалентную каноническую замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi - \frac{1}{2}, & x_2 &= \eta, \\ y_1 &= p_\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \mu_2 - \mu_3), & y_2 &= p_\eta - \frac{1}{2}(1 + \mu_2 - \mu_3), \end{aligned} \quad (1.41)$$

при помощи которой начало системы координат перенесем в точку, где расположено тело P_3 . Для описания движения тела малой массы P в окрестности притягивающего тела P_3 выполним масштабирующую каноническую замену переменных

$$\tilde{x}_i = \mu_3^{-1/3} x_i, \quad \tilde{y}_i = \mu_3^{-1/3} y_i, \quad i = 1, 2 \quad (1.42)$$

с валентностью ($c = \mu_3^{-2/3}$), и разложим функцию Гамильтона задачи в ряд по малому параметру μ_3 .

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{1}{2} (\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2) + \tilde{x}_2 \tilde{y}_1 - \tilde{x}_1 \tilde{y}_2 + \frac{1}{8} (1 - 9\mu_2) \tilde{x}_1^2 - \\ &- \frac{1}{8} (5 - 9\mu_2) \tilde{x}_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - \mu_2) \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2}} + O(\mu_3^{1/3}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Если в (1.43) положить $\mu_3 = 0$, то приходим к задаче, которая является аналогом задачи Хилла: т.е. задаче о движении тела малой массы P в гравитационном поле притягивающего тела P_3 , перемещающегося по круговой орбите с центром,

который расположен в центре масс системы из трёх притягивающих тел P_1 , P_2 и P_3 .

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [45–47].

Глава 2

Исследование устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия тела малой массы

2.1. Линейный анализ устойчивости положений относительного равновесия

Исследование устойчивости положений относительного равновесия тела P начнём с анализа устойчивости в линейном приближении. С этой целью в окрестности указанных положений относительного равновесия введём локальные канонические переменные q_1, q_2, p_1, p_2

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_* + q_1, & \eta &= \eta_* + q_2, \\ p_\xi &= -\eta_* + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \mu_2 - \mu_3) + p_1, & p_\eta &= \xi_* + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3) + p_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

и разложим функцию Гамильтона (1.23) в ряд по новым каноническим переменным q_i, p_i

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + H^{(5)}, \quad (2.2)$$

где H_k — форма степени k , а через $H^{(5)}$ обозначен сходящийся ряд, который начинается с членов не ниже пятой степени.

Рассмотрим линеаризованную в окрестности положения относительного равновесия систему, которая является канонической системой линейных дифференциальных уравнений, с функцией Гамильтона H_2

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(aq_1^2 + bq_2^2) + cq_1q_2 + p_1q_2 - p_2q_1, \quad (2.3)$$

где

$$a = -\frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1^5} (3\xi_*^2 - \rho_1^2) + \frac{\mu_2}{\rho_2^5} \left(\rho_2^2 - 3 \left(\xi_* + \frac{1}{2} \right)^2 \right) + \frac{\mu_3}{\rho_3^5} \left(\rho_3^2 - 3 \left(\xi_* - \frac{1}{2} \right)^2 \right), \quad (2.4)$$

$$b = -\frac{1 - \mu_2 - \mu_3}{\rho_1^5} \left(3 \left(\eta_* - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \rho_1^2 \right) + \frac{\mu_2}{\rho_2^5} (\rho_2^2 - 3\eta_*^2) + \frac{\mu_3}{\rho_3^5} (\rho_3^2 - 3\eta_*^2), \quad (2.5)$$

$$c = -\frac{3(1 - \mu_2 - \mu_3)}{\rho_1^5} \xi_* \left(\eta_* - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{3\mu_2}{\rho_2^5} \left(\xi_* + \frac{1}{2} \right) \eta_* - \frac{3\mu_3}{\rho_3^5} \left(\xi_* - \frac{1}{2} \right) \eta_*. \quad (2.6)$$

Характеристическое уравнение линейной системы имеет вид

$$\lambda^4 + (a + b + 2) \lambda^2 + ab - c^2 - a - b + 1 = 0. \quad (2.7)$$

На основании теоремы Ляпунова об устойчивости в линейном приближении [20, 21], для устойчивости линейной системы необходимо, чтобы корни её характеристического уравнения имели нулевые вещественные части. Данное условие будет выполнено, если значения параметров μ_2 и μ_3 удовлетворяют следующим неравенствам

$$\begin{aligned} a + b + 2 &> 0, \\ ab - c^2 - a - b + 1 &> 0, \\ a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab + 8(a + b) &> 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если хотя бы одно из условий (2.8) не выполнено, то характеристическое уравнение имеет корень с положительной вещественной частью. В этом случае на основании теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению [20, 21] положение относительного равновесия неустойчиво как в линейном

приближении, так и в полной нелинейной системе с гамильтонианом (2.2), т.е. имеет место неустойчивость по Ляпунову.

Численно было установлено, что положение относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{33} , L_{51} , L_{52} неустойчивы по Ляпунову. Положения относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} в зависимости от параметров задачи могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми в линейном приближении.

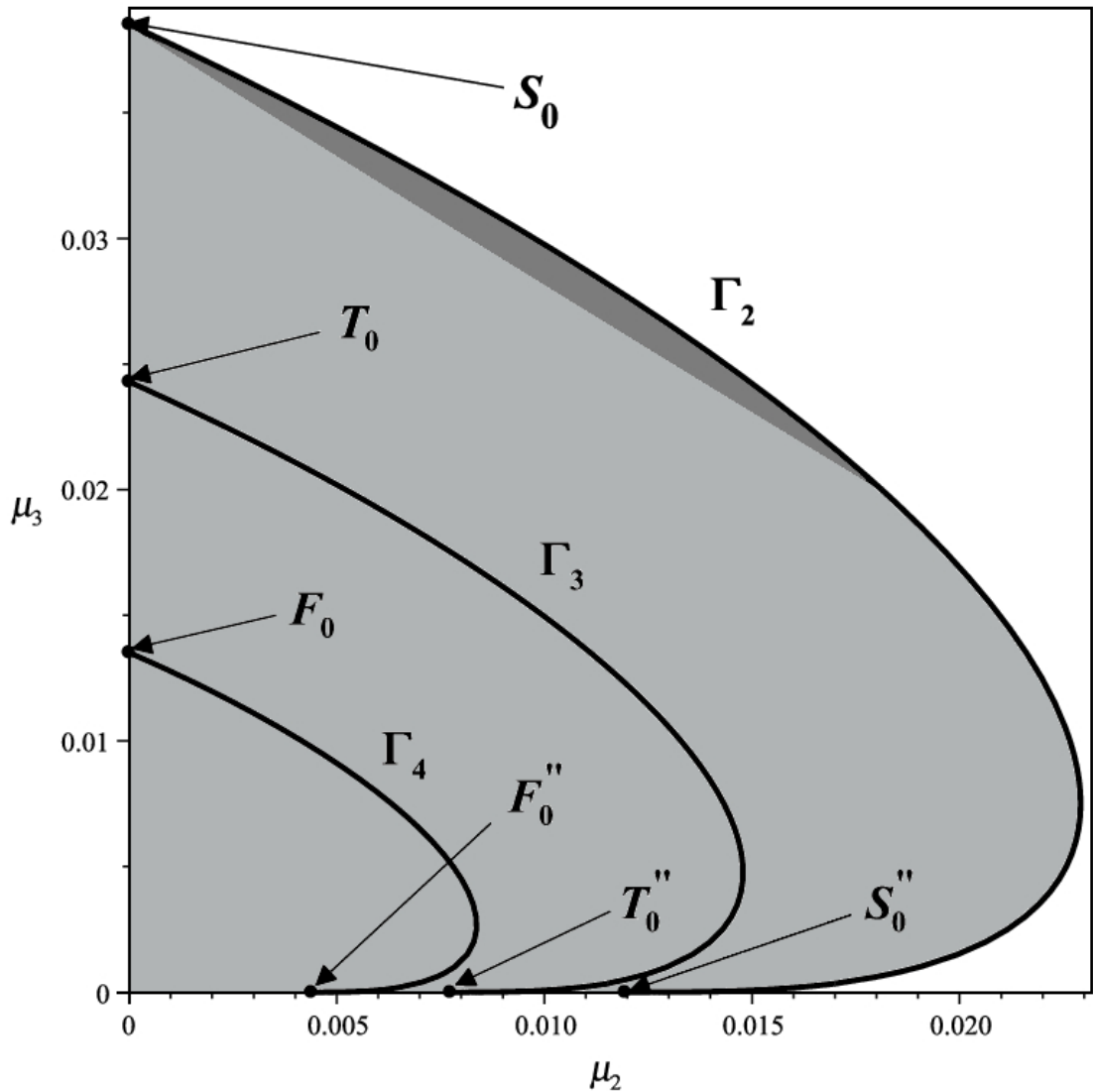


Рис. 2.1: Диаграмма устойчивости положения относительного равновесия L_{45} в линейном приближении

На Рис. 2.1, Рис. 2.2 и Рис. 2.3 приведены диаграммы устойчивости положений относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} в линейном приближении

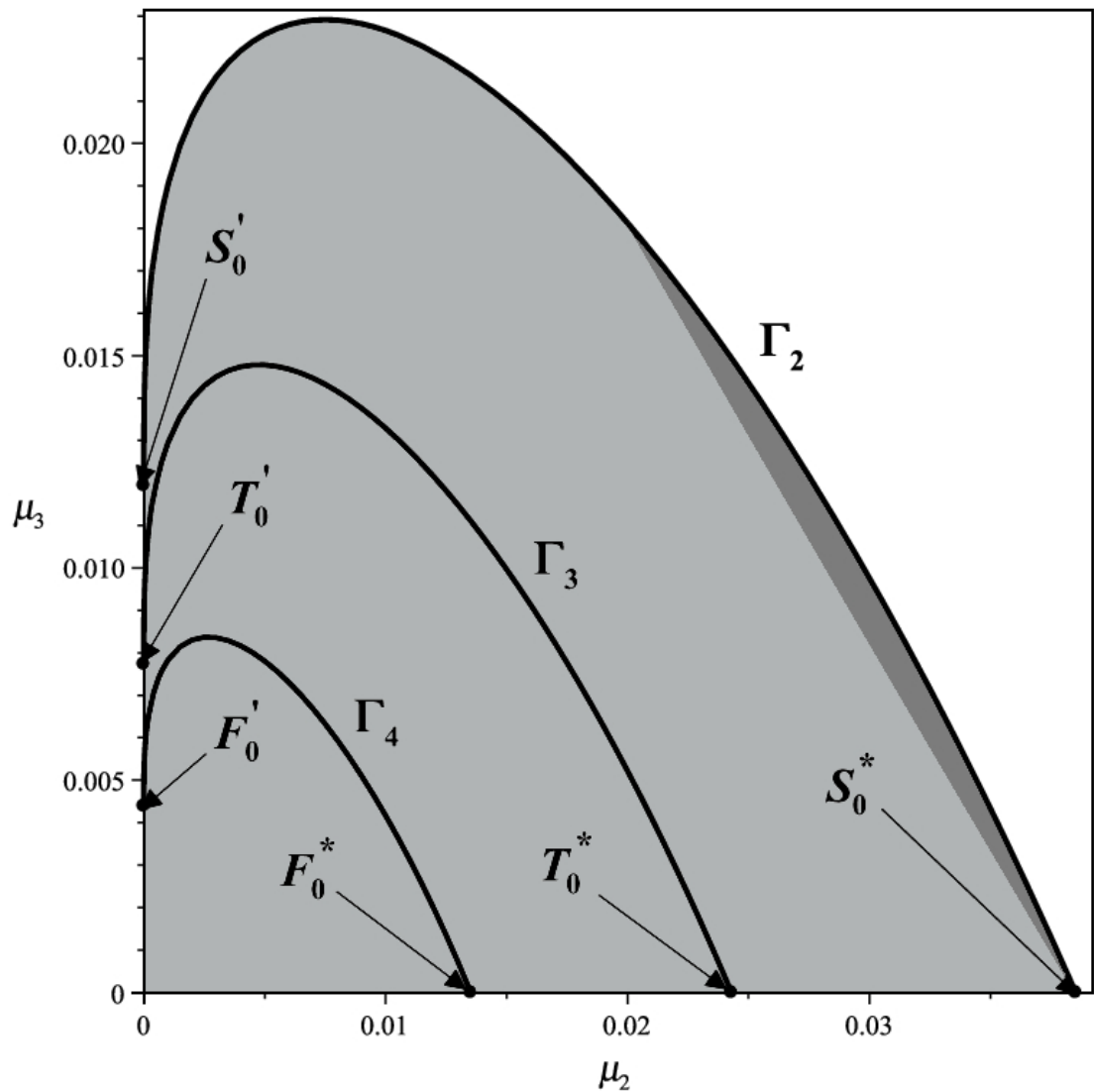


Рис. 2.2: Диаграмма устойчивости положения относительного равновесия L_{54} в линейном приближении

соответственно. Область неустойчивости закрашена белым цветом, а область устойчивости в линейном приближении светло-серым цветом. Темно-серым цветом изображена область, где положение относительного равновесия тела P устойчиво в линейном приближении, но имеет место неустойчивость лагранжева решения, описывающего движение притягивающих тел, что приводит к неустойчивости соответствующей центральной конфигурации из четырех тел. В предельном случае при $\mu_2 = 0$ положение относительного равновесия L_{45} переходит в точку либрации $L_4^{(2)}$, которая устойчива по Ляпунову [25]. Аналогично

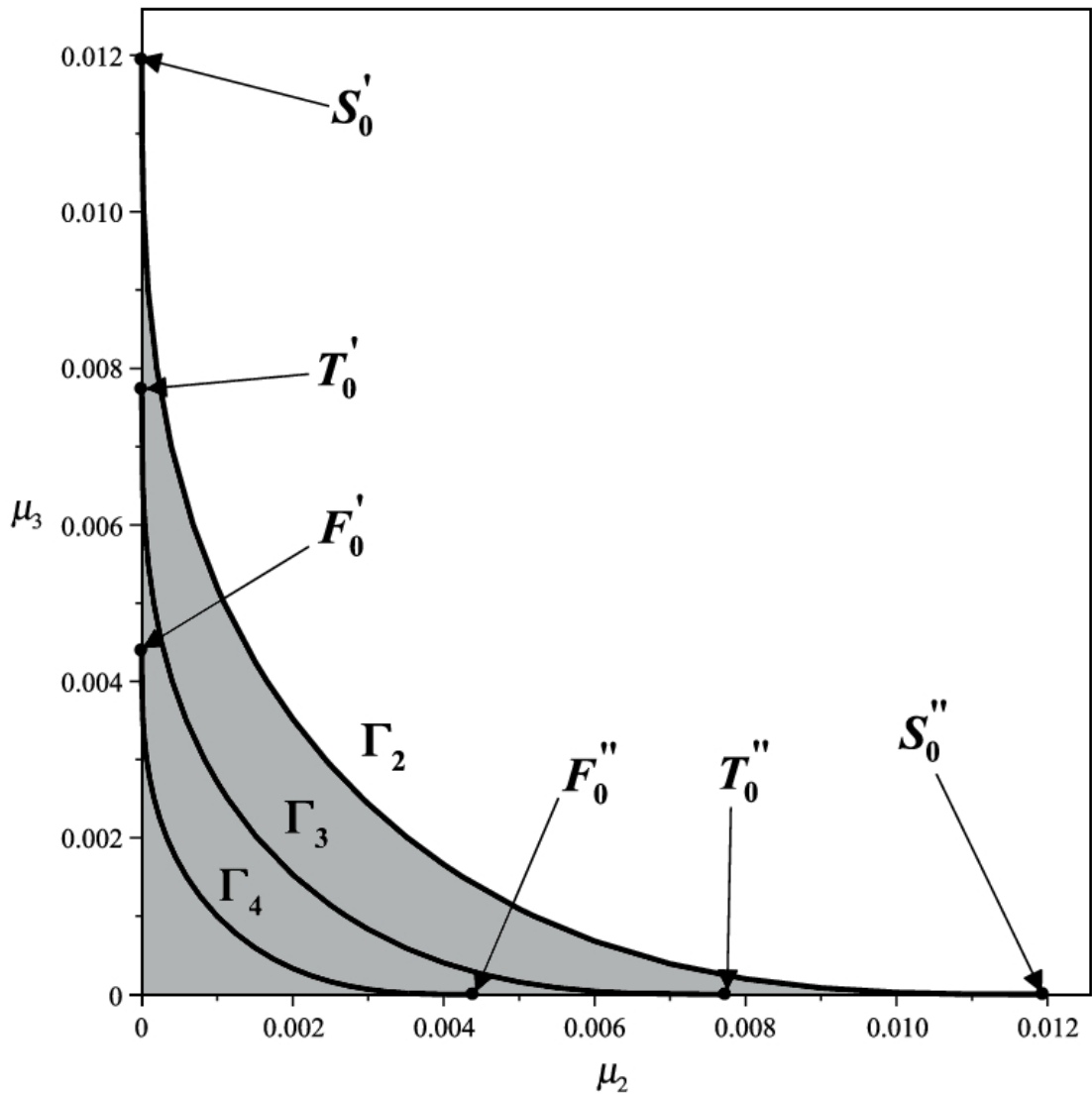


Рис. 2.3: Диаграмма устойчивости положения относительного равновесия L_{55} в линейном приближении

при $\mu_3 = 0$ положение относительного равновесия L_{54} переходит в устойчивую по Ляпунову точку либрации $L_4^{(3)}$.

Вне областей устойчивости в линейном приближении положения относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} неустойчивы по Ляпунову. Устойчивые в линейном приближении положения относительного равновесия могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми по Ляпунову. Для получения строгих выводов об устойчивости положений относительного равновесия по Ляпунову, требуется провести нелинейный анализ.

2.2. Нелинейный анализ устойчивости положений относительного равновесия

Нелинейный анализ устойчивости будем проводить на основании хорошо разработанной к настоящему времени методики исследования устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Суть этой методики состоит в построении канонической замены переменных, приводящей функцию Гамильтона задачи к наиболее простой (нормальной) форме. Задача об устойчивости по Ляпунову исходной гамильтоновой системы сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову нормализованной системы. Для решения последней задачи можно применить известные достаточные условия устойчивости и неустойчивости гамильтоновых систем [1, 25, 31, 55, 69], полученные на основании теории КАМ и общей теории устойчивости А.М. Ляпунова.

Далее будем предполагать, что значения параметров задачи принадлежат одной из областей устойчивости в линейном приближении. В этом случае корни характеристического уравнения (2.7) имеют вид $\lambda_{1,2,3,4} = \pm i\omega_{1,2}$, где

$$\omega_i^2 = \frac{1}{2} \left(a + b + 2 + (-1)^{i+1} \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2 + 8(a+b)} \right), \quad (i = 1, 2). \quad (2.9)$$

Нормализацию функции Гамильтона нашей задачи проведем в два этапа. На первом этапе выполним линейную каноническую замену переменных $q_i, p_i \rightarrow Q_i, P_i$, которую запишем в следующей матричной форме

$$Y = \mathbf{N} \cdot X, \quad (2.10)$$

где $X = (q_1, q_2, p_1, p_2)^T$, $Y = (Q_1, Q_2, P_1, P_2)^T$. Вид матрицы \mathbf{N} линейной замены приведен в Приложении А.1.

Замена переменных (2.10) приводит к нормальной форме квадратичную часть функции Гамильтона (2.2). Если в линейной системе с гамильтонианом (2.3) нет резонансов первого и второго порядка (т.е. $\omega_2 \neq 0$ и $\omega_1 \neq \omega_2$), то в

новых переменных Q_i, P_i гамильтониан задачи принимает вид

$$H = \frac{1}{2}\omega_1 (Q_1^2 + P_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2 (Q_2^2 + P_2^2) + H^{(3)}. \quad (2.11)$$

Через $H^{(3)}$ в (2.11) обозначена не нормализованная пока часть функции Гамильтона, представленная сходящимся рядом, который начинается с членов не ниже третьего порядка.

В случае резонанса второго порядка ($\omega_1 = \omega_2$) с помощью линейной канонической замены переменных $q_i, p_i \rightarrow Q_i, P_i$ функция Гамильтона задачи приводится к виду

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2) + \omega (Q_1 P_2 - Q_2 P_1) + H^{(3)}, \quad (2.12)$$

где

$$\omega^2 = \frac{a + b + 2}{2}. \quad (2.13)$$

На втором этапе выполним нормализацию функции Гамильтона до членов четвертого порядка включительно. Это можно сделать с помощью нелинейной канонической близкой к тождественной замены переменных $Q_i, P_i \rightarrow u_i, v_i$, которую в данной работе будем строить методом Депри-Хори [25, 60]. При построении этой нелинейной замены переменных необходимо отдельно рассматривать нерезонансный случай и случаи резонансов. Это связано с тем, что при наличии в системе резонансов нормальная форма функции Гамильтона содержит дополнительные резонансные слагаемые. В рассматриваемой здесь автономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы резонансы возникают при рациональном отношении частот ω_1 и ω_2 линейной системы. Наиболее существенными для решения вопроса об устойчивости являются резонансы до четвертого порядка включительно. В данной задаче будут отдельно рассмотрены резонансы второго ($\omega_1 = \omega_2$), третьего ($\omega_1 = 2\omega_2$) и четвертого порядка ($\omega_1 = 3\omega_2$).

На Рис. 2.1, Рис. 2.2 и Рис. 2.3 в плоскости параметров задачи (μ_2 и μ_3) изображены кривые Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 , на которых реализуются резонансы второго, третьего и четвертого порядка соответственно. Отметим, что кривая Γ_2 является границей области устойчивости в линейном приближении. При малых значениях параметра задачи ($\mu_2 \ll 1$ или $\mu_3 \ll 1$) поведение кривых Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 может быть описано аналитическими соотношениями, которые будут получены на основании метода малого параметра в параграфе 2.3.

Численно было установлено, что кривые Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 , изображенные на диаграмме устойчивости, отвечающей положению относительного равновесия L_{45} (Рис. 2.1), пересекают ось $\mu_2 = 0$ в точках $S_0(0; 0.03852089)$, $T_0(0; 0.02429389)$, $F_0(0; 0.01351602)$, и пересекают ось $\mu_3 = 0$ в точках $S_0''(0.01194203; 0)$, $T_0''(0.00773367; 0)$, $F_0''(0.00439086; 0)$ соответственно. Кривые Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 , изображенные на диаграмме устойчивости, отвечающей положению относительного равновесия L_{54} (Рис. 2.2), пересекают ось $\mu_2 = 0$ в точках $S_0'(0; 0.01194203)$, $T_0'(0; 0.00773367)$, $F_0'(0; 0.00439086)$, и пересекают ось $\mu_3 = 0$ в точках $S_0^*(0.03852089; 0)$, $T_0^*(0.02429389; 0)$, $F_0^*(0.01351602; 0)$ соответственно. Аналогично было установлено, что на диаграмме устойчивости для положения относительного равновесия L_{55} (Рис. 2.3) кривые Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 пересекают ось $\mu_2 = 0$ в точках $S_0'(0; 0.01194203)$, $T_0'(0; 0.00773367)$, $F_0'(0; 0.00439086)$, а ось $\mu_3 = 0$ в точках $S_0''(0.01194203; 0)$, $T_0''(0.00773367; 0)$, $F_0''(0.00439086; 0)$ соответственно. Стоит отметить, что кривые Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 входят в точки S_0' , T_0' и F_0' , касаясь оси $\mu_2 = 0$, а в точки S_0'' , T_0'' и F_0'' , касаясь оси $\mu_3 = 0$.

Коротко приведем необходимые в дальнейшем достаточные условия устойчивости и неустойчивости по Ляпунову автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. В случае, когда в системе нет резонансов до четвертого порядка включительно, при помощи упомянутой выше канонической замены переменных $Q_i, P_i \rightarrow u_i, v_i$ функция Гамильтона (2.11) приводится к

следующей нормальной форме [1, 25, 55]

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right), \quad (2.14)$$

где φ_i, r_i — канонические переменные, введенные по формулам $u_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i$, $v_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i$.

Согласно теореме Арнольда-Мозера [1, 25, 55], при выполнении неравенства

$$\Delta \equiv c_{02} \omega_1^2 + c_{11} \omega_1 \omega_2 + c_{20} \omega_2^2 \neq 0 \quad (2.15)$$

положение равновесия системы с гамильтонианом (2.14) устойчиво по Ляпунову. Если же неравенство (2.15) не выполняется, то для решения вопроса об устойчивости необходимо проводить анализ с учетом членов выше четвертой степени в разложении гамильтониана (2.2).

При резонансе третьего порядка ($\omega_1 = 2\omega_2$) функция Гамильтона (2.11) приводится к нормальной форме

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 - Ar_2 \sqrt{r_1} \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O\left((r_1 + r_2)^2\right). \quad (2.16)$$

В этом случае при выполнении неравенства

$$A \neq 0, \quad (2.17)$$

положение равновесия системы с гамильтонианом (2.16) неустойчиво [22, 25].

При резонансе четвертого порядка ($\omega_1 = 3\omega_2$) функция Гамильтона (2.11) приводится к нормальной форме

$$H = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + Br_2 \sqrt{r_1 r_2} \sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right). \quad (2.18)$$

Согласно теореме А.П. Маркеева [22, 23, 25], для устойчивости положения равновесия системы с гамильтонианом (2.18) необходимо потребовать выполнения неравенства

$$\left|3\sqrt{3}B\right| < |C|, \quad (2.19)$$

где $C = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$. Если же неравенство (2.19) выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость положения равновесия. В предельном случае, когда выполняется равенство $|3\sqrt{3}B| = |C|$, исследование устойчивости необходимо проводить с учетом членов не ниже шестой степени в разложении гамильтониана задачи [28].

При резонансе второго порядка ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) функция Гамильтона (2.12) приводится к нормальной форме

$$H = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) + \omega (u_1 v_2 - u_2 v_1) + (u_1^2 + u_2^2) \left(A (u_1^2 + u_2^2) + B (u_1 v_2 - u_2 v_1) + C (v_1^2 + v_2^2) \right) + H^{(6)}. \quad (2.20)$$

Согласно теореме А.Г. Сокольского [31, 69], при выполнении неравенства

$$A > 0, \quad (2.21)$$

положение равновесия системы с гамильтонианом (2.20) устойчиво по Ляпунову, а при выполнении этого неравенства с противоположным знаком имеет место неустойчивость положения равновесия. В предельном случае $A = 0$ требуется проводить анализ устойчивости с учетом членов не ниже шестой степени в разложении гамильтониана задачи.

Результаты нелинейного анализа устойчивости положений относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} представлены на диаграммах устойчивости по Ляпунову, изображенных на Рис. 2.4, Рис. 2.5 и Рис. 2.6 соответственно. В областях линейной устойчивости положений относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} вне резонансных кривых Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 для всех значений параметров задачи (μ_2 и μ_3) численно были найдены значения коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона (2.14). Численные расчеты показали, что условия теоремы Арнольда-Мозера (2.15) не выполняются только на кривой Γ_Δ , которая на Рис. 2.4, Рис. 2.5 и Рис. 2.6 изображена сплошной серой линией. Таким образом при отсутствии резонансов до четвертого порядка включительно, а также вне

кривой Γ_Δ положения относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} устойчивы по Ляпунову.

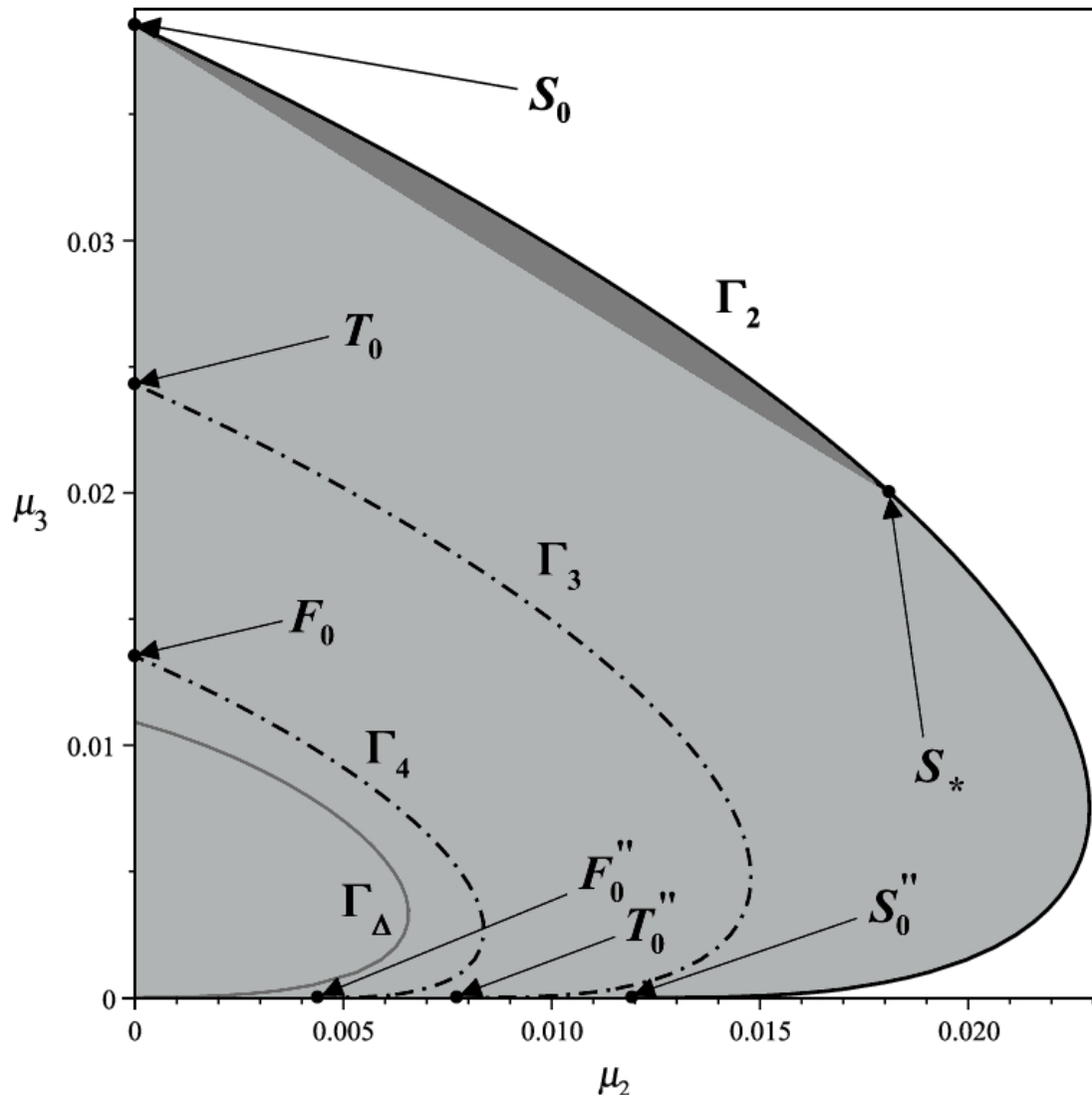


Рис. 2.4: Диаграмма устойчивости по Ляпунову положения относительного равновесия L_{45}

Численно установлено, что положения относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} при всех значениях параметров (μ_2 и μ_3), отвечающих резонансу третьего порядка, коэффициент A нормальной формы (2.16) отличен от нуля. Поэтому на резонансных кривых Γ_3 , изображенных на Рис. 2.4, Рис. 2.5 и Рис. 2.6 положения относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} неустойчивы. Для всех значений параметров задачи, отвечающих резонансной кривой Γ_4 , также численно были

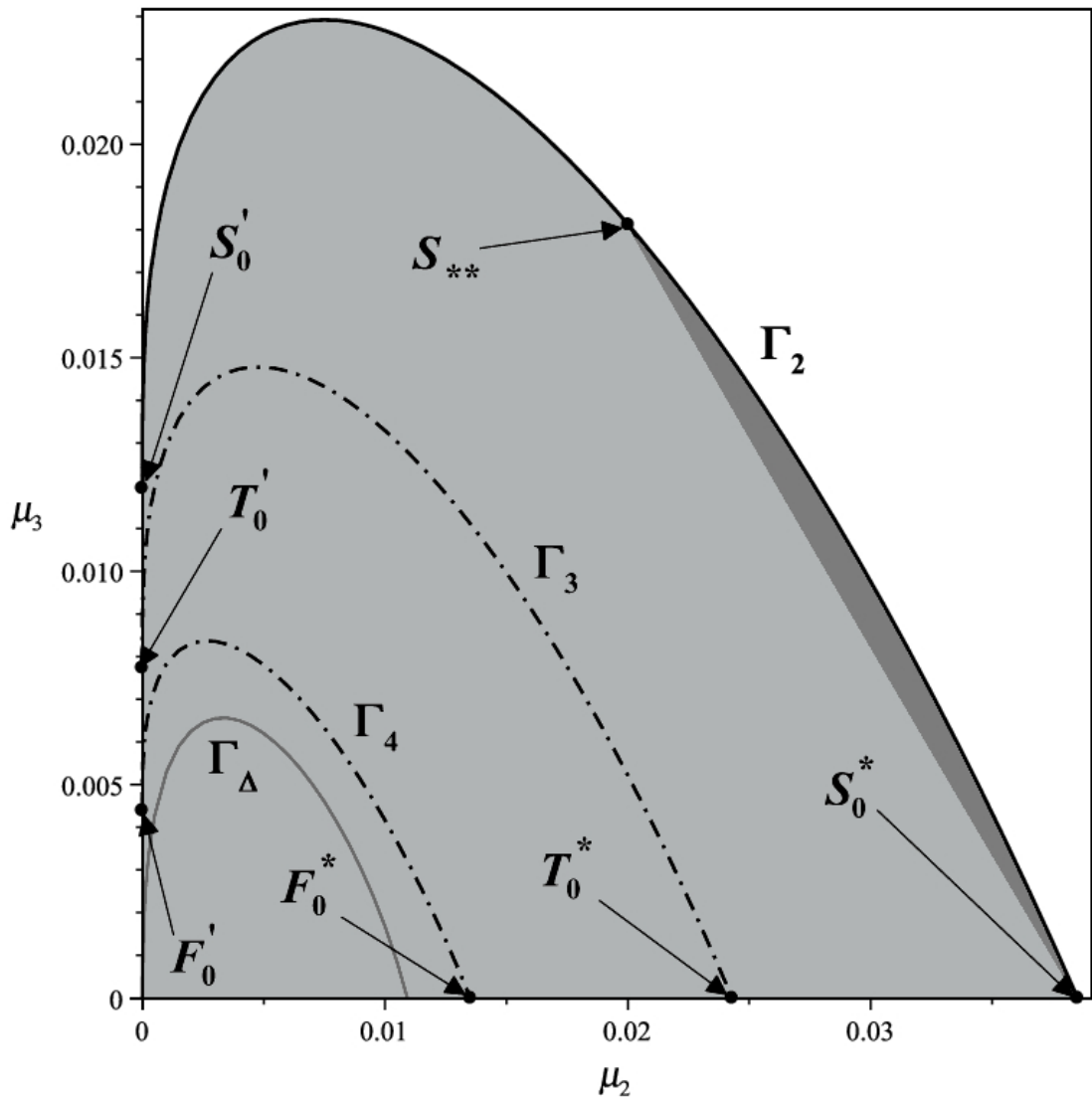


Рис. 2.5: Диаграмма устойчивости по Ляпунову положения относительного равновесия L_{54}

найлены значения коэффициентов B и C нормальной формы (2.18). Оказалось, что для положений относительного равновесия L_{45} и L_{54} неравенство (2.19) не выполнено. Поэтому это положение относительного равновесия на всей резонансной кривой Γ_4 неустойчиво. Для положения относительного равновесия L_{55} было установлено, что на участке резонансной кривой Γ_4 , ограниченной точками F_1 ($14.90384 \cdot 10^{-6}; 0.003532966$) и F_2 ($0.003532966; 14.90384 \cdot 10^{-6}$), неравенство (2.19) выполнено, а вне указанного участка не выполнено. Таким образом положение относительного равновесия L_{55} на участке F_1F_2 устойчиво по Ляпу-

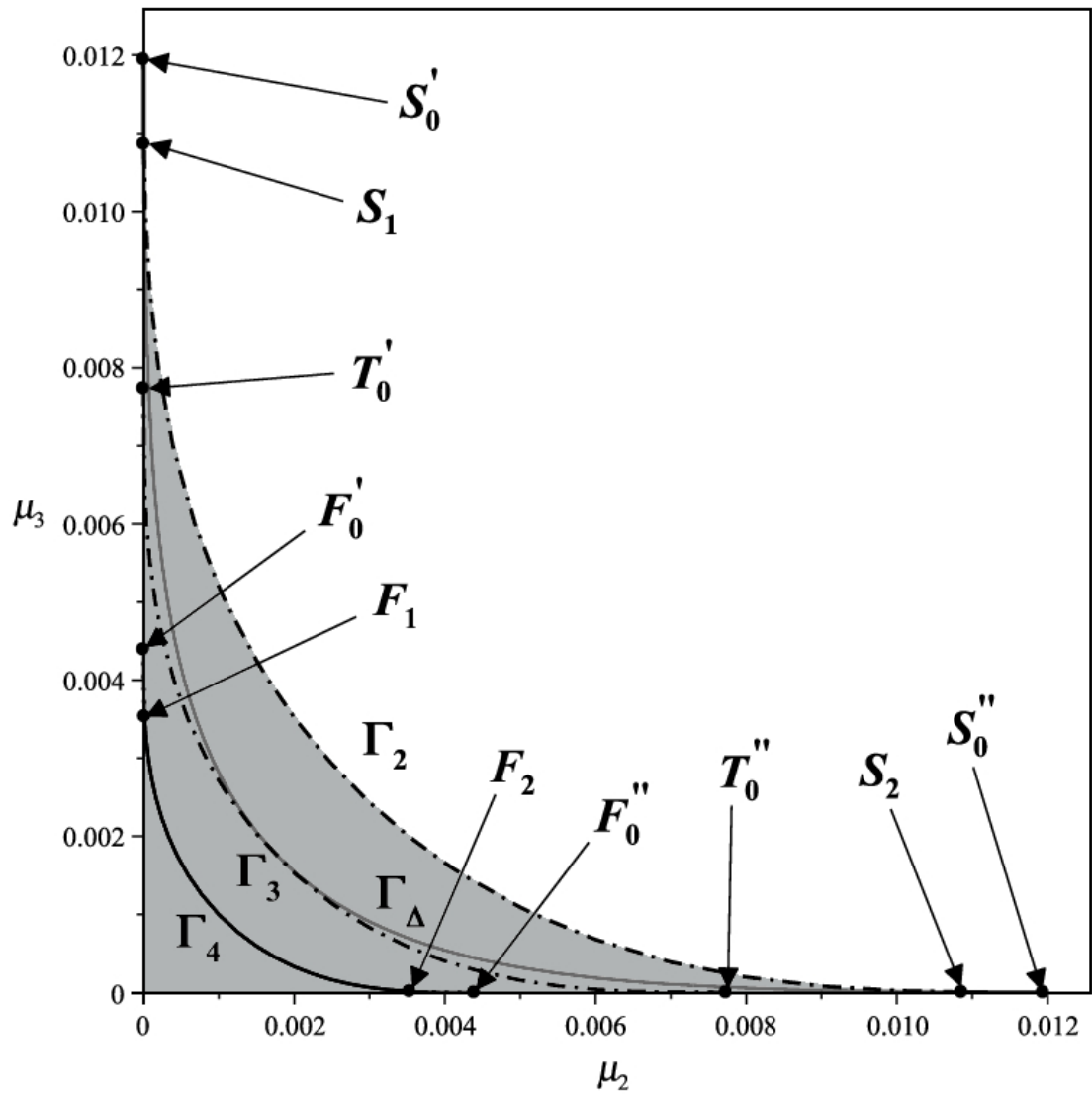


Рис. 2.6: Диаграмма устойчивости по Ляпунову положения относительного равновесия L_{55}

нову, а на участках $F_0'F_1$ и F_2F_0'' неустойчиво.

Аналогичный численный анализ коэффициентов нормальной формы (2.20) показал, что для всех значений параметров задачи на кривой Γ_2 (Рис. 2.4 и Рис. 2.5) условие (2.21) для положений относительного равновесия L_{45} и L_{54} выполнено. Поэтому данные положения относительного равновесия устойчивы по Ляпунову. Резонансная кривая Γ_2 , соответствующая положению относительного равновесия L_{55} (Рис. 2.6), разделяется точками S_1 ($3.90129 \cdot 10^{-6}; 0.010860687$) и S_2 ($0.010860687; 3.90129 \cdot 10^{-6}$) на три участка. На участке S_1S_2 положение

относительного равновесия L_{55} неустойчиво по Ляпунову, а на участках S'_0S_1 и $S_2S''_0$ устойчиво.

На Рис. 2.4, Рис. 2.5 и Рис. 2.6 сплошной черной линией обозначены участки кривых, на которых положение относительного равновесия тела P устойчиво по Ляпунову. Штрихпунктирной черной линией обозначены участки кривых, где положения относительного равновесия неустойчивы. Темно-серым цветом на Рис. 2.4 и Рис. 2.5 изображена область, где не выполняется условие Рауса (1.25). Поэтому здесь положения относительного равновесия L_{45} и L_{54} устойчивы по Ляпунову, как это было установлено выше, однако соответствующие центральные конфигурации из четырёх тел будут неустойчивыми.

Исходя из проведенного выше анализа устойчивости положений относительного равновесия, можно сделать следующие выводы об устойчивости соответствующих центральных конфигураций. Установлено, что центральные конфигурации, соответствующие положениям относительного равновесия L_{33} , L_{15} , L_{25} , L_{51} , L_{52} неустойчивы по Ляпунову.

Центральные конфигурации, соответствующие положениям относительного равновесия L_{45} (Рис. 2.4) и L_{54} (Рис. 2.5), неустойчивы в области, изображенной белым цветом и темно-серым цветом. В области, закрашенной светло-серым цветом, имеет место устойчивость центральной конфигурации по Ляпунову. Исключение составляют лишь кривые Γ_3 и Γ_4 (Рис. 2.4 и Рис. 2.5), соответствующие резонансам третьего и четвертого порядка, где центральная конфигурация неустойчива. Для ответа на вопрос об устойчивости на кривой Γ_Δ (Рис. 2.4 и Рис. 2.5) требуется дополнительный анализ с учетом членов выше четвертой степени в разложении функции Гамильтона.

Центральная конфигурация, соответствующая положению относительного равновесия L_{55} (Рис. 2.6), неустойчива в области, изображенной белым цветом. В области, выделенной светло-серым цветом, центральная конфигурация почти всюду устойчива по Ляпунову. Исключение имеет место лишь на резонансных

кривых Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 , и возможно на кривой вырождения Γ_Δ . В частности, на кривой Γ_3 (Рис. 2.6), соответствующей резонансу третьего порядка, центральная конфигурация неустойчива. Резонансные кривые Γ_2 и Γ_4 (Рис. 2.6) разделяются на сегменты устойчивости и неустойчивости. На сегментах S'_0S_1 , $S_2S''_0$ и F_1F_2 центральная конфигурация устойчива по Ляпунову, а на сегментах S_1S_2 , F'_0F_1 и $F_2F''_0$ — неустойчива. Для решения вопроса об устойчивости в граничных точках S_1 , S_2 и F_1 , F_2 требуется провести анализ с учетом членов не ниже шестого порядка в разложении функции Гамильтона уравнений возмущенного движения. Численно было установлено, что в точках S_1 и S_2 имеет место пресечение кривых Γ_2 и Γ_Δ (Рис. 2.6). Также численно было установлено, что вблизи прямой $\mu_2 = \mu_3$ кривые Γ_3 и Γ_Δ на Рис. 2.6 расположены достаточно близко друг к другу, но не пересекаются.

2.3. Об устойчивости положений относительного равновесия при малых значениях параметров задачи

Стоит отметить, что при приближении к нулю параметра задачи μ_3 ($\mu_3 \rightarrow 0$) происходит потеря точности при численном вычислении коэффициентов нормальной формы разложения гамильтониана в окрестности положений относительного равновесия L_{45} и L_{55} . Аналогично, потеря точности имеет место и при численном вычислении коэффициентов нормальной формы разложения гамильтониана в окрестности положений относительного равновесия L_{54} и L_{55} при $\mu_2 \rightarrow 0$. Вместе с тем в данном случае можно ввести малый параметр и выполнить исследование устойчивости аналитически, не прибегая к численному вычислению коэффициентов нормальной формы.

В данном параграфе исследуются эти предельные случаи, т.е. предполагается, что масса одного из притягивающих тел много меньше масс двух других тел. Для определенности будем предполагать, что масса притягивающего тела

P_3 много меньше масс тел P_1 и P_2 . Положения относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{45} и L_{55} тела малой массы P располагаются вблизи притягивающего тела P_3 . В этом случае уравнения движения тела P можно записать в гамильтоновой форме, с функцией Гамильтона (1.43) (см. параграф 1.4).

В переменных \tilde{x}_i, \tilde{y}_i , положения относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{45} и L_{55} задаются формулами

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \tilde{x}_{1*}, & \tilde{x}_2 &= \tilde{x}_{2*}, \\ \tilde{y}_1 &= \tilde{y}_{1*} = -\tilde{x}_{2*}, & \tilde{y}_2 &= \tilde{y}_{2*} = \tilde{x}_{1*},\end{aligned}\tag{2.22}$$

где $\tilde{x}_{1*}, \tilde{x}_{2*}$ определяются в результате решения следующей системы алгебраических уравнений

$$-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_1} \Big|_{\tilde{y}_1 = -\tilde{x}_2, \tilde{y}_2 = \tilde{x}_1} = 0, \quad -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_2} \Big|_{\tilde{y}_1 = -\tilde{x}_2, \tilde{y}_2 = \tilde{x}_1} = 0.\tag{2.23}$$

Решения уравнений (2.23) можно получить в виде следующих сходящихся рядов по дробным степеням параметра μ_3

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{1*} &= \tilde{x}_1^{(0)} + \tilde{x}_1^{(1)} \mu_3^{1/3} + \tilde{x}_1^{(2)} \mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \\ \tilde{x}_{2*} &= \tilde{x}_2^{(0)} + \tilde{x}_2^{(1)} \mu_3^{1/3} + \tilde{x}_2^{(2)} \mu_3^{2/3} + O(\mu_3).\end{aligned}\tag{2.24}$$

Введем возмущения $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ в окрестности положения относительного равновесия по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \tilde{x}_{1*} + \tilde{q}_1, & \tilde{x}_2 &= \tilde{x}_{2*} + \tilde{q}_2, \\ \tilde{y}_1 &= -\tilde{x}_{2*} + \tilde{p}_1, & \tilde{y}_2 &= \tilde{x}_{1*} + \tilde{p}_2,\end{aligned}\tag{2.25}$$

и разложим функцию Гамильтона (1.43) в ряд по новым каноническим переменным \tilde{q}_i, \tilde{p}_i

$$\tilde{H} = \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3 + \tilde{H}_4 + \tilde{H}^{(5)},\tag{2.26}$$

где \tilde{H}_k – форма степени k , а через $\tilde{H}^{(5)}$ обозначен сходящийся ряд, который начинается с членов не ниже пятой степени.

Квадратичная часть \tilde{H}_2 функции Гамильтона (2.26) имеет следующий вид

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2} (\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2) + \frac{1}{2} (a\tilde{q}_1^2 + b\tilde{q}_2^2) + c\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \tilde{p}_1\tilde{q}_2 - \tilde{p}_2\tilde{q}_1. \quad (2.27)$$

Она является гамильтонианом линеаризованной в окрестности положения относительного равновесия системы. Стоит отметить, что гамильтониан (2.27) имеет тот же вид, что и гамильтониан (2.3), а переменные q_i, p_i гамильтониана (2.3) связаны с переменными \tilde{q}_i, \tilde{p}_i гамильтониана (2.27) через масштабирующую каноническую замену переменных

$$\tilde{q}_i = \mu_3^{-1/3} q_i, \quad \tilde{p}_i = \mu_3^{-1/3} p_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.28)$$

Коэффициенты a, b и c — разложения коэффициентов гамильтониана (2.3) в ряды по степеням малого параметра μ_3 .

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1\mu_3^{1/3} + a_2\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \\ b &= b_0 + b_1\mu_3^{1/3} + b_2\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \\ c &= c_0 + c_1\mu_3^{1/3} + c_2\mu_3^{2/3} + O(\mu_3). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Выражения для коэффициентов a_i, b_i и c_i ($i = 0, 1, 2$) приведены в Приложении А.3.

Частоты линейной системы, соответствующие функции Гамильтона \tilde{H}_2 , находятся по формулам (2.9). Учитывая разложение (2.24), можно показать, что при $\mu_3 \ll 1$ на резонансных кривых Γ_2, Γ_3 и Γ_4 зависимость между параметрами μ_2 и μ_3 определяется следующей асимптотической формулой

$$\mu_2 = \mu_2^* + \mu_2^{(1)}\mu_3^{1/3} + \mu_2^{(2)}\mu_3^{2/3} + \mu_2^{(3)}\mu_3 + O(\mu_3^{4/3}). \quad (2.30)$$

Уравнения (2.23) и резонансное уравнение для частот $\omega_1 = n\omega_2$ ($n = 1, 2, 3$) образуют систему из трех алгебраических уравнений, решая которую можно определить коэффициенты $\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2$) рядов (2.24) и коэффициенты $\mu_2^*, \mu_2^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) ряда (2.30). С этой целью нужно подставить ряды (2.24) и

(2.30) в данную систему уравнений, и приравнять к нулю коэффициенты при равных степенях параметра μ_3 . Последовательно решая полученную таким образом систему алгебраических уравнений, можно найти коэффициенты $\tilde{x}_1^{(i)}$, $\tilde{x}_2^{(i)}$ и μ_2^* , $\mu_2^{(j)}$ рядов (2.24) и (2.30) для любых конечных порядков i и j . Выражения для этих коэффициентов получаются в виде явных формул, которые имеют очень громоздкий вид и приведены в Приложении А.4. Приведем лишь приближенные численные значения для коэффициентов μ_2^* , $\mu_2^{(j)}$ и $\tilde{x}_1^{(i)}$, $\tilde{x}_2^{(i)}$, полученные по этим явным формулам.

1. Резонансная кривая Γ_2 ($\omega_1 = \omega_2$)

1.1. Положение относительного равновесия L_{45}

$$\begin{aligned} \mu_2^* &\approx 0.01194203, \\ \mu_2^{(1)} &\approx 0.06940669, \quad \mu_2^{(2)} \approx 0.05501450, \quad \mu_2^{(3)} \approx -0.19173442, \\ \tilde{x}_1^{(0)} &\approx 2.88551212, \quad \tilde{x}_1^{(1)} \approx -4.25399556, \quad \tilde{x}_1^{(2)} \approx 1.31209648, \\ \tilde{x}_2^{(0)} &\approx 1.68627012, \quad \tilde{x}_2^{(1)} \approx 4.03293186, \quad \tilde{x}_2^{(2)} \approx -5.52735277. \end{aligned} \tag{2.31}$$

1.2. Положение относительного равновесия L_{55}

$$\begin{aligned} \mu_2^* &\approx 0.01194203, \\ \mu_2^{(1)} &\approx -0.06940669, \quad \mu_2^{(2)} \approx 0.05501450, \quad \mu_2^{(3)} \approx -0.64723970, \\ \tilde{x}_1^{(0)} &\approx -2.88551212, \quad \tilde{x}_1^{(1)} \approx -4.25399556, \quad \tilde{x}_1^{(2)} \approx -1.31209648, \\ \tilde{x}_2^{(0)} &\approx -1.68627012, \quad \tilde{x}_2^{(1)} \approx 4.03293186, \quad \tilde{x}_2^{(2)} \approx 5.52735277. \end{aligned} \tag{2.32}$$

2. Резонансная кривая Γ_3 ($\omega_1 = 2\omega_2$)

2.1. Положение относительного равновесия L_{45}

$$\begin{aligned} \mu_2^* &\approx 0.00773367, \\ \mu_2^{(1)} &\approx 0.05186290, \quad \mu_2^{(2)} \approx 0.04830390, \quad \mu_2^{(3)} \approx -0.19684248, \\ \tilde{x}_1^{(0)} &\approx 3.33763224, \quad \tilde{x}_1^{(1)} \approx -5.64829975, \quad \tilde{x}_1^{(2)} \approx 1.84197719, \\ \tilde{x}_2^{(0)} &\approx 1.94208981, \quad \tilde{x}_2^{(1)} \approx 5.38231987, \quad \tilde{x}_2^{(2)} \approx -8.59808402. \end{aligned} \tag{2.33}$$

2.2. Положение относительного равновесия L_{55}

$$\begin{aligned}
\mu_2^* &\approx 0.00773367, \\
\mu_2^{(1)} &\approx -0.05186290, \quad \mu_2^{(2)} \approx 0.04830390, \quad \mu_2^{(3)} \approx -0.65960582, \\
\tilde{x}_1^{(0)} &\approx -3.33763224, \quad \tilde{x}_1^{(1)} \approx -5.64829975, \quad \tilde{x}_1^{(2)} \approx -1.84197719, \\
\tilde{x}_2^{(0)} &\approx -1.94208981, \quad \tilde{x}_2^{(1)} \approx 5.38231987, \quad \tilde{x}_2^{(2)} \approx 8.59808402.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

3. Резонансная кривая Γ_4 ($\omega_1 = 3\omega_2$)3.1. Положение относительного равновесия L_{45}

$$\begin{aligned}
\mu_2^* &\approx 0.00439087, \\
\mu_2^{(1)} &\approx 0.03551042, \quad \mu_2^{(2)} \approx 0.04045919, \quad \mu_2^{(3)} \approx -0.20098880, \\
\tilde{x}_1^{(0)} &\approx 4.03303706, \quad \tilde{x}_1^{(1)} \approx -8.19746202, \quad \tilde{x}_1^{(2)} \approx 2.98385054, \\
\tilde{x}_2^{(0)} &\approx 2.33877818, \quad \tilde{x}_2^{(1)} \approx 7.84403686, \quad \tilde{x}_2^{(2)} \approx -15.23181037.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

3.2. Положение относительного равновесия L_{55}

$$\begin{aligned}
\mu_2^* &\approx 0.00439087, \\
\mu_2^{(1)} &\approx -0.03551042, \quad \mu_2^{(2)} \approx 0.04045919, \quad \mu_2^{(3)} \approx -0.66942940, \\
\tilde{x}_1^{(0)} &\approx -4.03303706, \quad \tilde{x}_1^{(1)} \approx -8.19746202, \quad \tilde{x}_1^{(2)} \approx -2.98385054, \\
\tilde{x}_2^{(0)} &\approx -2.33877818, \quad \tilde{x}_2^{(1)} \approx 7.84403686, \quad \tilde{x}_2^{(2)} \approx 15.23181037.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

При достаточно малых значениях параметра μ_3 ($\mu_3 \ll 1$), используя ряды (2.24) и (2.30) можно получить асимптотические выражения для коэффициентов нормальной формы разложения (2.26) гамильтониана задачи в ряд в окрестности рассматриваемых положений относительного равновесия.

Вычисления показали, что в случае резонанса третьего порядка ($\omega_1 = 2\omega_2$), коэффициент A нормальной формы (2.16) разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия L_{45} имеет следующее асимптотическое выражение в виде ряда по дробным степеням малого параметра μ_3

$$A = 0.28034424 + 1.06529423\mu_3^{1/3} - 3.66436895\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \tag{2.37}$$

а для соответствующего коэффициента нормализованного разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия L_{55} это асимптотическое выражение имеет вид

$$A = 0.28034424 - 1.06529423\mu_3^{1/3} - 3.66436895\mu_3^{2/3} + O(\mu_3). \quad (2.38)$$

Таким образом, при малых значениях параметра μ_3 коэффициент A нормализованной в окрестности положений относительного равновесия функции Гамильтона отличен от нуля. Поэтому на основании теоремы А.П. Маркеева [25] можно сделать вывод, что в этом случае положения относительного равновесия L_{45} и L_{55} неустойчивы при достаточно малых значениях параметра μ_3 .

В случае резонанса четвертого порядка ($\omega_1 = 3\omega_2$), коэффициенты B и C нормальной формы (2.18) разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия L_{45} имеют следующие асимптотические выражения в виде рядов по дробным степеням малого параметра μ_3

$$\begin{aligned} \tilde{B} = 3\sqrt{3}B &= 0.82779127 + 5.14016435\mu_3^{1/3} - 6.37497718\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \\ C &= -0.62741180 + 2.31780686\mu_3^{1/3} - 14.52680613\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \end{aligned} \quad (2.39)$$

а для разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия L_{55} имеем следующие асимптотические выражения коэффициентов B и C

$$\begin{aligned} \tilde{B} = 3\sqrt{3}B &= 0.82779127 - 5.14016435\mu_3^{1/3} - 6.37497718\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \\ C &= -0.62741180 - 2.31780686\mu_3^{1/3} - 14.52680613\mu_3^{2/3} + O(\mu_3). \end{aligned} \quad (2.40)$$

На основании выражений (2.39) и (2.40) нетрудно показать, что выполняется неравенство

$$\left| 3\sqrt{3}B \right| > |C|. \quad (2.41)$$

Поэтому на основании теоремы А.П. Маркеева [25], можно сделать вывод о неустойчивости положений относительного равновесия L_{45} и L_{55} при достаточно малых значениях параметра μ_3 .

В случае резонанса второго порядка ($\omega_1 = \omega_2$), коэффициент A нормальной формы (2.20) разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия L_{45} имеет следующее асимптотическое выражение в виде ряда по дробным степеням малого параметра μ_3

$$A = 0.00072440 + 0.04422790\mu_3^{1/3} - 0.09953904\mu_3^{2/3} + O(\mu_3), \quad (2.42)$$

а для разложения гамильтониана в окрестности положения относительного равновесия L_{55} имеем следующее асимптотическое выражение коэффициента A

$$A = 0.00072440 - 0.04422790\mu_3^{1/3} - 0.09953904\mu_3^{2/3} + O(\mu_3). \quad (2.43)$$

Из (2.42) и (2.43) следует, что при достаточно малых значениях параметра μ_3 коэффициент A нормализованной в окрестности положений относительного равновесия функции Гамильтона больше нуля. Поэтому для положений относительного равновесия L_{45} и L_{55} на основании теоремы А.Г. Сокольского [31, 69] имеет место устойчивость.

Отметим, что результаты аналитического исследования устойчивости по Ляпунову хорошо согласуются с результатами численного исследования, проведенного в параграфе 2.2.

Аналогично, используя метод малого параметра, можно получить асимптотическое выражение для кривой Γ_Δ (Рис. 2.8), соответствующей положению относительного равновесия L_{55} . Вычисления показали, что при достаточно малых значениях параметра μ_3 ($\mu_3 \ll 1$) кривая Γ_Δ может быть задана следующей асимптотической формулой

$$\mu_2 = 0.01322813 - 0.15905414\mu_3^{1/3} + 0.60671200\mu_3^{2/3} + O(\mu_3). \quad (2.44)$$

Используя асимптотическое выражение (2.30) для кривой Γ_2 с коэффициентами (2.32) и асимптотическое выражение (2.44) для кривой Γ_Δ , можно найти приближенные значения координат точки S_2 (Рис. 2.8) пересечения этих кривых.

Отметим, что полученные таким образом значения координат с высокой точностью совпадают с значениями координат точки S_2 , которая является одной из границ участка кривой Γ_2 , на котором имеет место неустойчивость положения относительного равновесия L_{55} .

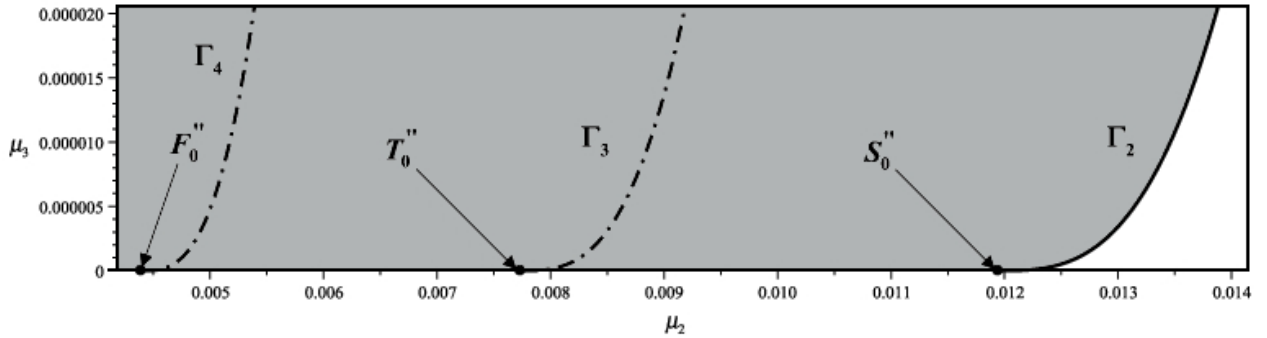


Рис. 2.7: Диаграмма устойчивости положения относительного равновесия L_{45} при $\mu_3 \ll 1$

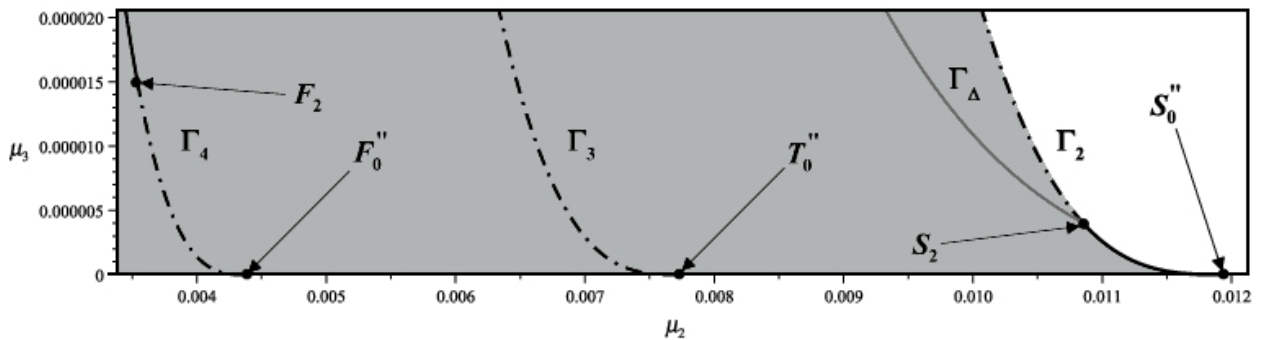


Рис. 2.8: Диаграмма устойчивости положения относительного равновесия L_{55} при $\mu_3 \ll 1$

На Рис. 2.7 и Рис. 2.8 представлены результаты аналитического исследования устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия L_{45} и L_{55} при достаточно малых значениях параметра μ_3 .

В силу упомянутой выше (см. параграф 1.2) симметрии можно сделать аналогичные выводы об устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия L_{54} и L_{55} при $\mu_2 \rightarrow 0$. В частности, в этом случае имеют место следующие асимптотические выражения для кривых

Γ_2 и Γ_Δ , соответствующих положению относительного равновесия L_{55} , при $\mu_2 \ll 1$.

$$\begin{aligned}\mu_3 &= 0.01194203 - 0.06940669\mu_2^{1/3} + 0.05501450\mu_2^{2/3} + O(\mu_2), \\ \mu_3 &= 0.01322813 - 0.15905414\mu_2^{1/3} + 0.60671200\mu_2^{2/3} + O(\mu_2).\end{aligned}\tag{2.45}$$

Используя асимптотические выражения (2.45), можно найти приближенные значения координат точки S_1 пересечения этих кривых. Отметим, что полученные таким образом значения координат с высокой точностью совпадают с значениями координат точки S_1 , которая является другой граничной точкой участка неустойчивости положения относительного равновесия L_{55} на кривой Γ_2 .

Основные результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [44, 45, 47].

Глава 3

Периодические движения в окрестности положений относительного равновесия и их орбитальная устойчивость

3.1. Постановка задачи

В данной главе будем рассматривать частный случай плоской круговой ограниченной задачи четырёх тел, когда два притягивающих тела P_2 и P_3 обладают равными массами ($m_2 = m_3 = m$). В этом случае в задаче имеется только один параметр $\mu = \mu_2 = \mu_3$ ($\mu = \frac{m}{m_1+2m}$), а гамильтониан задачи (1.23) принимает следующий вид [45]

$$H = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - 2\mu) \right) - p_\eta \xi - \frac{1 - 2\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} - \frac{\mu}{\rho_3}, \quad (3.1)$$

где

$$\rho_1 = \left(\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \rho_2 = \left(\left(\xi + \frac{1}{2} \right)^2 + \eta^2 \right)^{1/2},$$

$$\rho_3 = \left(\left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 + \eta^2 \right)^{1/2}.$$

Будем как и прежде предполагать, что выполнено условие Рауса (1.25), которое в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$0 < \mu < \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{9}. \quad (3.2)$$

Согласно теореме о голоморфном интеграле [20] в малой окрестности устойчивого положения равновесия гамильтоновой системы существуют периодические решения, образующие так называемые естественные семейства, зави-

сящие от одного параметра. В качестве такого параметра можно выбрать постоянную интеграла энергии h . Данные периодические решения известны как решения Ляпунова. В общем случае они разделяются на два класса и описывают так называемые коротко- и долгопериодические движения. Движения с наименьшим периодом T_S называются короткопериодическими и существуют как для устойчивого, так и для неустойчивого положения равновесия. В зависимости от значений параметров задачи также могут существовать одно или несколько семейств так называемых долгопериодических движений с периодом T_L ($T_L > T_S$). В нерезонансном случае существует ровно одно семейство долгопериодических движений в окрестности устойчивого положения равновесия.

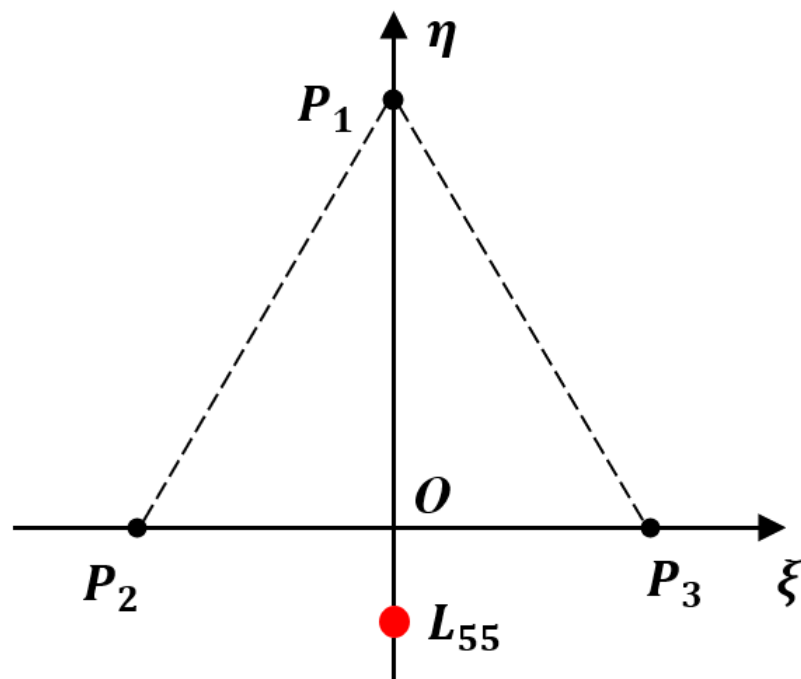


Рис. 3.1: Устойчивое положение относительного равновесия тела P в случае равных масс двух притягивающих тел P_2 и P_3 расположенное на оси $O\eta$

Целью данной главы является исследование вопроса о существовании и орбитальной устойчивости периодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия L_{55} . Исследование проводится

для всех возможных значений постоянной энергии h и параметра задачи μ . На основании результатов параграфа 2.1 можно сделать вывод, что положение относительного равновесия L_{55} неустойчиво при $\mu \geq \tilde{\mu} \approx 0.00270963$. Поэтому далее будем предполагать, что выполнено неравенство $0 < \mu < \tilde{\mu}$.

В рассматриваемом случае положение относительного равновесия L_{55} описывается следующим стационарным решением системы канонических уравнений с гамильтонианом (3.1)

$$\xi = 0, \quad \eta = \eta_*, \quad p_\xi = -\eta_* + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 2\mu), \quad p_\eta = 0, \quad (3.3)$$

где η_* находится из решения алгебраического уравнения

$$\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 2\mu) - \frac{4(1 - 2\mu) \operatorname{sign}(2\eta - \sqrt{3})}{(2\eta - \sqrt{3})^2} - \frac{16\mu\eta}{(4\eta^2 + 1)^{3/2}} = 0.$$

В системе координат $O\xi\eta\zeta$ положение относительного равновесия L_{55} расположено на оси $O\eta$, на Рис. 3.1 оно обозначено красной точкой.

3.2. Аналитическое исследование нерезонансных периодических движений

В малой окрестности положения относительного равновесия L_{55} периодические движения Ляпунова можно получить аналитически в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра. В качестве малого параметра можно выбрать амплитуду $c = c(h)$, которая зависит от постоянной интеграла энергии h . Для получения аналитических выражений, описывающих периодические движения Ляпунова в малой окрестности исследуемого положения относительного равновесия L_{55} , приведём функцию Гамильтона задачи (3.1) к нормальной форме. С этой целью введём локальные канонические переменные q_1, q_2, p_1, p_2 по формулам

$$\xi = q_1, \quad \eta = \eta_* + q_2, \quad p_\xi = -\eta_* + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 2\mu) + p_1, \quad p_\eta = p_2. \quad (3.4)$$

Затем разложим исходный гамильтониан (3.1) в степенной ряд по новым каноническим переменным

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (3.5)$$

где квадратичная часть H_2 принимает вид:

$$H_2 = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} (aq_1^2 + bq_2^2) + p_1q_2 - p_2q_1, \quad (3.6)$$

а коэффициенты a и b задаются следующими формулами

$$\begin{aligned} a &= \frac{8(1-2\mu) \operatorname{sign}(2\eta - \sqrt{3})}{(2\eta - \sqrt{3})^3} + \frac{64\mu(\eta^2 - \frac{1}{2})}{(4\eta^2 + 1)^{5/2}}, \\ b &= -\frac{16(1-2\mu) \operatorname{sign}(2\eta - \sqrt{3})}{(2\eta - \sqrt{3})^3} - \frac{64\mu(2\eta^2 - \frac{1}{4})}{(4\eta^2 + 1)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Выражения для членов более высокого порядка H_3 и H_4 громоздкие, поэтому они здесь не приводятся.

Выполним линейную замену переменных $q_i, p_i \rightarrow Q_i, P_i$, которая приводит квадратичную часть H_2 гамильтониана к нормальной форме.

$$\begin{aligned} q_1 &= n_{11}Q_1 + n_{12}Q_2, & q_2 &= m_{21}P_1 + m_{22}P_2, \\ p_1 &= m_{31}P_1 + m_{32}P_2, & p_2 &= n_{41}Q_1 + n_{42}Q_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_i &= \left(\frac{1}{2} \left(a + b + 2 + (-1)^{i+1} \sqrt{(a-b)^2 + 8(a+b)} \right) \right)^{1/2}, \\ n_{1i} &= \frac{\chi_i(\omega_i^2 + b - 1)}{\omega_i}, & n_{4i} &= -\frac{\chi_i(b\omega_i^2 - ab + a)}{\omega_i}, \\ m_{2i} &= \delta_i \chi_i(\omega_i^2 - a - 1), & m_{3i} &= \delta_i \chi_i(a + b), \\ \chi_i^2 &= \frac{\omega_i}{\delta_i(b\omega_i^4 - 2a(b-1)\omega_i^2 + (b-1)(a^2 + 2a + b))}, \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (3.8)$$

В новых переменных Q_i, P_i гамильтониан задачи имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\omega_1(Q_1^2 + P_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2(Q_2^2 + P_2^2) + H^{(3)}. \quad (3.9)$$

Здесь и далее через $H^{(k)}$ ($k = 3, 4, \dots$) обозначен сходящийся ряд, который начинается с членов не ниже степени k .

Нелинейной канонической близкой к тождественной заменой переменных $Q_i, P_i \rightarrow u_i, v_i$ можно привести члены третьего и четвёртого порядка функции Гамильтона к нормальной форме, а функция Гамильтона примет следующий нормальный вид

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + H^{(5)}(\varphi_1, \varphi_2, r_1^{1/2}, r_2^{1/2}), \quad (3.10)$$

где φ_i, r_i — канонические переменные, введенные по формулам $u_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i$, $v_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i$.

На основании теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле [20] существует каноническая замена переменных $\varphi_i, r_i \rightarrow \tilde{\varphi}_i, \tilde{r}_i$ (см. [76, 86]), представляемая в виде сходящихся рядов по степеням $\tilde{r}_i^{1/2}$ ($i = 1, 2$), которая приводит функцию Гамильтона (3.10) к виду

$$H = \omega_1 \tilde{r}_1 - \omega_2 \tilde{r}_2 + c_{20} \tilde{r}_1^2 + c_{11} \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 + c_{02} \tilde{r}_2^2 + \tilde{H}^{(5)}(\tilde{\varphi}_2, \tilde{r}_1^{1/2}, \tilde{r}_2^{1/2}), \quad (3.11)$$

где $\tilde{H}^{(5)}(\tilde{\varphi}_2, \tilde{r}_1^{1/2}, \tilde{r}_2^{1/2})$ — сходящийся ряд по степеням $\tilde{r}_1^{1/2}$ и $\tilde{r}_2^{1/2}$, разложение которого начинается с членов не ниже первой степени по \tilde{r}_2 . Система с гамильтонианом (3.11) допускает частное решение

$$\tilde{\varphi}_1 = \Omega_1 \nu + \tilde{\varphi}_0, \quad \tilde{r}_1 = \frac{c^2}{2}, \quad \tilde{r}_2 = 0, \quad (3.12)$$

где c и $\tilde{\varphi}_0$ — произвольные постоянные. Данное решение описывает семейства F_S короткопериодических движений (колебаний) системы с гамильтонианом (3.10) в окрестности положения относительного равновесия L_{55} с периодом $T_S = 2\pi/\Omega_1$, амплитудой c и фазой $\tilde{\varphi}_0$. Частота колебаний Ω_1 является аналитической функцией амплитуды c и представима в виде сходящегося ряда

$$\Omega_1 = \omega_1 + c_{02} c^2 + O(c^4).$$

В переменных Q_i, P_i решение (3.12) принимает вид

$$\begin{cases} Q_1 = c \sin(\Omega_1 \nu + \nu_0) + O(c^3) \\ P_1 = c \cos(\Omega_1 \nu + \nu_0) + O(c^3) \\ Q_2 = O(c^3) \\ P_2 = O(c^3) \end{cases} \quad (3.13)$$

Если выполнено соотношение

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Z},$$

то на основании теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле также существуют семейства F_L долгопериодических движений, которые в переменных Q_i, P_i имеют следующий вид

$$\begin{cases} Q_1 = O(c^3) \\ P_1 = O(c^3) \\ Q_2 = -c \sin(\Omega_2 \nu) + O(c^3) \\ P_2 = c \cos(\Omega_2 \nu) + O(c^3) \end{cases}, \quad (3.14)$$

где

$$\Omega_2 = \omega_2 - c_{20}c^2 + O(c^4).$$

Долгопериодические движения F_L имеют период $T_L = 2\pi/\Omega_2$.

В переменных q_1, q_2, p_1, p_2 решение (3.13) примет вид

$$\begin{cases} q_1 = n_{11}c \sin(\Omega_1 \nu) + O(c^3) \\ q_2 = m_{21}c \cos(\Omega_1 \nu) + O(c^3) \\ p_1 = m_{31}c \cos(\Omega_1 \nu) + O(c^3) \\ p_2 = n_{41}c \sin(\Omega_1 \nu) + O(c^3) \end{cases}, \quad (3.15)$$

а решение (3.14) примет вид

$$\begin{cases} q_1 = -n_{12}c \sin(\Omega_2\nu) + O(c^3) \\ q_2 = m_{22}c \cos(\Omega_2\nu) + O(c^3) \\ p_1 = m_{32}c \cos(\Omega_2\nu) + O(c^3) \\ p_2 = -n_{42}c \sin(\Omega_2\nu) + O(c^3) \end{cases} . \quad (3.16)$$

Известно, что при достаточно малых амплитудах короткопериодические движения орбитально устойчивы в линейном приближении при условии $\omega_1 \neq 2\omega_2$ [25, 27]. Если же $\omega_1 \approx 2\omega_2$, то при малых амплитудах возможно явление параметрического резонанса, приводящее к орбитальной неустойчивости.

3.3. Параметрический резонанс и орбитальная неустойчивость короткопериодических движений

Границы областей параметрического резонанса можно получить в аналитической форме. С этой целью воспользуемся методикой, предложенной в работе [27]. В соответствии с результатами данной работы область параметрического резонанса возникает вблизи значений параметра μ , отвечающих резонансу третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$. Данное резонансное соотношение имеет место при $\mu_0 = 0.00175770$. Далее полагая, что значение параметра μ мало отличается от μ_0 , введём малый параметр ε

$$\varepsilon = \mu - \mu_0. \quad (3.17)$$

В случае резонанса третьего порядка канонической заменой переменных гамильтониан задачи (3.9) можно привести к следующей нормальной форме

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 - A r_2 \sqrt{r_1} \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + H^{(4)}, \quad (3.18)$$

где через $H^{(4)}$ обозначен сходящийся ряд, который начинается с членов не ниже четвёртой степени. Явные выражения для ω_1 , ω_2 и коэффициента нормальной

формы A были получены в работе [47]. Используя данные выражения, имеем

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0.88595524 - 90.91930642\varepsilon - 27235.59685532\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \omega_2 &= 0.44297762 + 169.76439834\varepsilon + 12630.04414059\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ A &= 0.37446196 + 5643.05422766\varepsilon + 2.86487085 \cdot 10^6\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).\end{aligned}\quad (3.19)$$

Выполним теперь каноническую замену переменных $\varphi_i, r_i \rightarrow \theta_i, \rho_i$ ($i=1, 2$) с валентностью $(\varepsilon\alpha)^{-2}$ по следующим формулам

$$\varphi_i = \theta_i, \quad r_i = \varepsilon^2\alpha^2\rho_i, \quad (i = 1, 2). \quad (3.20)$$

где ε — малая величина, а α — неопределенная пока постоянная величина. Помимо этого, выполним замену независимой переменной $\nu = \omega_2^{-1}\tau$. В переменных θ_i, ρ_i ($i=1, 2$) гамильтониан задачи (3.18) примет вид:

$$H = \frac{\omega_1}{\omega_2}\rho_1 - \rho_2 - \varepsilon\frac{A}{\omega_2}\alpha\rho_2\sqrt{\rho_1}\sin(\theta_1 + 2\theta_2) + H^{(4)}. \quad (3.21)$$

Введём резонансную расстройку \varkappa :

$$\varkappa = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2, \quad (3.22)$$

и выполним ещё одну каноническую унивалентную замену переменных $\theta_i, \rho_i \rightarrow \psi_i, R_i$ ($i=1, 2$)

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \psi_1, & \theta_2 &= -\frac{\psi_1}{2} + \psi_2, \\ \rho_1 &= R_1 + \frac{R_2}{2}, & \rho_2 &= R_2.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Далее полагаем, $\alpha = \omega_2/A$, тогда в переменных ψ_i, R_i гамильтониан принимает вид

$$H = (2 + \varkappa) \left(R_1 + \frac{1}{2}R_2 \right) - R_2 - \varepsilon R_2 \sqrt{R_1 + \frac{1}{2}R_2} \sin 2\psi_2 + H^{(4)}. \quad (3.24)$$

Введём декартовы координаты x_2, y_2 по формулам

$$x_2 = \sqrt{2R_2} \sin \psi_2, \quad y_2 = \sqrt{2R_2} \cos \psi_2. \quad (3.25)$$

Гамильтониан задачи (3.24) примет вид

$$H = (2 + \varkappa) R_1 + \frac{1}{4} \varkappa (x_2^2 + y_2^2) - \varepsilon x_2 y_2 \sqrt{R_1 + \frac{1}{4} (x_2^2 + y_2^2)} + H^{(4)}. \quad (3.26)$$

Уравнения с гамильтонианом (3.26) допускают частное решение

$$\psi_1 = \Omega (\tau + \tau_0), \quad R_1 = \frac{c^2}{2}, \quad x_2 = y_2 = 0. \quad (3.27)$$

где $\Omega = 2 + \varkappa + O(\varepsilon^2)$. Данное решение описывает периодическую орбиту: движение с периодом $2\pi/\Omega$ и амплитудой c .

В окрестности решения (3.27) введём возмущения γ , α_2 , β_2 по формулам

$$R_1 = \frac{c^2}{2} + \gamma, \quad x_2 = \alpha_2, \quad y_2 = \beta_2. \quad (3.28)$$

Гамильтониан уравнений возмущенного движения примет вид

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \dots, \quad (3.29)$$

где $\Gamma_2 = \Omega\gamma + \Gamma_2^*$, а

$$\Gamma_2^* = \frac{1}{4} \varkappa (\alpha_2^2 + \beta_2^2) - \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_2 \beta_2 c + O(\varepsilon^2). \quad (3.30)$$

Характеристическое уравнение системы с гамильтонианом (3.30) имеет вид

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} (\varkappa^2 - 2\varepsilon^2 c^2) = 0. \quad (3.31)$$

При достаточно малых ε уравнение (3.31) имеет вещественный положительный корень при условии [27]

$$|\varkappa| < \varepsilon \sqrt{2} c. \quad (3.32)$$

Условие (3.32) задаёт область орбитальной неустойчивости (область параметрического резонанса). Вне этой области короткопериодические движения с малыми амплитудами орбитально устойчивы в линейном приближении.

Гамильтониан (3.18) является первым интегралом уравнений движения (интеграл энергии). Обозначим через Δh постоянную этого интеграла на периодической орбите. Эта постоянная имеет смысл отклонения энергии на периодической орбите от её значения в положении относительного равновесия.

В переменных φ_i, r_i ($i=1, 2$) решение (3.27) имеет вид:

$$r_1 = \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 c^2}{2}, \quad r_2 = 0. \quad (3.33)$$

Подставив (3.33) в (3.18), найдём связь между Δh и амплитудой c :

$$\frac{\omega_1 \omega_2^2 \varepsilon^2 c^2}{2A^2} = \Delta h. \quad (3.34)$$

Подставляя разложения (3.19) для ω_1 и ω_2 в выражение (3.22) для резонансной расстройки \varkappa , имеем

$$\varkappa = -971.71524295\varepsilon + 253888.60299808\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.35)$$

На границе области параметрического резонанса неравенство (3.32) обращается в равенство. Если подставить в это равенство выражение (3.35), то амплитуду c можно получить в виде ряда по малому параметру ε . Данный ряд имеет следующий вид

$$c = \frac{\sqrt{2}\varkappa}{2\varepsilon} = -687.10643767 + 179526.35284592\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (3.36)$$

В результате подстановки разложений (3.19) для ω_1, ω_2 и коэффициента нормальной формы A , а также разложения (3.36) для амплитуды c в выражение (3.34) для Δh , получим следующее выражение

$$\Delta h = 292669.84177512\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.37)$$

Таким образом, на границе области параметрического резонанса постоянная интеграла энергии h вычисляется по формуле

$$h = h_0 + \Delta h, \quad (3.38)$$

где через h_0 обозначено значение постоянной энергии в положении относительного равновесия при $\mu = \mu_0 + \varepsilon$. Разложение h_0 по степеням малого параметра ε имеет следующий вид

$$h_0 = -1.50023460 - 0.13527950\varepsilon - 1.02483732\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.39)$$

Таким образом, на границе области параметрического резонанса постоянная энергии h принимает вид

$$h = -1.50023460 - 0.13527950\varepsilon + 292668.81693780\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.40)$$

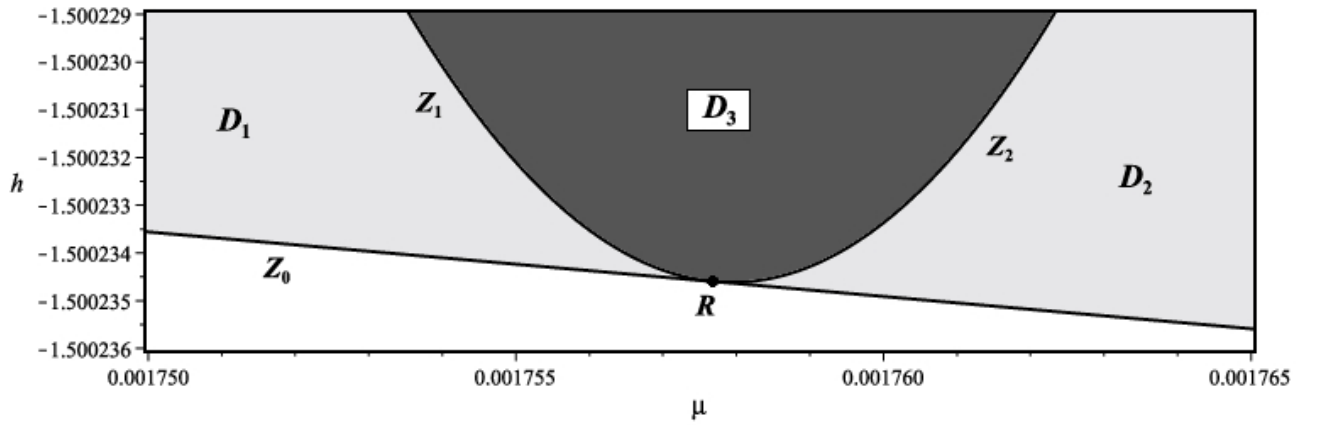


Рис. 3.2: Диаграмма орбитальной устойчивости в линейном приближении семейства короткопериодических движений при малых значениях амплитуды s

Выражение (3.40) задаёт границы области параметрического резонанса в плоскости параметров задачи μ и h при достаточно малых значениях амплитуды s . На Рис. 3.2 представлена диаграмма орбитальной устойчивости короткопериодических движений тела малой массы, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия, при достаточно малых амплитудах s вблизи резонанса третьего порядка. Область орбитальной неустойчивости D_3 (область параметрического резонанса) закрашена тёмно-серым цветом, её границы задаются формулой (3.40), а области D_1 и D_2 , в которых короткопериодические движения орбитально устойчивы в линейном приближении, закрашены серым

цветом. Нижняя граница серой области соответствует положению относительного равновесия. Точка R , в которой область параметрического резонанса касается этой нижней границы, отвечает положению относительного равновесия при $\mu = \mu_0$.

3.4. Об алгоритме численного продолжения

Решения (3.15) и (3.16), полученные в параграфе 3.2, описывают коротко- и долгопериодические колебания в достаточно малой окрестности положения равновесия. Исследовать периодические движения во всей области их существования можно на основании метода численного продолжения по параметрам, разработанного для автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Данный метод впервые был предложен А. Депри и Ж. Анраром в работе [57] и далее был развит в работах [18, 32, 33, 88]. Кратко изложим суть данного метода для случая, когда функция Гамильтона зависит от одного параметра.

Рассмотрим автономную гамильтонову систему

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, & (i = 1, 2), \\ H &= H(q_i, p_i, \mu), \end{aligned} \quad (3.41)$$

с двумя степенями свободы. Функция Гамильтона является её первым интегралом (интегралом энергии) $H = h$, где h — постоянная интеграла энергии. Будем предполагать, что система (3.41) допускает периодическое решение

$$q_i^* = q_i^*(t, \mu^*), \quad p_i^* = p_i^*(t, \mu^*), \quad (i = 1, 2), \quad (3.42)$$

с периодом T^* и начальными условиями

$$q_{i0}^* = q_{i0}^*(0, \mu^*), \quad p_{i0}^* = p_{i0}^*(0, \mu^*), \quad (i = 1, 2), \quad (3.43)$$

соответствующее значению параметра μ^* . Решение (3.42) с начальными условиями (3.43) считается заранее известным, и в дальнейшем будем его называть

опорным решением.

Введём малые приращения параметров $\Delta\mu$, Δh и поставим задачу найти начальные условия

$$q_{i0} = q_i(0, \mu^* + \Delta\mu), \quad p_{i0} = p_i(0, \mu^* + \Delta\mu), \quad (i = 1, 2), \quad (3.44)$$

для нового периодического решения

$$q_i = q_i(t, \mu^* + \Delta\mu), \quad p_i = p_i(t, \mu^* + \Delta\mu), \quad (i = 1, 2). \quad (3.45)$$

с периодом $T = T^* + \tau$. Данное периодическое решение соответствует значениям параметров

$$\mu = \mu^* + \Delta\mu, \quad h = h^* + \Delta h \quad (3.46)$$

и удовлетворяет условиям принадлежности семейству периодических решений

$$\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} q_i(0, \mu) = q_i^*(0, \mu^*),$$

$$\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} p_i(0, \mu) = p_i^*(0, \mu^*),$$

$$\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} T(\mu) = T^*(\mu^*).$$

Чтобы получить начальные условия (3.44) для нового периодического решения (3.45), в окрестности опорного периодического решения (3.42) с помощью канонической замены переменных

$$\xi_i = q_i - q_i^*, \quad \eta_i = p_i - p_i^*, \quad (i = 1, 2). \quad (3.47)$$

введём локальные координаты ξ_i, η_i ($i = 1, 2$). В данных координатах искомые начальные условия принимают следующий вид:

$$\xi_{i0} = q_{i0} - q_{i0}^*, \quad \eta_{i0} = p_{i0} - p_{i0}^*, \quad (i = 1, 2), \quad (3.48)$$

где ξ_{i0}, η_{i0} — поправки к исходным начальным условиям. Выполняя замену переменных (3.47) в исходных гамильтоновых уравнениях (3.41) и линеаризуя

их правые части, приходим к линейной неавтономной гамильтоновой системе, описывающей движение в окрестности опорного решения (3.42).

Чтобы получить формулы для определения поправок к исходным начальным условиям (3.43), необходимо ввести локальную систему координат, оси которой направлены по нормали и по касательной к траектории опорного решения [18, 57]. Переход к данной системе координат выполним с помощью канонической унивалентной замены переменных

$$(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = S \begin{pmatrix} n_u \\ m_u \\ n_v \\ m_v \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

где S — симплектическая ортогональная матрица, которая в общем случае вычисляется с помощью методики, описанной в работе [18]. Через n_u и n_v обозначим нормальные смещения, а через m_u и m_v — тангенциальное и энергетическое смещение соответственно [18]. В работе [88] было показано, что для системы с двумя степенями свободы матрица S в замене переменных (3.49) может быть выражена в следующем явном виде:

$$S = (\vec{R}, \vec{s}, -I\vec{R}, -I\vec{s}) = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} \dot{p}_2^* & \dot{q}_1^* & -\dot{q}_2^* & -\dot{p}_1^* \\ -\dot{p}_1^* & \dot{q}_2^* & \dot{q}_1^* & -\dot{p}_2^* \\ \dot{q}_2^* & \dot{p}_1^* & \dot{p}_2^* & \dot{q}_1^* \\ -\dot{q}_1^* & \dot{p}_2^* & -\dot{p}_1^* & \dot{q}_2^* \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

где $V = \sqrt{\dot{q}_1^{*2} + \dot{q}_2^{*2} + \dot{p}_1^{*2} + \dot{p}_2^{*2}}$, $I = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix}$ — симплектическая ортогональная единичная матрица, E_2 — единичная матрица размера 2×2 , $\vec{s} = \frac{1}{V} (\dot{q}_1^* \ \dot{q}_2^* \ \dot{p}_1^* \ \dot{p}_2^*)^T$ — единичный вектор касательной к траектории в данной точке, $\vec{R} = \frac{1}{V} (\dot{p}_2^* \ -\dot{p}_1^* \ \dot{q}_2^* \ -\dot{q}_1^*)^T$. Здесь и далее символ звездочка ” * ” означает, что отмеченные величины вычислены на опорном решении. Выполнив

замену переменных (3.49), получим каноническую систему дифференциальных уравнений для нормальных смещений:

$$\dot{n}_u = \frac{\partial H^n}{\partial n_v}, \quad \dot{n}_v = -\frac{\partial H^n}{\partial n_u}, \quad (3.51)$$

с первым интегралом $m_v = \frac{1}{V} \left(\Delta h - \Delta \mu \frac{\partial H}{\partial \mu} \Big|_* \right)$ и гамильтонианом [18]

$$H^n = \frac{1}{2} (h_{11}^* n_u^2 + h_{33}^* n_v^2 + 2n_u n_v h_{13}^*) + \quad (3.52)$$

$$+ n_u \left(h_{11}^{(\mu)} \Delta \mu + h_{11}^{(h)} \Delta h \right) + n_v \left(h_{12}^{(\mu)} \Delta \mu + h_{12}^{(h)} \Delta h \right).$$

Также получим одно дополнительное дифференциальное уравнение для тангенциального смещения:

$$\dot{m}_u = \frac{\dot{V}}{V} m_u + h_{14}^* n_u + h_{34}^* n_v + h_2^{(\mu)} \Delta \mu + h_2^{(h)} \Delta h. \quad (3.53)$$

Коэффициенты в (3.52) и (3.53) определяются по следующим формулам:

$$h_{11}^{(\mu)} = \frac{1}{V} \left(-h_{14} \frac{\partial H}{\partial \mu} + \dot{p}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial \mu} - \dot{p}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial \mu} + \dot{q}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \mu} - \dot{q}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial \mu} \right) \Big|_*,$$

$$h_{12}^{(\mu)} = \frac{1}{V} \left(-h_{34} \frac{\partial H}{\partial \mu} - \dot{q}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial \mu} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial \mu} + \dot{p}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \mu} - \dot{p}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial \mu} \right) \Big|_*,$$

$$h_2^{(\mu)} = \frac{1}{V} \left(-h_{44} \frac{\partial H}{\partial \mu} - \dot{p}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial \mu} - \dot{p}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial \mu} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \mu} + \dot{q}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial \mu} \right) \Big|_*,$$

$$h_{11}^{(h)} = -h_{14}^*, \quad h_{12}^{(h)} = -h_{34}^*, \quad h_2^{(h)} = h_{44}^*,$$

$$h_{11} = \vec{R}^T (\mathbf{H} \mathbf{R} + I \dot{\vec{R}}), \quad h_{13} = -\vec{R}^T (\mathbf{H} I \vec{R} - \dot{\vec{R}}), \quad h_{14} = \vec{R}^T I (I \mathbf{H} I + \mathbf{H}) \vec{s},$$

$$h_{33} = -\vec{R}^T I (\mathbf{H} I \vec{R} - \dot{\vec{R}}), \quad h_{34} = -\vec{R}^T (I \mathbf{H} I + \mathbf{H}) \vec{s}, \quad h_{44} = -\vec{s}^T (I \mathbf{H} I + \mathbf{H}) \vec{s},$$

где \mathbf{H} — матрица Гессе гамильтоновой системы (3.51). В приведённых выше формулах символ $\Big|_*$ означает, что все величины, входящие в это выражение, вычисляются на опорном решении.

Чтобы определить поправки (3.48), необходимо найти начальные условия $n_u(0)$, $n_v(0)$ и $m_u(0)$ периодического решения системы (3.51) и уравнения (3.53), удовлетворяющего следующим соотношениям

$$n_u(0) = n_u(T^*), \quad n_v(0) = n_v(T^*), \quad m_u(0) = m_u(T^*) + V(0)\tau. \quad (3.54)$$

Далее представим смещения n_u , n_v , m_u и поправку τ в виде линейных комбинаций приращений параметров $\Delta\mu$ и Δh :

$$\begin{aligned} n_u &= n_u^{(\mu)} \Delta\mu + n_u^{(h)} \Delta h, & n_v &= n_v^{(\mu)} \Delta\mu + n_v^{(h)} \Delta h, \\ m_u &= m_u^{(\mu)} \Delta\mu + m_u^{(h)} \Delta h, & \tau &= \tau^{(\mu)} \Delta\mu + \tau^{(h)} \Delta h. \end{aligned} \quad (3.55)$$

В результате подстановки (3.55) в (3.51), (3.53) и в краевые условия (3.54), а также воспользовавшись независимостью приращений параметров $\Delta\mu$ и Δh . Получаем так называемые уравнения-предиктора для нормальных и тангенциальных смещений [18, 88].

Рассмотрим сначала уравнения для нормальных смещений. Они распадаются на две независимые линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{n}_u^{(\mu)} &= h_{13}^* n_u^{(\mu)} + h_{33}^* n_v^{(\mu)} + h_{12}^{(\mu)} \\ \dot{n}_v^{(\mu)} &= -h_{11}^* n_u^{(\mu)} - h_{13}^* n_v^{(\mu)} - h_{11}^{(\mu)} \end{cases}, \quad (3.56)$$

$$\begin{cases} \dot{n}_u^{(h)} &= h_{13}^* n_u^{(h)} + h_{33}^* n_v^{(h)} + h_{12}^{(h)} \\ \dot{n}_v^{(h)} &= -h_{11}^* n_u^{(h)} - h_{13}^* n_v^{(h)} - h_{11}^{(h)} \end{cases}, \quad (3.57)$$

соответствующие приращению параметров $\Delta\mu$ и Δh соответственно. Начальные условия периодического решения систем (3.56) и (3.57) можно определить из соотношений

$$n_u^{(\mu)}(0) = n_u^{(\mu)}(T^*), \quad n_v^{(\mu)}(0) = n_v^{(\mu)}(T^*), \quad (3.58)$$

$$n_u^{(h)}(0) = n_u^{(h)}(T^*), \quad n_v^{(h)}(0) = n_v^{(h)}(T^*). \quad (3.59)$$

С этой целью запишем общее решение систем (3.56) и (3.57) дифференциальных уравнений в виде суммы общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы

$$\vec{n}^{(\mu)}(t) = N(t) \vec{n}^{(\mu)}(0) + \vec{n}_p^{(\mu)}(t), \quad (3.60)$$

$$\vec{n}^{(h)}(t) = N(t)\vec{n}^{(h)}(0) + \vec{n}_p^{(h)}(t), \quad (3.61)$$

где

$$\vec{n}^{(\mu)} = \begin{pmatrix} n_u^{(\mu)} \\ n_v^{(\mu)} \end{pmatrix}, \quad \vec{n}^{(h)} = \begin{pmatrix} n_u^{(h)} \\ n_v^{(h)} \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_p^{(\mu)} = \begin{pmatrix} n_{up}^{(\mu)} \\ n_{vp}^{(\mu)} \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_p^{(h)} = \begin{pmatrix} n_{up}^{(h)} \\ n_{vp}^{(h)} \end{pmatrix}$$

а $\vec{n}^{(\mu)}(0)$, $\vec{n}^{(h)}(0)$ — неизвестные начальные условия для $\vec{n}^{(\mu)}(t)$, $\vec{n}^{(h)}(t)$. Через $N(t) = \begin{pmatrix} n_{u1} & n_{u2} \\ n_{v1} & n_{v2} \end{pmatrix}$ обозначена фундаментальная матрица решений однородной системы, которая получается путём интегрирования следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{n}_{u1} = h_{13}^* n_{u1} + h_{33}^* n_{v1} \\ \dot{n}_{v1} = -h_{11}^* n_{u1} - h_{13}^* n_{v1} \\ \dot{n}_{u2} = h_{13}^* n_{u2} + h_{33}^* n_{v2} \\ \dot{n}_{v2} = -h_{11}^* n_{u2} - h_{13}^* n_{v2} \end{cases}, \quad (3.62)$$

с начальными условиями

$$n_{u1}(0) = 1, \quad n_{v1}(0) = 0, \quad n_{u2}(0) = 0, \quad n_{v2}(0) = 1. \quad (3.63)$$

Частные решения $\vec{n}_p^{(\mu)}(t)$, $\vec{n}_p^{(h)}(t)$ неоднородных систем дифференциальных уравнений (3.56), (3.57) находятся путём интегрирования системы:

$$\begin{cases} \dot{n}_{up}^{(\mu)} = h_{13}^* n_{up}^{(\mu)} + h_{33}^* n_{vp}^{(\mu)} + h_{12}^{(\mu)} \\ \dot{n}_{vp}^{(\mu)} = -h_{11}^* n_{up}^{(\mu)} - h_{13}^* n_{vp}^{(\mu)} - h_{11}^{(\mu)} \\ \dot{n}_{up}^{(h)} = h_{13}^* n_{up}^{(h)} + h_{33}^* n_{vp}^{(h)} + h_{12}^{(h)} \\ \dot{n}_{vp}^{(h)} = -h_{11}^* n_{up}^{(h)} - h_{13}^* n_{vp}^{(h)} - h_{11}^{(h)} \end{cases}, \quad (3.64)$$

с нулевыми начальными условиями

$$n_{up}^{(\mu)}(0) = 0, \quad n_{vp}^{(\mu)}(0) = 0, \quad n_{up}^{(h)}(0) = 0, \quad n_{vp}^{(h)}(0) = 0. \quad (3.65)$$

Подставляя (3.60), (3.61) в (3.58), (3.59), получаем формулы для начальных условий

$$n_u^{(\mu)}(0) = \frac{n_{up}^{(\mu)}(T^*) - n_{v2}(T^*)n_{up}^{(\mu)}(T^*) + n_{u2}(T^*)n_{vp}^{(\mu)}(T^*)}{n_{u1}(T^*)n_{v2}(T^*) - n_{u2}(T^*)n_{v1}(T^*) - n_{u1}(T^*) - n_{v2}(T^*) + 1}, \quad (3.66)$$

$$n_v^{(\mu)}(0) = \frac{n_{vp}^{(\mu)}(T^*) - n_{u1}(T^*)n_{vp}^{(\mu)}(T^*) + n_{v1}(T^*)n_{up}^{(\mu)}(T^*)}{n_{u1}(T^*)n_{v2}(T^*) - n_{u2}(T^*)n_{v1}(T^*) - n_{u1}(T^*) - n_{v2}(T^*) + 1},$$

$$n_u^{(h)}(0) = \frac{n_{up}^{(h)}(T^*) - n_{v2}(T^*)n_{up}^{(h)}(T^*) + n_{u2}(T^*)n_{vp}^{(h)}(T^*)}{n_{u1}(T^*)n_{v2}(T^*) - n_{u2}(T^*)n_{v1}(T^*) - n_{u1}(T^*) - n_{v2}(T^*) + 1}, \quad (3.67)$$

$$n_v^{(h)}(0) = \frac{n_{vp}^{(h)}(T^*) - n_{u1}(T^*)n_{vp}^{(h)}(T^*) + n_{v1}(T^*)n_{up}^{(h)}(T^*)}{n_{u1}(T^*)n_{v2}(T^*) - n_{u2}(T^*)n_{v1}(T^*) - n_{u1}(T^*) - n_{v2}(T^*) + 1}.$$

Дифференциальные уравнения для тангенциальных смещений имеют вид:

$$\dot{m}_u^{(\mu)} = \frac{\dot{V}}{V}m_u^{(\mu)} + h_{14}^*n_u^{(\mu)} + h_{34}^*n_v^{(\mu)} + h_2^{(\mu)}, \quad (3.68)$$

$$\dot{m}_u^{(h)} = \frac{\dot{V}}{V}m_u^{(h)} + h_{14}^*n_u^{(h)} + h_{34}^*n_v^{(h)} + h_2^{(h)}. \quad (3.69)$$

Используя уравнения (3.68), (3.69), найдём поправки $\tau^{(\mu)}$, $\tau^{(h)}$.

Подставим решение (3.60) в дифференциальное уравнение (3.68), а решение (3.61) в дифференциальное уравнение (3.69). Тогда общее решения этих дифференциальных уравнений можно искать в следующем виде [18]:

$$m_u^{(\mu)}(t) = \frac{V(t)}{V(0)}m_u^{(\mu)}(0) + m_{u1}(t)n_u^{(\mu)}(0) + m_{u2}(t)n_v^{(\mu)}(0) + m_{up}^{(\mu)}(t), \quad (3.70)$$

$$m_u^{(h)}(t) = \frac{V(t)}{V(0)}m_u^{(h)}(0) + m_{u1}(t)n_u^{(h)}(0) + m_{u2}(t)n_v^{(h)}(0) + m_{up}^{(h)}(t), \quad (3.71)$$

где $m_{u1}(t)$, $m_{u2}(t)$ находятся в результате решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{m}_{u1} &= \frac{\dot{V}}{V}m_{u1} + h_{14}^*n_{u1} + h_{34}^*n_{v1} \\ \dot{m}_{u2} &= \frac{\dot{V}}{V}m_{u2} + h_{14}^*n_{u2} + h_{34}^*n_{v2} \end{cases} \quad (3.72)$$

с начальными условиями

$$m_{u1}(0) = 0, \quad m_{u2}(0) = 0, \quad (3.73)$$

а $m_{up}^{(\mu)}(t)$, $m_{up}^{(h)}(t)$ находятся в результате решения следующих двух дифференциальных уравнений

$$\dot{m}_{up}^{(\mu)} = \frac{\dot{V}}{V} m_{up}^{(\mu)} + h_{14}^* n_{up}^{(\mu)} + h_{34}^* n_{vp}^{(\mu)} + h_2^{(\mu)}, \quad (3.74)$$

$$\dot{m}_{up}^{(h)} = \frac{\dot{V}}{V} m_{up}^{(h)} + h_{14}^* n_{up}^{(h)} + h_{34}^* n_{vp}^{(h)} + h_2^{(h)} \quad (3.75)$$

с начальными условиями

$$m_{up}^{(\mu)}(0) = 0, \quad m_{up}^{(h)}(0) = 0. \quad (3.76)$$

Поскольку смещение вдоль орбиты не изменит эту орбиту, поэтому для тангенциальных смещений справедливы следующие соотношения

$$m_u^{(\mu)}(0) = 0, \quad m_u^{(h)}(0) = 0. \quad (3.77)$$

Из условия периодичности (3.54) найдём поправки $\tau^{(\mu)}$, $\tau^{(h)}$

$$\tau^{(\mu)} = -\frac{1}{V(0)} \left(m_{u1}(T^*) n_u^{(\mu)}(0) + m_{u2}(T^*) n_v^{(\mu)}(0) + m_{up}^{(\mu)}(T^*) \right), \quad (3.78)$$

$$\tau^{(h)} = -\frac{1}{V(0)} \left(m_{u1}(T^*) n_u^{(h)}(0) + m_{u2}(T^*) n_v^{(h)}(0) + m_{up}^{(h)}(T^*) \right). \quad (3.79)$$

В результате совместного интегрирования системы дифференциальных уравнений (3.41), (3.62), (3.64), (3.72), (3.74), (3.75) с начальными условиями (3.43), (3.63), (3.65), (3.73), (3.76) на интервале от 0 до T^* , получим величины $n_{u1}(T^*)$, $n_{u2}(T^*)$, $n_{v1}(T^*)$, $n_{v2}(T^*)$ элементов матрицы $N(T^*)$ фундаментальных решений однородной системы, а также $m_{u1}(T^*)$, $m_{u2}(T^*)$, $n_{up}^{(\mu)}(T^*)$, $n_{vp}^{(\mu)}(T^*)$, $n_{up}^{(h)}(T^*)$, $n_{vp}^{(h)}(T^*)$, $m_{up}^{(\mu)}(T^*)$, $m_{up}^{(h)}(T^*)$. Если выполнено условие

$$|\det(N(T^*) - E)| \neq 0, \quad (3.80)$$

где $N(t)$ — фундаментальная матрица системы (3.62), E — соответствующая единичная матрица, то используя формулы (3.66), (3.67), (3.77), (3.78), (3.79),

получаем сначала $n_u^{(\mu)}(0)$, $n_v^{(\mu)}(0)$, $m_u^{(\mu)}(0)$, $n_u^{(h)}(0)$, $n_v^{(h)}(0)$, $m_u^{(h)}(0)$, $\tau^{(\mu)}$, $\tau^{(h)}$, а затем по формулам (3.55) и формуле

$$m_v(0) = \frac{1}{V(0)} \left(\Delta h - \Delta \mu \left. \frac{\partial H}{\partial \mu} (0) \right|_* \right)$$

находятся величины $n_u(0)$, $n_v(0)$, $m_u(0)$, $m_v(0)$ и τ . После чего находятся поправки (3.48), которые дают приближенные начальные условия \tilde{q}_{10} , \tilde{q}_{20} , \tilde{p}_{10} , \tilde{p}_{20} и приближенное значение \tilde{T} периода искомого периодического решения (3.45). Данный этап называется шагом предиктора. Символ " \sim " означает, что приближенные начальные условия и период периодического решения были получены на предыдущем шаге алгоритма.

Стоит отметить, если неравенство (3.80) обратится в равенство, то в этом случае с помощью данного метода невозможно численно продолжить семейство периодического решения. Такую ситуацию называют смертью либо естественным завершением семейства периодических решений [90]. Это явление обычно связано с бифуркацией или достижением положения равновесия.

Как было отмечено выше, начальные условия и период, полученные на шаге предиктора, являются приближенными. Чтобы уточнить их, необходимо воспользоваться корректорной частью метода. С этой целью установим приращения параметров $\Delta \mu$, Δh равными нулю. Также на данном шаге за опорное решение возьмём периодическое решение с начальными условиями \tilde{q}_{10} , \tilde{q}_{20} , \tilde{p}_{10} , \tilde{p}_{20} и периодом \tilde{T} . Поправки к приближенным начальным условиям и периоду, полученным на предыдущем шаге, будем искать с помощью так называемых уравнений изоэнергетического корректора [18, 88]:

$$\begin{cases} \dot{n}_{up} = h_{13}n_{up} + h_{33}n_{vp} + \frac{1}{V}h_{34}\Delta\tilde{h} \\ \dot{n}_{vp} = -h_{11}n_{up} - h_{13}n_{vp} - \frac{1}{V}h_{14}\Delta\tilde{h} \end{cases}, \quad (3.81)$$

$$\dot{m}_{up} = \frac{\dot{V}}{V}m_{up} + h_{14}n_{up} + h_{34}n_{vp} + \frac{1}{V}h_{44}\Delta\tilde{h}, \quad (3.82)$$

где отклонение $\Delta\tilde{h} = h - h_a$ искомого значения постоянной энергии h , от фактического значения параметра h_a , соответствующего неперiodическому движению, заданному приближенными начальными условиями. Далее совместно интегрируя систему дифференциальных уравнений (3.41), (3.62), (3.72), (3.81), (3.82) с начальными условиями (3.43), (3.63), (3.73) и $n_{up}(0) = 0$, $n_{vp}(0) = 0$, $m_{up}(0) = 0$ на интервале от 0 до \tilde{T} , получим величины $n_{u1}(\tilde{T})$, $n_{u2}(\tilde{T})$, $n_{v1}(\tilde{T})$, $n_{v2}(\tilde{T})$, $m_{u1}(\tilde{T})$, $m_{u2}(\tilde{T})$, $n_{up}(\tilde{T})$, $n_{vp}(\tilde{T})$, $m_{up}(\tilde{T})$. Здесь (3.43) являются приближенными начальными условиями, полученными на предыдущем шаге предиктора или корректора. Стоит отметить, что величины h_{11} , h_{13} , h_{14} , h_{33} , h_{34} , h_{44} и V в уравнениях (3.81) и (3.82) вычисляются на периодическом решении, которое также было получено на предыдущем шаге. Значения величин поправок $n_u(0)$, $n_v(0)$, $m_u(0)$, $m_v(0)$ и τ к начальным условиям и периоду, полученным на предыдущем шаге, вычисляются по следующим формулам

$$n_u(0) = \frac{n_{u2}(\tilde{T})N_1 + (n_{v2}(\tilde{T}) - 1)N_2}{n_{u1}(\tilde{T})n_{v2}(\tilde{T}) - n_{u2}(\tilde{T})n_{v1}(\tilde{T}) - n_{u1}(\tilde{T}) - n_{v2}(\tilde{T}) + 1},$$

$$n_v(0) = \frac{(1 - n_{u1}(\tilde{T}))N_1 + n_{v1}(\tilde{T})N_2}{n_{u1}(\tilde{T})n_{v2}(\tilde{T}) - n_{u2}(\tilde{T})n_{v1}(\tilde{T}) - n_{u1}(\tilde{T}) - n_{v2}(\tilde{T}) + 1},$$

$$m_u(0) = 0, \quad m_v(0) = \frac{\Delta\tilde{h}}{V(0)},$$

$$\tau = -\frac{1}{V(0)} \left(m_{u1}(\tilde{T})n_u(0) + m_{u2}(\tilde{T})n_v(0) + m_{up}(\tilde{T}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{V(0)} \dot{\tilde{q}}_1(0)\Delta\tilde{q}_1 + \dot{\tilde{q}}_2(0)\Delta\tilde{q}_2 + \dot{\tilde{p}}_1(0)\Delta\tilde{p}_1 + \dot{\tilde{p}}_2(0)\Delta\tilde{p}_2 \right),$$

где

$$N_1 = n_{vp}(\tilde{T}) - \dot{\tilde{q}}_2(0)\Delta\tilde{q}_1 + \dot{\tilde{q}}_1(0)\Delta\tilde{q}_2 + \dot{\tilde{p}}_2(0)\Delta\tilde{p}_1 - \dot{\tilde{p}}_1(0)\Delta\tilde{p}_2,$$

$$N_2 = -n_{up}(\tilde{T}) - \dot{\tilde{p}}_2(0)\Delta\tilde{q}_1 + \dot{\tilde{p}}_1(0)\Delta\tilde{q}_2 - \dot{\tilde{q}}_2(0)\Delta\tilde{p}_1 + \dot{\tilde{q}}_1(0)\Delta\tilde{p}_2,$$

$$\Delta\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(\tilde{T}) - \tilde{q}_i(0), \quad \Delta\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\tilde{T}) - \tilde{p}_i(0), \quad (i = 1, 2).$$

Результатами, полученным на шаге корректора, являются уточнённые начальные условия и период для искомого периодического решения (3.45). Процедуру

корректора можно повторять до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность периодического решения (3.45).

3.5. Области существования и линейный анализ орбитальной устойчивости короткопериодических движений

Коротко- и долгопериодические движения (3.15) и (3.16), полученные аналитически для малых значений амплитуды c , могут быть численно продолжены в область произвольных значений амплитуды при помощи метода, описанного в параграфе 3.4. Уже на этапе численного продолжения данных периодических движений можно получить выводы об их орбитальной устойчивости в линейном приближении. Для этого необходимо провести исследование устойчивости линейной гамильтоновой системы [18]

$$\dot{\vec{n}} = IH_n \vec{n}, \quad (3.83)$$

которая получается путём линеаризации уравнений для нормальных смещений. В (3.83) через $\vec{n} = \begin{pmatrix} \vec{n}_u \\ \vec{n}_v \end{pmatrix}$ обозначен вектор нормальных смещений, а $H_n = \partial H^n / \partial \vec{n}$.

Характеристическое уравнение системы (3.83) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho^2 - 2a\rho + 1 &= 0, \\ a &= \frac{1}{2}(n_{u1}(T) + n_{v2}(T)), \end{aligned} \quad (3.84)$$

где N — фундаментальная матрица системы (3.83), нормированная условием $N(0) = E$ и рассчитанная для исследуемого T -периодического решения. Значения $n_{u1}(T)$ и $n_{v2}(T)$ получаются на этапе численного интегрирования системы (3.62) с начальными условиями (3.63). Если $|a| < 1$, то решение орбитально

устойчиво в линейном приближении. Поскольку система (3.83) является частью уравнений предиктора, анализ орбитальной устойчивости в линейном приближении проводится с использованием той же вычислительной процедуры, что и при численном продолжении по параметрам.

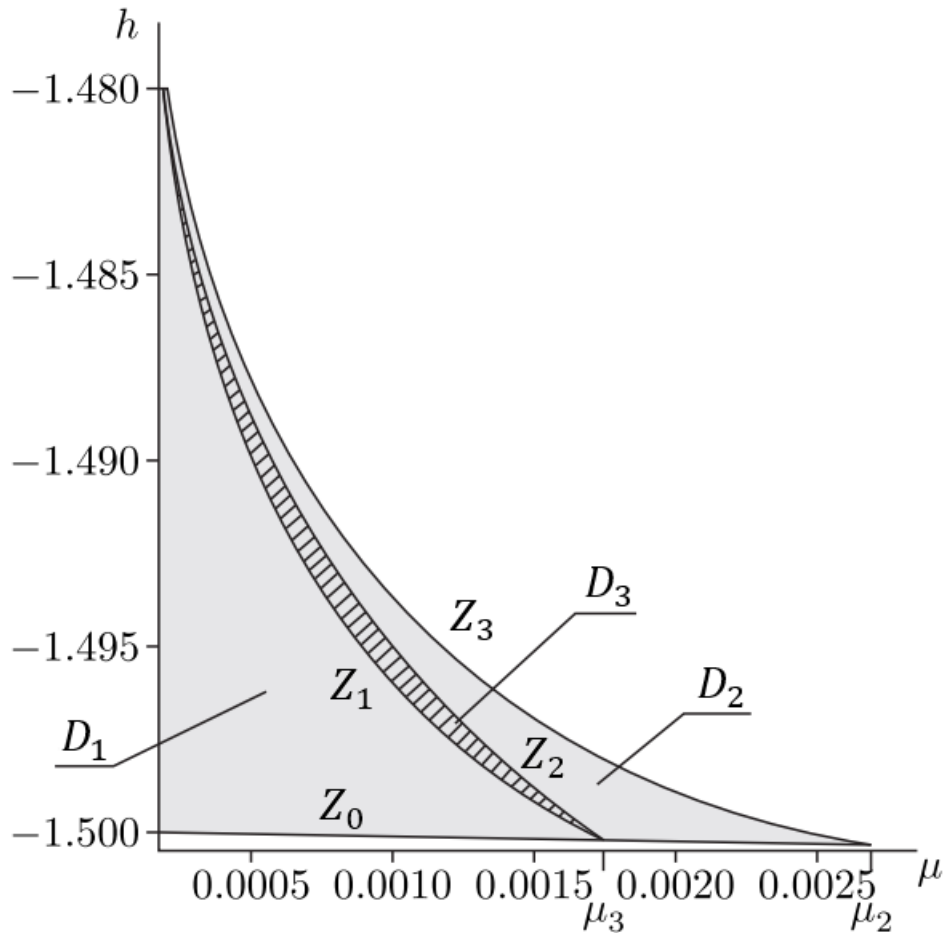
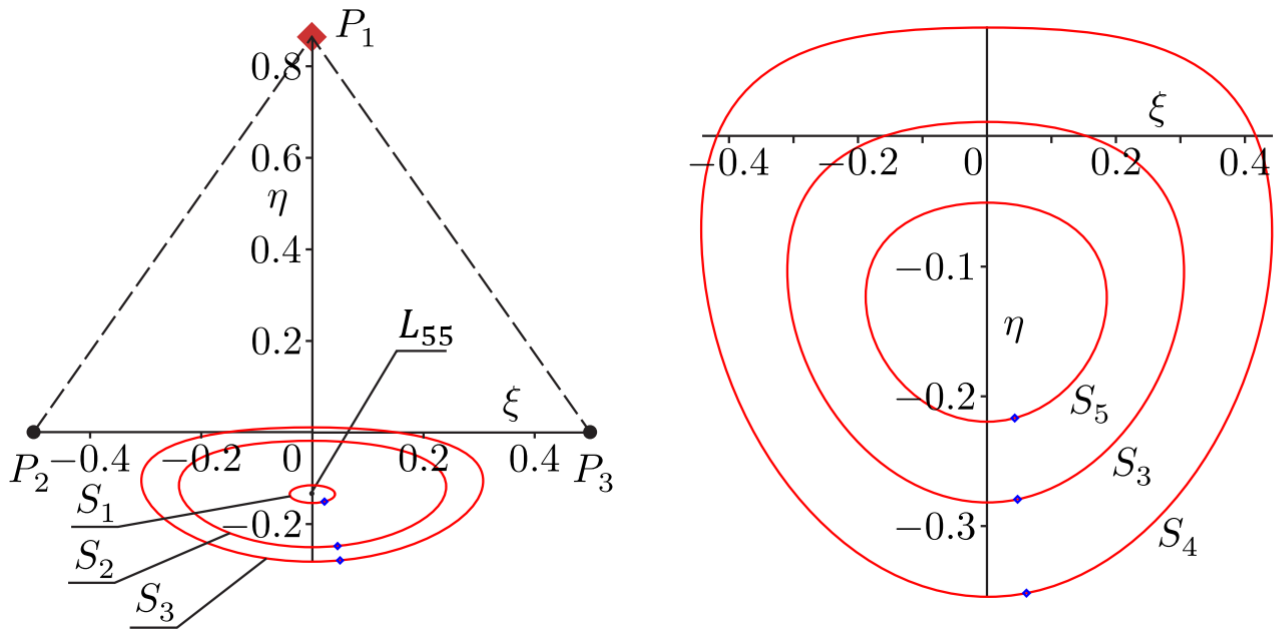


Рис. 3.3: Диаграмма орбитальной устойчивости в линейном приближении семейства короткопериодических движений, рождающихся из положения относительного равновесия L_{55}

Сначала рассмотрим семейства F_S короткопериодических движений и, используя их аналитическое представление (3.15) в качестве базовых решений, численно вычислим области их существования и орбитальной устойчивости в линейном приближении.

На основе описанной выше численной процедуры были получены области

существования и орбитальной устойчивости в линейном приближении семейства F_S короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия L_{55} . Данные области показаны на Рис. 3.3. Область существования периодического движения снизу ограничена кривой Z_0 , соответствующей положению относительного равновесия L_{55} , а сверху ограничена кривой Z_3 , где заканчивается семейство F_S короткопериодических движений. Левая граница данной области задается условием $\mu = 0$, которое соответствует ограниченной задаче двух тел. Короткопериодические движения, принадлежащие семейству F_S , орбитально устойчивы в линейном приближении в областях D_1 и D_2 и орбитально неустойчивы в области параметрического резонанса D_3 , ограниченной кривыми Z_1 и Z_2 .



(а) Орбиты короткопериодических движений, (б) Орбиты короткопериодических движений, рождающихся из положения относительного равновесия L_{55} , при $\mu = 0.001$ орбиты Z_3 области существования

Рис. 3.4: Орбиты короткопериодических движений

На Рис. 3.4а для фиксированного значения параметра μ ($\mu = 0.001$) и трех значений постоянной энергии h изображены орбиты семейства F_S короткопери-

одических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия L_{55} . Орбита S_1 соответствует небольшому отклонению постоянной энергии Δh ($\Delta h \approx 0.0001$) от ее значения, соответствующего положению относительного равновесия L_{55} . Орбита S_2 лежит внутри области орбитальной неустойчивости D_3 , а орбита S_3 находится на верхней границе Z_3 области существования при $\Delta h \approx 0.006$. На Рис. 3.4b показаны три орбиты на верхней границе Z_3 области существования для значений $\mu = 0.0002$ (орбита S_4), $\mu = 0.001$ (орбита S_3) и $\mu = 0.002$ (орбита S_5). Стоит отметить, что все орбиты семейства F_S короткопериодического движения имеют общую форму, показанную на Рис. 3.4.

Долгопериодические движения также рассматривались, но рассчитывались только в относительно небольшой окрестности рассматриваемого положения относительного равновесия L_{55} . Вычисления показали, что вблизи резонанса третьего порядка эти периодические движения ведут себя в соответствии с общими аналитическими результатами, полученными в работах [27, 39, 85] для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Подобласти D_1 и D_2 , изображенные на Рис. 3.3, содержат два различных семейства F_{L1} и F_{L2} долгопериодических движений соответственно. Семейство F_{L1} заканчивается на границе Z_2 , а семейство F_{L2} заканчивается на границе Z_1 . Подобласть D_3 содержит оба этих семейства.

Чтобы проверить результаты, были построены сечения Пуанкаре для конкретных значений параметров задачи. На Рис. 3.5 изображено сечение Пуанкаре, построенное для значений параметров $\mu = 0.001$, $h = -1.497$, где P_S — периодическое движение, соответствующее орбитально устойчивой орбите короткопериодического движения семейства F_S .

Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости периодических движений линейного анализа недостаточно. Нелинейный анализ орбитальной устойчивости будем проводить на основании методики, предложенной

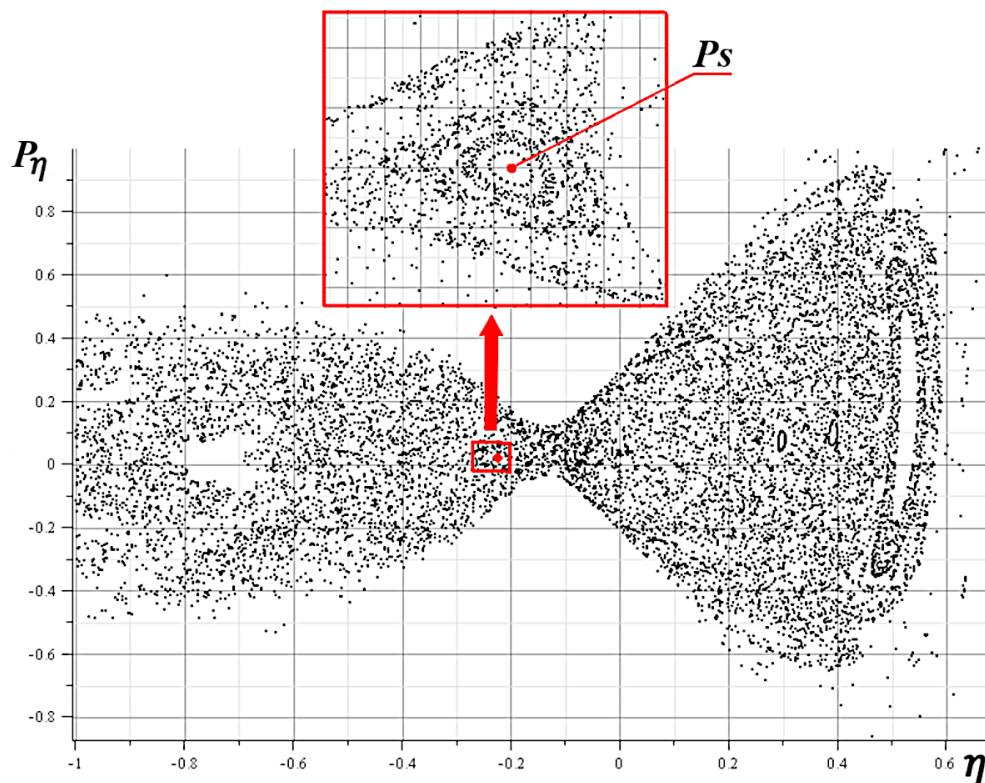


Рис. 3.5: Сечение Пуанкаре при $\mu = 0.001$ и $h = -1.497$, иллюстрирующие движение системы в окрестности орбитально устойчивого короткопериодического движения P_S семейства F_S

в работах [29, 41]. Суть данной методики состоит в том, что в окрестности устойчивой в линейном приближении периодической орбиты необходимо ввести локальные переменные, выполнить изоэнергетическую редукцию и свести задачу об орбитальной устойчивости к задаче об устойчивости положения равновесия редуцированной системы. Последняя задача может быть эффективно решена на основании метода симплектических отображений [29].

3.6. Локальные переменные и изоэнергетическая редукция

В данном параграфе коротко опишем метод введения локальных переменных в окрестности периодической орбиты гамильтоновой системы с двумя сте-

пенями свободы. Также здесь мы изложим алгоритм выполнения изоэнергетической редукции, позволяющей свести задачу об орбитальной устойчивости периодических орбит к более простой задаче об устойчивости положения равновесия по Ляпунову периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы.

Обозначим через

$$\xi = f_1(\nu), \quad \eta = f_2(\nu), \quad p_\xi = g_1(\nu), \quad p_\eta = g_2(\nu) \quad (3.85)$$

T -периодическое решение гамильтоновой системы (1.22), описывающее периодическую орбиту тела P . В соответствии с методикой, изложенной в работе [41], локальные координаты в окрестности периодической орбиты можно ввести при помощи следующего канонического преобразования

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ p_\xi \\ p_\eta \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{Z}}(\tau, u, \rho, v) = \begin{bmatrix} f_1(\tau) \\ f_2(\tau) \\ g_1(\tau) \\ g_2(\tau) \end{bmatrix} + u \vec{\mathbf{Z}}_u(\tau) + v \vec{\mathbf{Z}}_v(\tau) + [\rho + G(\tau, u, \rho, v)] \vec{\mathbf{Z}}_n(\tau) \quad (3.86)$$

где $\vec{\mathbf{Z}}$ — T -периодическая вектор-функция относительно переменной τ . В малой окрестности периодического движения $\vec{\mathbf{Z}}$ является аналитической функцией зависящей от переменных u, ρ, v . Новые переменные u, ρ, v на периодическом решении (3.85) принимают нулевые значения:

$$u = \rho = v = 0,$$

а $\tau = \nu + \tau(0)$.

Вектор-функции $\vec{\mathbf{Z}}_u, \vec{\mathbf{Z}}_v, \vec{\mathbf{Z}}_n$ в (3.86) определяются следующим образом:

$$\vec{\mathbf{Z}}_u = \frac{1}{V} \left(\frac{df_2}{d\tau}, -\frac{df_1}{d\tau}, -\frac{dg_2}{d\tau}, \frac{dg_1}{d\tau} \right)^T, \quad (3.87)$$

$$\vec{\mathbf{Z}}_v = \frac{1}{V} \left(-\frac{dg_1}{d\tau}, -\frac{dg_2}{d\tau}, \frac{df_1}{d\tau}, \frac{df_2}{d\tau} \right)^T, \quad (3.88)$$

$$\vec{\mathbf{z}}_n = \frac{1}{V} \left(\frac{dg_2}{d\tau}, -\frac{dg_1}{d\tau}, \frac{df_2}{d\tau}, -\frac{df_1}{d\tau} \right)^T, \quad (3.89)$$

где

$$V = \sqrt{\left(\frac{df_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{df_2}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dg_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dg_2}{d\tau}\right)^2}. \quad (3.90)$$

Функцию $G(\tau, u, \rho, v)$ в (3.86) можно представить в виде сходящегося ряда по степеням переменных u, ρ, v

$$G = G_2 + G_3 + G_4 + O_5, \quad (3.91)$$

где

$$G_2 = \frac{1}{2V^4} \left[A(u^2 + v^2)V^2 - 2\rho(Bu + Cv)V - A\rho^2 \right], \quad (3.92)$$

$$G_3 = -\frac{G_2}{V^4} \left[A\rho + (Bu + Cv)V \right], \quad (3.93)$$

$$G_4 = \frac{G_2}{4V^4} \left[(A^2(u^2 + v^2) - 4(Bu + Cv)^2)V^2 - 10A\rho(Bu + Cv)V - 5A^2\rho^2 \right], \quad (3.94)$$

а коэффициенты A, B и C

$$A = \frac{dg_1}{d\tau} \frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + \frac{dg_2}{d\tau} \frac{d^2 f_2}{d\tau^2} - \frac{df_1}{d\tau} \frac{d^2 g_1}{d\tau^2} - \frac{df_2}{d\tau} \frac{d^2 g_2}{d\tau^2}, \quad (3.95)$$

$$B = \frac{df_1}{d\tau} \frac{d^2 f_2}{d\tau^2} + \frac{dg_2}{d\tau} \frac{d^2 g_1}{d\tau^2} - \frac{df_2}{d\tau} \frac{d^2 f_1}{d\tau^2} - \frac{dg_1}{d\tau} \frac{d^2 g_2}{d\tau^2}, \quad (3.96)$$

$$C = \frac{df_1}{d\tau} \frac{d^2 g_2}{d\tau^2} + \frac{dg_1}{d\tau} \frac{d^2 f_2}{d\tau^2} - \frac{df_2}{d\tau} \frac{d^2 g_1}{d\tau^2} - \frac{dg_2}{d\tau} \frac{d^2 f_1}{d\tau^2}. \quad (3.97)$$

В работе [41] было показано, что в малой окрестности периодической орбиты функция G является периодической с периодом T относительно переменной τ и аналитической относительно переменных u, ρ, v .

Выполняя замену переменных (3.86), получим новый гамильтониан Γ , который имеет следующее разложение в ряд по новым переменным u, ρ, v :

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \tilde{\Gamma}, \quad (3.98)$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= \rho + \varphi_2(\tau, u, v), \\ \Gamma_3 &= \varphi_3(\tau, u, v) + \rho\psi_1(\tau, u, v), \\ \Gamma_4 &= \rho^2\chi(\tau) + \rho\psi_2(\tau, u, v) + \varphi_4(\tau, u, v).\end{aligned}\tag{3.99}$$

В (3.98) $\tilde{\Gamma}$ — члены пятого порядка и выше, а ψ_i ($i = 1, 2$) и φ_j ($j = 2, 3, 4$) — формы порядков i и j , коэффициенты которых периодически зависят от τ . Из структуры Γ_2 также видно, что переменная ρ имеет второй порядок малости в отличие от переменных u и v , которые имеют первый порядок малости.

После введения локальных переменных задача об орбитальной устойчивости периодических орбит (3.85) сводится к задаче об устойчивости системы с гамильтонианом Γ по отношению к переменным u, ρ, v . Исследование последней задачи существенно упростится, если выполнить изоэнергетическую редукцию на уровне энергии, отвечающему невозмущенной периодической орбите. Далее будем рассматривать движение канонической системы с гамильтонианом (3.98) на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$. Из уравнения $\Gamma = 0$ для малых значений переменных u, ρ, v имеем $\rho = -K(u, v, \tau)$, где

$$K(u, v, \tau) = K_2(u, v, \tau) + K_3(u, v, \tau) + K_4(u, v, \tau) + \dots\tag{3.100}$$

Здесь $K_k(u, v, \tau)$ — формы степени k относительно u и v , которые являются периодическими функциями относительно переменной τ . Первые три формы принимают следующий явный вид:

$$\begin{aligned}K_2(u, v, \tau) &= \varphi_2(u, v, \tau), \\ K_3(u, v, \tau) &= \varphi_3(u, v, \tau) - \psi_1(u, v, \tau)\varphi_2(u, v, \tau), \\ K_4(u, v, \tau) &= \chi(\tau)\varphi_2^2(u, v, \tau) + [\psi_1^2(u, v, \tau) - \psi_2(u, v, \tau)]\varphi_2(u, v, \tau) - \\ &\quad - \varphi_3(u, v, \tau)\psi_1(u, v, \tau) + \varphi_4(u, v, \tau).\end{aligned}\tag{3.101}$$

Формы ψ_i, φ_j в (3.101) те же, что и в (3.99).

Уравнения движения на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$ можно записать в виде так называемых уравнений Уиттекера, которые имеют форму уравнений Гамильтона

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial v}, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial u}. \quad (3.102)$$

Условие орбитальной устойчивости периодического движения совпадает с условием устойчивости по Ляпунову положения равновесия системы (3.102) [41]. Данное утверждение справедливо как при отсутствии резонансов, так и в случае резонанса. Таким образом, задача свелась к исследованию устойчивости периодической системы (3.102) с новым гамильтонианом $K(u, v, \tau)$.

3.7. Анализ орбитальной устойчивости

Для значений параметра μ из области устойчивости в линейном приближении, строгие выводы об устойчивости могут быть получены на основании нелинейного анализа. Нелинейный анализ проводится с использованием методики, описанной в работе [29]. Суть данной методики заключается в том, что исследование устойчивости полной нелинейной системы сводится к исследованию устойчивости неподвижной точки симплектического отображения, генерируемого фазовым потоком канонической системы с гамильтонианом (3.100). Ниже приведено краткое описание данного подхода.

Сначала проведём каноническую замену переменных

$$u = n_{11}Q + n_{12}P, \quad v = n_{21}Q + n_{22}P, \quad (3.103)$$

где коэффициенты n_{ij} в замене переменных (3.103) вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} n_{11} &= -\delta\kappa y_{12}, & n_{12} &= 0, \\ n_{21} &= \delta\kappa[y_{11} - a], & n_{22} &= -\kappa\sqrt{1 - a^2}, \\ \kappa &= |y_{12}\sqrt{1 - a^2}|^{-1/2}, & \delta &= \text{sign}[y_{12}\sqrt{1 - a^2}], \end{aligned} \quad (3.104)$$

где $y_{ij} = x_{ij}(T)$ и $x_{ij}(\tau)$ — элементы фундаментальной матрицы $\mathbf{X}(\tau)$ линейной канонической системы с гамильтонианом $K_2(u, v, \tau)$. Данная замена переменных приводит гамильтониан (3.100) к следующему виду

$$K^*(Q, P, \tau) = K_2^*(Q, P, \tau) + K_3^*(Q, P, \tau) + K_4^*(Q, P, \tau) + \dots \quad (3.105)$$

Коэффициенты линейной замены переменных (3.103) выбраны таким образом, чтобы линейная часть симплектического отображения, генерируемого канонической системой с гамильтонианом (3.105), имела наиболее простой вид. Методика построения данного симплектического отображения описана в работе [29]. В соответствии с этой методикой данное симплектическое отображение может быть получено в следующем явном виде

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} Q_0 - \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial P_0 \partial Q_0} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} - \frac{\partial F_4}{\partial P_0} + O_4 \\ P_0 + \frac{\partial F_3}{\partial Q_0} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_0^2} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_0} + O_4 \end{bmatrix}, \quad (3.106)$$

где Q_0, P_0 — начальные значения переменных Q, P при $\tau = 0$, а Q_1, P_1 — значения этих же переменных при $\tau = T$. Через O_4 обозначены члены выше третьей степени относительно Q_0, P_0 . Отображение (3.106) сохраняет площадь и обладает неподвижной точкой $Q_0 = P_0 = 0$. Линейная часть отображения определяется матрицей \mathbf{G} , которая имеет следующий вид

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\sigma) & \sin(2\pi\sigma) \\ -\sin(2\pi\sigma) & \cos(2\pi\sigma) \end{bmatrix}, \quad \sigma = \delta\lambda, \quad \cos(2\pi\lambda) = a,$$

где a — коэффициент характеристического уравнения линейной системы с гамильтонианом $K_2(u, v, \tau)$. Предполагается, что рассматривается случай, когда $|a| < 1$, т.е. положение равновесия линейной системы с гамильтонианом $K_2(u, v, \tau)$ устойчиво.

Формы $F_3 = \Phi_3(Q_0, P_0, T)$ и $F_4 = \Phi_4(Q_0, P_0, T)$ в симплектическом отобра-

жении (3.106) вычисляются с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_3(Q_0, P_0, \tau)}{\partial \tau} &= -\Gamma_3^*(Q_0, P_0, \tau), \\ \frac{\partial \Phi_4(Q_0, P_0, \tau)}{\partial \tau} &= -\Gamma_4^*(Q_0, P_0, \tau) - \frac{\partial \Gamma_3^*(Q_0, P_0, \tau)}{\partial P_0} \frac{\partial \Phi_3(Q_0, P_0, \tau)}{\partial Q_0}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Формы Γ_3^* и Γ_4^* получаются в результате подстановки канонической замены переменных

$$\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \mathbf{X}^*(\tau) \begin{bmatrix} Q_0 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

в формы $K_3^*(Q, P, \tau)$ и $K_4^*(Q, P, \tau)$ разложения гамильтониана (3.105). Здесь $\mathbf{X}^*(\tau)$ — фундаментальная матрица линейной канонической системы с гамильтонианом $K_2^*(Q, P, \tau)$.

Для подведения выводов об устойчивости неподвижной точки симплектического отображения (3.106), введём следующие обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= f_{30} - f_{12}, & a_2 &= f_{12} + 3f_{30}, & a_3 &= f_{22} - f_{40} - f_{04}, \\ b_1 &= f_{21} - f_{03}, & b_2 &= f_{21} + 3f_{03}, & b_3 &= f_{13} - f_{31}, \\ k &= 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) + 6(a_1b_2 - a_2b_1) - 8a_2b_2 + \\ &+ 9\text{ctg}(3\pi\sigma)(a_1^2 + b_1^2) + 3\text{ctg}(\pi\sigma)(a_2^2 + b_2^2), \\ k_1 &= 2[4a_3 + 9a_1b_1 - a_2b_2 + 3\text{ctg}(\pi\sigma)(a_1a_2 - b_1b_2)], \\ k_2 &= 8b_3 - 9(a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + 6\text{ctg}(\pi\sigma)(a_1b_2 + a_2b_1), \end{aligned} \quad (3.108)$$

где $\sigma = \frac{\delta \arccos(a)}{2\pi}$.

Величины f_{ij} в (3.108) являются коэффициентами форм F_k ($k = 3, 4$):

$$F_k = \sum_{i+j=k} f_{ij} Q_0^i P_0^j \quad (k = 3, 4).$$

Условия устойчивости неподвижной точки $Q_0 = P_0 = 0$ симплектического отображения (3.106) эквивалентны условиям орбитальной устойчивости соответствующей периодической орбиты (3.85) [26, 29]. Эти условия имеют следующий вид:

1. В нерезонансном случае, когда $a \neq -1/2$ и $a \neq 0$, при $k \neq 0$ периодическая орбита орбитально устойчива.
2. В случае резонанса третьего порядка ($a = -1/2$) если хотя бы одна из величин a_1 или b_1 отлична от нуля, то орбита орбитально неустойчива.
3. В случае резонанса четвертого порядка ($a = 0$), если $|k| > \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, то орбита орбитально устойчива. Если $|k| < \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, то орбита орбитально неустойчива.

3.8. Алгоритм исследования орбитальной устойчивости короткопериодических движений

На основании методик работ [29, 41], кратко описанных в параграфах 3.6 и 3.7, был разработан следующий алгоритм строгого нелинейного анализа орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия L_{55} . Данный алгоритм состоит в следующем:

1. **Численное построение периодических орбит.** С помощью метода численного продолжения [18, 33, 57, 88] для заданных значений параметров задачи (параметра μ и постоянной интеграла энергии h) находятся начальные значения периодических решений (периодических орбит).

$$f_1(0) = \xi_0, \quad f_2(0) = \eta_0, \quad g_1(0) = p_{\xi_0}, \quad g_2(0) = p_{\eta_0} \quad (3.109)$$

2. **Построение фундаментальной матрицы линеаризованной системы.** Путём численного интегрирования системы дифференциальных

уравнений

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial g_1}, & \frac{df_2}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial g_2}, & \frac{dg_1}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial f_1}, & \frac{dg_2}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial f_2}, \\ \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{\partial K_2}{\partial v_1}, & \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{\partial K_2}{\partial v_2}, & \frac{dv_1}{d\tau} &= -\frac{\partial K_2}{\partial u_1}, & \frac{dv_2}{d\tau} &= -\frac{\partial K_2}{\partial u_2} \end{aligned} \quad (3.110)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \xi_0, & f_2(0) &= \eta_0, & g_1(0) &= p_{\xi_0}, & g_2(0) &= p_{\eta_0}, \\ u_1(0) &= 1, & u_2(0) &= 0, & v_1(0) &= 0, & v_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

на интервале от 0 до T определяется фундаментальная матрица $\mathbf{X}(\tau)$ решений линейной канонической системы с гамильтонианом $K_2(u, v, \tau)$ и величины коэффициентов замены переменных (3.104).

3. Нахождение коэффициентов симплектического отображения.

На данном этапе численно вычисляются коэффициенты форм $\Phi_3(Q_0, P_0, \tau)$, $\Phi_4(Q_0, P_0, \tau)$ симплектического отображения (3.106). С этой целью в системе уравнений (3.107) приравниваем коэффициенты при равных степенях Q_0 , P_0 в левой и правой частях этих уравнений, в результате чего формируется система дифференциальных уравнений для коэффициентов форм $\Phi_3(Q_0, P_0, \tau)$, $\Phi_4(Q_0, P_0, \tau)$, которую необходимо интегрировать с нулевыми начальными условиями. Правые части данной системы зависят от функций Q , P , f , g , $\frac{df}{d\tau}$, $\frac{dg}{d\tau}$, $\frac{d^2f}{d\tau^2}$, $\frac{d^2g}{d\tau^2}$. Функции Q , P , f , g находятся в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial g_1}, & \frac{df_2}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial g_2}, & \frac{dg_1}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial f_1}, & \frac{dg_2}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial f_2}, \\ \frac{dQ_1}{d\tau} &= \frac{\partial K_2^*}{\partial P_1}, & \frac{dQ_2}{d\tau} &= \frac{\partial K_2^*}{\partial P_2}, & \frac{dP_1}{d\tau} &= -\frac{\partial K_2^*}{\partial Q_1}, & \frac{dP_2}{d\tau} &= -\frac{\partial K_2^*}{\partial Q_2} \end{aligned} \quad (3.111)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \xi_0, & f_2(0) &= \eta_0, & g_1(0) &= p_{\xi_0}, & g_2(0) &= p_{\eta_0}, \\ Q_1(0) &= 1, & Q_2(0) &= 0, & P_1(0) &= 0, & P_2(0) &= 1, \end{aligned}$$

Поэтому система дифференциальных уравнений для коэффициентов форм $\Phi_3(Q_0, P_0, \tau)$, $\Phi_4(Q_0, P_0, \tau)$ симплектического отображения (3.106) интегрируется совместно с системой дифференциальных уравнений (3.111), а первые и вторые производные функций f_i, g_i ($i = 1, 2$) последовательно вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\tau} &= g_1 + f_2 - \frac{\sqrt{3}(1-2\mu)}{2}, \\ \frac{df_2}{d\tau} &= g_2 - f_1, \\ \frac{dg_1}{d\tau} &= g_2 - \frac{(1-2\mu)f_1}{\rho_{10}^3} - \frac{\mu(2f_1+1)}{2\rho_{20}^3} - \frac{\mu(2f_1-1)}{2\rho_{30}^3}, \\ \frac{dg_2}{d\tau} &= -g_1 - \frac{(1-2\mu)(2f_2-\sqrt{3})}{2\rho_{10}^3} - \frac{\mu f_2}{\rho_{20}^3} - \frac{\mu f_2}{\rho_{30}^3}, \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_1}{d\tau^2} &= \frac{dg_1}{d\tau} + \frac{df_2}{d\tau}, \\ \frac{d^2 f_2}{d\tau^2} &= \frac{dg_2}{d\tau} - \frac{df_1}{d\tau}, \\ \frac{d^2 g_1}{d\tau^2} &= \frac{dg_2}{d\tau} + \frac{3(1-2\mu)f_1\rho_{11}}{2\rho_{10}^5} - \frac{(1-2\mu)}{\rho_{10}^3} \frac{df_1}{d\tau} + \\ &+ \frac{3\mu(2f_1+1)\rho_{21}}{4\rho_{20}^5} - \frac{\mu}{\rho_{20}^3} \frac{df_1}{d\tau} + \frac{3\mu(2f_1-1)\rho_{31}}{4\rho_{30}^5} - \frac{\mu}{\rho_{30}^3} \frac{df_1}{d\tau}, \\ \frac{d^2 g_2}{d\tau^2} &= -\frac{dg_1}{d\tau} + \frac{3(1-2\mu)(2f_2-\sqrt{3})\rho_{11}}{4\rho_{10}^5} - \frac{(1-2\mu)}{\rho_{10}^3} \frac{df_2}{d\tau} + \\ &+ \frac{3\mu f_2\rho_{21}}{2\rho_{20}^5} - \frac{\mu}{\rho_{20}^3} \frac{df_2}{d\tau} + \frac{3\mu f_2\rho_{31}}{2\rho_{30}^5} - \frac{\mu}{\rho_{30}^3} \frac{df_2}{d\tau}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

где

$$\rho_{10} = \left(f_1^2 + \left(f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \rho_{20} = \left(\left(f_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + f_2^2 \right)^{1/2},$$

$$\rho_{30} = \left(\left(f_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + f_2^2 \right)^{1/2},$$

$$\rho_{11} = 2f_1 \frac{df_1}{d\tau} + (2f_2 - \sqrt{3}) \frac{df_2}{d\tau}, \quad \rho_{21} = (2f_1 + 1) \frac{df_1}{d\tau} + 2f_2 \frac{df_2}{d\tau},$$

$$\rho_{31} = \left(2f_1 - 1\right) \frac{df_1}{d\tau} + 2f_2 \frac{df_2}{d\tau}.$$

Аналитические выражения для правых частей уравнений (3.111) с гамильтонианом $K_2^*(Q, P, \tau)$ очень громоздки, поэтому в данной работе эти выражения не приводятся. В результате интегрирования данной системы дифференциальных уравнений, получим выражения для коэффициентов f_{ij} форм F_3, F_4 симплектического отображения (3.106).

4. Проверка условий устойчивости. Используя результаты, полученные на предыдущем шаге, проверяются условия устойчивости.

Таким образом, на основании данного алгоритма при фиксированных значениях параметров задачи (μ и h) можно получить строгие выводы об орбитальной устойчивости периодической орбиты. Для реализации данного алгоритма был разработан пакет программ в системе компьютерной математики Maple 2017.

В результате применения описанного выше алгоритма был проведён нелинейный анализ орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия L_{55} . Исследование было выполнено для всех значений параметров задачи (μ и h), отвечающих устойчивым в линейном приближении короткопериодическим орбитам. Данные результаты представлены на Рис. 3.6. Резонансные кривые третьего порядка ($a = -1/2$) изображены штрихпунктирной линией. Было установлено, что в случае резонанса третьего порядка периодические орбиты орбитально неустойчивы при всех возможных значениях параметра μ . Резонансные кривые четвертого порядка ($a = 0$) изображены пунктирной линией и точками. Оказалось, что в случае резонанса четвёртого порядка существуют как орбитально устойчивые, так и орбитально неустойчивые периодические орбиты. Пунктирной линией изображена область орбитальной устойчивости, а точками изображена область, где периодические орбиты орбитально неустойчивы. Смена устой-

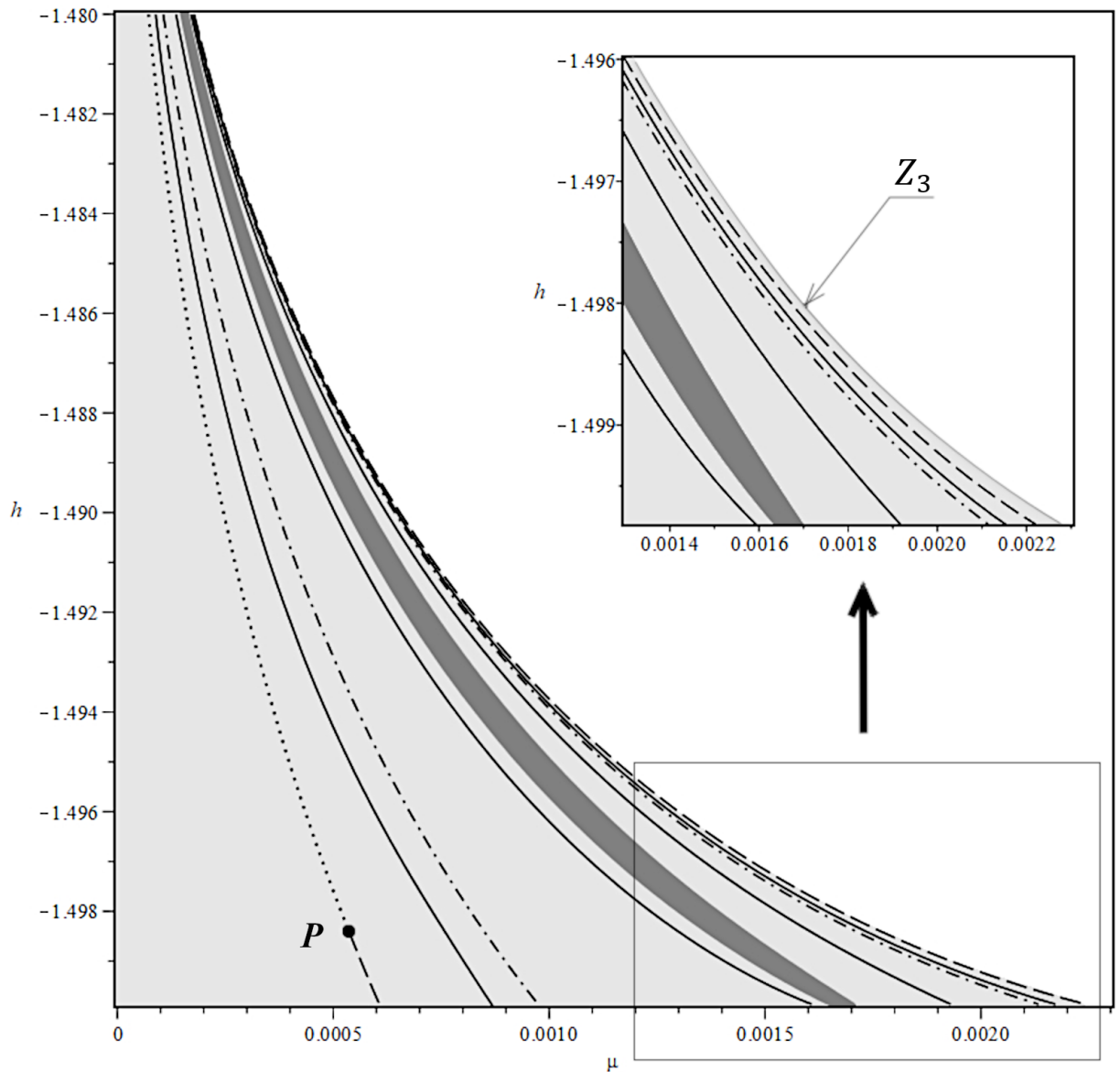


Рис. 3.6: Диаграмма орбитальной устойчивости семейства короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия L_{55}

устойчивости на неустойчивость происходит в точке P с координатами $\mu = 0.000536$, $h = -1.498403$, в которой исследование не проводилось. Для решения вопроса в указанной точке необходимо проводить анализ с учётом членов до шестой степени включительно в разложении гамильтониана задачи. Сплошными линиями изображены кривые вырождения, где коэффициент $k = 0$. Аналогично, для ответа на вопрос об устойчивости в случаях вырождения требуется прово-

диль анализ с учётом членов до шестой степени включительно в разложении гамильтониана задачи.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [13, 43, 89].

Заключение

Кратко изложим основные результаты, полученные в диссертационной работе.

1. В плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел исследован вопрос о бифуркации центральных конфигураций, соответствующих положениям относительного равновесия тела малой массы P в подвижной системе координат, которая вращается вместе с притягивающими телами P_1 , P_2 и P_3 . Установлено, что бифуркация центральных конфигураций возможна только в предельном случае, когда одна из масс притягивающих тел обращается в нуль. В работе описаны два возможных случая бифуркаций центральных конфигураций:

- а. Положения относительного равновесия L_{51} , L_{52} , L_{54} и L_{55} приближаются к притягивающему телу P_2 при $\mu_2 \rightarrow 0$, и в предельном случае $\mu_2 = 0$ совпадают с точкой либрации $L_5^{(2)}$.
- б. Положения относительного равновесия L_{15} , L_{25} , L_{45} и L_{55} приближаются к притягивающему телу P_3 при $\mu_3 \rightarrow 0$, и в предельном случае $\mu_3 = 0$ совпадают с точкой либрации $L_5^{(3)}$.

2. Получены границы областей существования положений относительного равновесия тела малой массы P . Установлено, что при $\mu_2 \ll 1$ или $\mu_3 \ll 1$ области существования положений относительного равновесия L_{5j} или L_{5j} ($j = 1, 2, 4, 5$) примыкают к точкам либрации $L_5^{(2)}$ или $L_5^{(3)}$. Для указанных областей существования при достаточно малых значениях параметра μ_2 или μ_3 их границы получены аналитически в виде сходящихся рядов по дробным степеням малого параметра. В общем случае границы областей существования положений относительного равновесия были получены численно.

3. Показано, что когда один из параметров задачи μ_2 или μ_3 мал, то движение тела малой массы вблизи одного из основных тел приближенно описывается в рамках задачи, которая является аналогом задачи Хилла.
4. Для устойчивых в линейном приближении положений относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} тела малой массы был выполнен строгий нелинейный анализ устойчивости по Ляпунову. Исследование выполнялось на основе метода нормальных форм и теории КАМ. Установлено, что при отсутствии резонансов второго, третьего и четвёртого порядка устойчивые в линейном приближении положения относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} также являются устойчивыми по Ляпунову почти при всех значениях параметров μ_2 и μ_3 . Неустойчивость может возникнуть лишь на множестве малой меры, отвечающей случаю вырождения. В пространстве параметров задачи была построена кривая, отвечающая данному вырожденному случаю (кривая вырождения). Для ответа на вопрос об устойчивости на кривой вырождения требуется дополнительный анализ с учётом членов до шестой степени включительно в разложении функции Гамильтона.
5. Отдельно рассмотрены случаи резонансов второго, третьего и четвёртого порядка. На основании нелинейного анализа было установлено:
 - а. Положения относительного равновесия L_{45} , L_{54} и L_{55} в случае резонанса третьего порядка неустойчивы.
 - б. В случае резонанса четвертого порядка положения относительного равновесия L_{45} и L_{54} неустойчивы.
 - в. В случае резонанса второго порядка положения относительного равновесия L_{45} и L_{54} устойчивы по Ляпунову.
 - г. В случае резонансов второго и четвёртого порядка положение отно-

сительного равновесия L_{55} может быть как устойчивым по Ляпунову, так и неустойчивым. Для резонансных кривых второго и четвёртого порядка численно были найдены граничные точки, где происходит смена устойчивости на неустойчивость или наоборот. Для решения вопроса об устойчивости в граничных точках требуется провести анализ с учетом членов до шестой степени включительно в разложении функции Гамильтона.

6. При достаточно малых значениях μ_2 и μ_3 точное численное вычисление коэффициентов нормальной формы гамильтониана задачи оказалось весьма затруднительным. В диссертации при помощи метода малого параметра было выполнено аналитическое исследование устойчивости по Ляпунову положений относительного равновесия тела малой массы в данных предельных случаях. В частности, аналитически были получены асимптотические выражения для резонансных кривых и кривой вырождения в виде рядов по степеням малого параметра задачи. Выводы об устойчивости положений относительного равновесия, полученные аналитически, полностью согласуются с выводами, основанного на численном нахождении коэффициентов нормальной формы гамильтониана задачи.
7. Разработан алгоритм численно-аналитического исследования орбитальной устойчивости короткопериодических движений в окрестности положений относительного равновесия тела малой массы в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел. На основании данного алгоритма был разработан комплекс программ в системе компьютерной математики Maple 2017 для решения задачи об орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия. Стоит отметить, что данные семейства короткопериодических движений были получены численно с помощью метода числен-

ного продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем. Данный алгоритм позволяет решать задачу об орбитальной устойчивости для произвольных значений инерционных параметров задачи и произвольных значений интеграла энергии, т.е. для периодических орбит, лежащих на любом уровне энергии.

8. Используя данный алгоритм, была решена задача о существовании и орбитальной устойчивости короткопериодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия L_{55} , когда два притягивающих тела P_2 и P_3 обладают одинаковыми массами. Для короткопериодических орбит, устойчивых в линейном приближении, было установлено:
 - а. Вне резонансных кривых третьего и четвёртого порядка, а также вне кривой вырождения короткопериодические орбиты орбитально устойчивы.
 - б. При резонансе третьего порядка короткопериодические орбиты орбитально неустойчивы.
 - в. При резонансе четвёртого порядка короткопериодические орбиты могут быть как орбитально устойчивыми, так и неустойчивыми. В плоскости параметров задачи на кривой, отвечающей резонансу четвёртого порядка, была найдена точка, где происходит смена орбитальной устойчивости на неустойчивость. Для решения вопроса об орбитальной устойчивости в данной точке и на кривой вырождения требуется провести анализ с учётом членов до шестой степени включительно в разложении функции Гамильтона.

Приложение А

А.1. Формулы для коэффициентов матрицы линейной замены переменных, нормализующих квадратичную часть функции Гамильтона

Если в линейной системе с гамильтонианом (2.3) нет резонансов первого и второго порядков (т.е. $\omega_2 \neq 0$ и $\omega_1 \neq \omega_2$) элементы матрицы

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & m_{11} & m_{12} \\ n_{21} & n_{22} & m_{21} & m_{22} \\ n_{31} & n_{32} & m_{31} & m_{32} \\ n_{41} & n_{42} & m_{41} & m_{42} \end{pmatrix}$$

линейной замены (2.10) вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} n_{1i} &= \frac{\chi_i (\omega_i^2 + b - 1)}{\omega_i}, & m_{1i} &= \delta_i \chi_i c, \\ n_{2i} &= -\frac{\chi_i c}{\omega_i}, & m_{2i} &= \delta_i \chi_i (\omega_i^2 - a - 1), \\ n_{3i} &= -\frac{\chi_i c (\omega_i^2 - 1)}{\omega_i}, & m_{3i} &= \delta_i \chi_i (a + b), \\ n_{4i} &= -\frac{\chi_i (b\omega_i^2 - ab + c^2 + a)}{\omega_i}, & m_{4i} &= 0, \\ \chi_i^2 &= \frac{(-1)^{i+1} \omega_i}{b\omega_i^4 + 2(c^2 - ab + a)\omega_i^2 + (b-1)(a^2 + 2a + b) - c^2(a+2)}, \\ \omega_i^2 &= \frac{1}{2} \left(a + b + 2 + (-1)^{i+1} \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2 + 8(a+b)} \right), & (i = 1, 2) \\ \delta_1 &= 1, & \delta_2 &= -1. \end{aligned}$$

В случае резонанса второго порядка ($\omega_1 = \omega_2$) элементы матрицы \mathbf{N} задаются формулами

$$n_{11} = \chi_1 c, \quad n_{12} = \frac{\chi_1}{2\omega} (a + 3b),$$

$$\begin{aligned}
m_{11} &= -\frac{\chi_2}{2\omega} (a + 3b), & m_{12} &= c \left(\frac{2}{\chi_1 \omega (a^2 - b^2)} + \chi_2 \right), \\
n_{21} &= \frac{1}{2} \chi_1 (b - a), & n_{22} &= -\frac{\chi_1 c}{\omega}, \\
m_{21} &= c \left(\frac{4\chi_1}{b - a} + \frac{\chi_2}{\omega} \right), & m_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(a - b)^2 \chi_1^2 - 4}{\chi_1 \omega (a - b)} - \chi_2 (a - b) \right), \\
n_{31} &= \chi_1 (a + b), & n_{32} &= -\frac{\chi_1 (a + b) c}{2\omega}, & m_{31} &= \frac{\chi_2 (a + b) c}{2\omega}, \\
m_{32} &= \frac{\chi_1 \left((a - b)^2 + 4(a + b) \right)}{\omega (b - a)} + \chi_2 (a + b), \\
n_{41} &= 0, & n_{42} &= -\frac{1}{2\chi_1 \omega}, \\
m_{41} &= \frac{1}{\chi_1^2} \left(\frac{2\chi_1}{b - a} + \frac{\chi_2}{2\omega} \right), & m_{42} &= \frac{4\chi_1 b c}{\omega (a - b)}, \\
\chi_1^2 &= -\frac{2}{(a + b)(a - b + 4)}, \\
\chi_2 &= \frac{\chi_1^3}{4\omega (a - b)} \left(16ab - (a + b) \left((3a + b)(a - b) + 20a + 20b + 32 \right) \right), \\
\omega^2 &= \frac{a + b + 2}{2}.
\end{aligned}$$

А.2. Выражения для коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Будем предполагать, что характеристическое уравнение линейной системы имеет чисто мнимые корни. Если в системе нет резонансов первого и второго порядков, т.е. частоты ω_i линейной системы удовлетворяют неравенствам $\omega_2 \neq 0$ и $\omega_1 \neq \omega_2$, то подходящим выбором канонических переменных функцию Гамильтона системы можно представить в виде

$$H = \frac{1}{2}\omega_1 (Q_1^2 + P_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2 (Q_2^2 + P_2^2) + H_3 + H_4 + \dots ,$$

где H_k — форма степени k ($k \geq 3$), которая может быть записана в виде

$$H_k = \sum_{l=k} h_{i_1 i_2 j_1 j_2} Q_1^{i_1} Q_2^{i_2} P_1^{j_1} P_2^{j_2}, \quad (l = i_1 + i_2 + j_1 + j_2).$$

Нелинейной канонической близкой к тождественной заменой переменных $Q_i, P_i \rightarrow u_i, v_i$ функцию Гамильтона можно привести к следующей нормальной форме

$$H = \frac{1}{2}\omega_1 (u_1^2 + v_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2 (u_2^2 + v_2^2) + \frac{1}{4}c_{20} (u_1^2 + v_1^2)^2 + \frac{1}{4}c_{11} (u_1^2 + v_1^2) (u_2^2 + v_2^2) + \frac{1}{4}c_{02} (u_2^2 + v_2^2)^2 + \dots .$$

Выражения для коэффициентов c_{02} , c_{11} и c_{20} нормальной формы функции Гамильтона через коэффициенты $h_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ разложения исходного гамильтониана имеют вид:

$$c_{02} = \frac{1}{4\omega_1\omega_2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \left(15h_{0003}^2\omega_1^3 - 60h_{0003}^2\omega_1\omega_2^2 + 6h_{0003}h_{0201}\omega_1^3 - 24h_{0003}h_{0201}\omega_1\omega_2^2 + \right. \\ \left. + 6h_{0004}\omega_1^3\omega_2 - 24h_{0004}\omega_1\omega_2^3 - 3h_{0012}^2\omega_1^2\omega_2 + 8h_{0012}^2\omega_2^3 - 2h_{0012}h_{0210}\omega_1^2\omega_2 + 16h_{0012}h_{0210}\omega_2^3 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +4h_{0012}h_{1101}\omega_1\omega_2^2 + 3h_{0102}^2\omega_1^3 - 12h_{0102}^2\omega_1\omega_2^2 + 6h_{0102}h_{0300}\omega_1^3 - 24h_{0102}h_{0300}\omega_1\omega_2^2 - \\
& -h_{0111}^2\omega_1^2\omega_2 - 4h_{0111}h_{1002}\omega_1\omega_2^2 + 4h_{0111}h_{1200}\omega_1\omega_2^2 + 3h_{0201}^2\omega_1^3 - 12h_{0201}^2\omega_1\omega_2^2 + 2h_{0202}\omega_1^3\omega_2 - \\
& -8h_{0202}\omega_1\omega_2^3 - 3h_{0210}^2\omega_1^2\omega_2 + 8h_{0210}^2\omega_2^3 - 4h_{0210}h_{1101}\omega_1\omega_2^2 + 15h_{0300}^2\omega_1^3 - 60h_{0300}^2\omega_1\omega_2^2 + \\
& +6h_{0400}\omega_1^3\omega_2 - 24h_{0400}\omega_1\omega_2^3 - 3h_{1002}^2\omega_1^2\omega_2 + 8h_{1002}^2\omega_2^3 - 2h_{1002}h_{1200}\omega_1^2\omega_2 + 16h_{1002}h_{1200}\omega_2^3 - \\
& -h_{1101}^2\omega_1^2\omega_2 - 3h_{1200}^2\omega_1^2\omega_2 + 8h_{1200}^2\omega_2^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{11} = & \frac{1}{\omega_1\omega_2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} \left(51h_{0012}h_{0030}\omega_1^2\omega_2^3 + 2h_{0021}h_{1110}\omega_1^3\omega_2^2 - \right. \\
& -8h_{0021}h_{1110}\omega_1\omega_2^4 + 4h_{0021}h_{2001}\omega_1^4\omega_2 - 16h_{0021}h_{2001}\omega_1^2\omega_2^3 + 8h_{1110}h_{2001}\omega_1\omega_2^4 + \\
& +4h_{0102}h_{2100}\omega_1\omega_2^4 + 12h_{0300}h_{2100}\omega_1\omega_2^4 - 4h_{0012}h_{2010}\omega_1^4\omega_2 + 17h_{0012}h_{2010}\omega_1^2\omega_2^3 - \\
& -8h_{1011}h_{2100}\omega_1\omega_2^4 + 17h_{0210}h_{2010}\omega_1^2\omega_2^3 + 12h_{0003}h_{2001}\omega_1\omega_2^4 + 16h_{1002}h_{1200}\omega_1^3\omega_2^2 - \\
& -4h_{1002}h_{1200}\omega_1\omega_2^4 - 4h_{0210}h_{2010}\omega_1^4\omega_2 + 4h_{0201}h_{2001}\omega_1\omega_2^4 - 4h_{1002}h_{1020}\omega_1^4\omega_2 + \\
& +17h_{1002}h_{1020}\omega_1^2\omega_2^3 - 12h_{1002}h_{3000}\omega_1^4\omega_2 + 51h_{1002}h_{3000}\omega_1^2\omega_2^3 - 2h_{0120}h_{1011}\omega_1^3\omega_2^2 + \\
& +8h_{0120}h_{1011}\omega_1\omega_2^4 + 2h_{1011}h_{2100}\omega_1^3\omega_2^2 + 17h_{1020}h_{1200}\omega_1^2\omega_2^3 + 51h_{0030}h_{0210}\omega_1^2\omega_2^3 - \\
& -51h_{0003}h_{0021}\omega_1^3\omega_2^2 + 12h_{0003}h_{0021}\omega_1\omega_2^4 - 51h_{0003}h_{2001}\omega_1^3\omega_2^2 + 16h_{0012}h_{0210}\omega_1^3\omega_2^2 - \\
& -4h_{0012}h_{0210}\omega_1\omega_2^4 + 8h_{0012}h_{1101}\omega_1^4\omega_2 - 2h_{0012}h_{1101}\omega_1^2\omega_2^3 - 4h_{1020}h_{1200}\omega_1^4\omega_2 - \\
& -2h_{1110}h_{2001}\omega_1^3\omega_2^2 - 12h_{1200}h_{3000}\omega_1^4\omega_2 + 51h_{1200}h_{3000}\omega_1^2\omega_2^3 - 8h_{0210}h_{1101}\omega_1^4\omega_2 + \\
& +2h_{0210}h_{1101}\omega_1^2\omega_2^3 - 51h_{0300}h_{2100}\omega_1^3\omega_2^2 - 12h_{0030}h_{0210}\omega_1^4\omega_2 + 4h_{0120}h_{2100}\omega_1^4\omega_2 - \\
& -16h_{0120}h_{2100}\omega_1^2\omega_2^3 - 17h_{0021}h_{0201}\omega_1^3\omega_2^2 + 4h_{0021}h_{0201}\omega_1\omega_2^4 + 8h_{0111}h_{1200}\omega_1^4\omega_2 - \\
& -17h_{0102}h_{0120}\omega_1^3\omega_2^2 + 4h_{0102}h_{0120}\omega_1\omega_2^4 - 17h_{0102}h_{2100}\omega_1^3\omega_2^2 - 8h_{0111}h_{1002}\omega_1^4\omega_2 + \\
& +2h_{0111}h_{1002}\omega_1^2\omega_2^3 - 2h_{0111}h_{1200}\omega_1^2\omega_2^3 - 51h_{0120}h_{0300}\omega_1^3\omega_2^2 + 12h_{0120}h_{0300}\omega_1\omega_2^4 - \\
& -12h_{0012}h_{0030}\omega_1^4\omega_2 - 17h_{0201}h_{2001}\omega_1^3\omega_2^2 - 17h_{2002}\omega_1^3\omega_2^3 + 4h_{0220}\omega_1\omega_2^5 - 12h_{0012}h_{0030}\omega_2^5 + \\
& +8h_{2100}^2\omega_1^2\omega_2^3 - 2h_{0021}^2\omega_1^4\omega_2 + 2h_{0111}^2\omega_1\omega_2^4 + 2h_{0012}^2\omega_1\omega_2^4 + 2h_{1200}^2\omega_1\omega_2^4 + 4h_{0022}\omega_1\omega_2^5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +8h_{1110}^2\omega_1^2\omega_2^3 - 8h_{0012}^2\omega_1^3\omega_2^2 + 12h_{0003}h_{0021}\omega_1^5 - 17h_{0022}\omega_1^3\omega_2^3 + 4h_{0022}\omega_1^5\omega_2 + 4h_{2200}\omega_1^5\omega_2 - \\
& - 2h_{2100}^2\omega_1^4\omega_2 - 4h_{0012}h_{2010}\omega_2^5 + 2h_{1002}^2\omega_1\omega_2^4 + 4h_{2002}\omega_1^5\omega_2 + 4h_{0102}h_{2100}\omega_1^5 + 4h_{2002}\omega_1\omega_2^5 + \\
& + 2h_{1101}^2\omega_1\omega_2^4 + 8h_{0021}^2\omega_1^2\omega_2^3 - 8h_{1002}^2\omega_1^3\omega_2^2 - 8h_{0210}^2\omega_1^3\omega_2^2 - 8h_{0111}^2\omega_1^3\omega_2^2 + 4h_{0201}h_{2001}\omega_1^5 + \\
& + 4h_{2200}\omega_1\omega_2^5 - 4h_{1002}h_{1020}\omega_2^5 - 2h_{1011}^2\omega_1^4\omega_2 + 4h_{0102}h_{0120}\omega_1^5 + 8h_{0120}^2\omega_1^2\omega_2^3 - 8h_{1200}^2\omega_1^3\omega_2^2 + \\
& + 4h_{0021}h_{0201}\omega_1^5 - 4h_{1020}h_{1200}\omega_2^5 + 12h_{0120}h_{0300}\omega_1^5 + 8h_{1011}^2\omega_1^2\omega_2^3 + 8h_{2001}^2\omega_1^2\omega_2^3 - \\
& - 12h_{1200}h_{3000}\omega_2^5 - 17h_{0220}\omega_1^3\omega_2^3 + 12h_{0003}h_{2001}\omega_1^5 - 12h_{0030}h_{0210}\omega_2^5 + 4h_{0220}\omega_1^5\omega_2 - \\
& - 2h_{1110}^2\omega_1^4\omega_2 - 2h_{0120}^2\omega_1^4\omega_2 - 17h_{2200}\omega_1^3\omega_2^3 - 4h_{0210}h_{2010}\omega_2^5 - 2h_{2001}^2\omega_1^4\omega_2 - 12h_{1002}h_{3000}\omega_2^5 - \\
& - 8h_{1101}^2\omega_1^3\omega_2^2 + 2h_{0210}^2\omega_1\omega_2^4 + 12h_{0300}h_{2100}\omega_1^5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{20} = & \frac{1}{4\omega_1\omega_2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)} \left(8h_{0021}^2\omega_1^3 - 3h_{0021}^2\omega_1\omega_2^2 + 4h_{0021}h_{1110}\omega_1^2\omega_2 + 16h_{0021}h_{2001}\omega_1^3 - \right. \\
& - 2h_{0021}h_{2001}\omega_1\omega_2^2 - 60h_{0030}^2\omega_1^2\omega_2 + 15h_{0030}^2\omega_2^3 - 24h_{0030}h_{2010}\omega_1^2\omega_2 + 6h_{0030}h_{2010}\omega_2^3 + \\
& + 24h_{0040}\omega_1^3\omega_2 - 6h_{0040}\omega_1\omega_2^3 + 8h_{0120}^2\omega_1^3 - 3h_{0120}^2\omega_1\omega_2^2 - 4h_{0120}h_{1011}\omega_1^2\omega_2 + 16h_{0120}h_{2100}\omega_1^3 - \\
& - 2h_{0120}h_{2100}\omega_1\omega_2^2 - h_{1011}^2\omega_1\omega_2^2 + 4h_{1011}h_{2100}\omega_1^2\omega_2 - 12h_{1020}^2\omega_1^2\omega_2 + 3h_{1020}^2\omega_2^3 - \\
& - 24h_{1020}h_{3000}\omega_1^2\omega_2 + 6h_{1020}h_{3000}\omega_2^3 - h_{1110}^2\omega_1\omega_2^2 - 4h_{1110}h_{2001}\omega_1^2\omega_2 + 8h_{2001}^2\omega_1^3 - \\
& - 3h_{2001}^2\omega_1\omega_2^2 - 12h_{2010}^2\omega_1^2\omega_2 + 3h_{2010}^2\omega_2^3 + 8h_{2020}\omega_1^3\omega_2 - 2h_{2020}\omega_1\omega_2^3 + 8h_{2100}^2\omega_1^3 - \\
& \left. - 3h_{2100}^2\omega_1\omega_2^2 - 60h_{3000}^2\omega_1^2\omega_2 + 15h_{3000}^2\omega_2^3 + 24h_{4000}\omega_1^3\omega_2 - 6h_{4000}\omega_1\omega_2^3 \right).
\end{aligned}$$

В случае резонанса третьего порядка ($\omega_1 = 2\omega_2$) коэффициент A нормальной формы (2.16) функции Гамильтона

$$A = 2\sqrt{2}\sqrt{X^2 + Y^2},$$

где

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{4} \left(h_{0012} - h_{0210} - h_{1101} \right), \\
Y &= \frac{1}{4} \left(h_{0111} + h_{1002} - h_{1200} \right).
\end{aligned}$$

В случае резонанса четвёртого порядка ($\omega_1 = 3\omega_2$) коэффициент B нормальной формы (2.18) функции Гамильтона

$$B = 4\sqrt{X_{1300}^2 + Y_{1300}^2},$$

где

$$\begin{aligned} X_{1300} = \frac{1}{40\omega_2} & \left(5(h_{0112} - h_{0310} + h_{1003} - h_{1201})\omega_2 + 20h_{0003}h_{1200} - 15h_{0003}h_{0111} - \right. \\ & - 10h_{0003}h_{1002} - 6h_{0012}h_{0120} - 20h_{0012}h_{0300} - h_{0012}h_{1011} - 4h_{0012}h_{2100} - 6h_{0021}h_{0111} - \\ & - 4h_{0021}h_{1002} + 4h_{0021}h_{1200} + 10h_{0102}h_{0210} + 5h_{0102}h_{1101} - 5h_{0111}h_{0201} + h_{0111}h_{1110} - \\ & - 4h_{0111}h_{2001} + 6h_{0120}h_{0210} + 4h_{0120}h_{1101} - 10h_{0201}h_{1002} + 10h_{0210}h_{0300} + h_{0210}h_{1011} + \\ & + 4h_{0210}h_{2100} + 15h_{0300}h_{1101} - h_{1002}h_{1110} - 6h_{1002}h_{2001} - h_{1011}h_{1101} + 6h_{1101}h_{2100} + \\ & \left. + h_{1110}h_{1200} + 6h_{1200}h_{2001} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{1300} = \frac{1}{40\omega_2} & \left(5(h_{0211} - h_{0013} + h_{1102} - h_{1300})\omega_2 + 6h_{1200}h_{2100} - 6h_{1101}h_{2001} - \right. \\ & - 6h_{1002}h_{2100} - h_{1011}h_{1200} - h_{1101}h_{1110} - 20h_{0300}h_{1002} + 10h_{0300}h_{1200} + h_{1002}h_{1011} - \\ & - 4h_{0210}h_{2001} - 4h_{0120}h_{1002} + 4h_{0120}h_{1200} - 5h_{0201}h_{1101} + h_{0210}h_{1110} - 6h_{0111}h_{0120} - \\ & - 15h_{0111}h_{0300} - h_{0111}h_{1011} - 4h_{0111}h_{2100} - 6h_{0021}h_{0210} - 4h_{0021}h_{1101} - 5h_{0102}h_{0111} + \\ & + 10h_{0102}h_{1200} + 10h_{0003}h_{0012} - 20h_{0003}h_{0210} - 15h_{0003}h_{1101} + 6h_{0012}h_{0021} + 10h_{0012}h_{0201} - \\ & \left. - h_{0012}h_{1110} + 4h_{0012}h_{2001} \right), \end{aligned}$$

а коэффициенты c_{02} , c_{11} и c_{20} нормальной формы (2.18) примут вид

$$\begin{aligned} c_{02} = \frac{1}{60\omega_2} & \left(30(3h_{0004} + h_{0202} + 3h_{0400})\omega_2 + 225h_{0003}^2 + 90h_{0003}h_{0201} - 19h_{0012}^2 - \right. \\ & - 2h_{0012}h_{0210} + 12h_{0012}h_{1101} + 45h_{0102}^2 + 90h_{0102}h_{0300} - 9h_{0111}^2 - 12h_{0111}h_{1002} + \\ & + 12h_{0111}h_{1200} + 45h_{0201}^2 - 19h_{0210}^2 - 12h_{0210}h_{1101} + 225h_{0300}^2 - 19h_{1002}^2 - 2h_{1002}h_{1200} - \\ & \left. - 9h_{1101}^2 - 19h_{1200}^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{11} = \frac{1}{105\omega_2} & \left(105(h_{0022} + h_{0220} + h_{2002} + h_{2200})\omega_2 - 18h_{1110}^2 - 105h_{1200}h_{3000} - 6h_{1110}h_{2001} - \right. \\
& - 35h_{1020}h_{1200} + 6h_{1011}h_{2100} - 105h_{1002}h_{3000} - 35h_{1002}h_{1020} + 315h_{0300}h_{2100} - 35h_{0210}h_{2010} + \\
& + 36h_{0120}h_{2100} + 105h_{0201}h_{2001} + 315h_{0120}h_{0300} - 6h_{0120}h_{1011} - 105h_{0030}h_{0210} + \\
& + 105h_{0102}h_{0120} + 105h_{0102}h_{2100} + 36h_{0021}h_{2001} - 35h_{0012}h_{2010} + 105h_{0021}h_{0201} + \\
& + 6h_{0021}h_{1110} + 315h_{0003}h_{0021} + 315h_{0003}h_{2001} - 105h_{0012}h_{0030} + 84h_{1002}h_{1200} - \\
& - 126h_{0210}h_{1101} - 126h_{0111}h_{1002} + 126h_{0111}h_{1200} + 84h_{0012}h_{0210} + 126h_{0012}h_{1101} - \\
& - 18h_{1011}^2 - 18h_{2100}^2 - 18h_{2001}^2 - 18h_{0120}^2 - 18h_{0021}^2 - 42h_{1200}^2 - 42h_{1101}^2 - 42h_{1002}^2 - \\
& \left. - 42h_{0210}^2 - 42h_{0111}^2 - 42h_{0012}^2 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{20} = \frac{1}{140\omega_2} & \left(70(3h_{0040} + h_{2020} + 3h_{4000})\omega_2 + 69h_{0021}^2 + 12h_{0021}h_{1110} + 142h_{0021}h_{2001} - \right. \\
& - 175h_{0030}^2 - 70h_{0030}h_{2010} + 69h_{0120}^2 - 12h_{0120}h_{1011} + 142h_{0120}h_{2100} - h_{1011}^2 + \\
& + 12h_{1011}h_{2100} - 35h_{1020}^2 - 70h_{1020}h_{3000} - h_{1110}^2 - 12h_{1110}h_{2001} + 69h_{2001}^2 - \\
& \left. - 35h_{2010}^2 + 69h_{2100}^2 - 175h_{3000}^2 \right).
\end{aligned}$$

В случае резонанса второго порядка ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) подходящим выбором переменных функцию Гамильтона можно представить в виде

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2) + \omega (Q_1 P_2 - Q_2 P_1) + H_3 + H_4 + \dots,$$

где H_k — форма степени k ($k \geq 3$), которая может быть записана в виде

$$H_k = \sum_{l=k} h_{i_1 i_2 j_1 j_2} Q_1^{i_1} Q_2^{i_2} P_1^{j_1} P_2^{j_2}, \quad (l = i_1 + i_2 + j_1 + j_2).$$

Нелинейной канонической близкой к тождественной заменой переменных $Q_i, P_i \rightarrow u_i, v_i$ функцию Гамильтона можно привести к следующей нормальной форме

$$\begin{aligned}
H = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) + \omega (u_1 v_2 - u_2 v_1) + (u_1^2 + u_2^2) & \left(A (u_1^2 + u_2^2) + \right. \\
& \left. + B (u_1 v_2 - u_2 v_1) + C (v_1^2 + v_2^2) \right) + \dots
\end{aligned}$$

Выражение для коэффициента A нормальной формы функции Гамильтона через коэффициенты $h_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ разложения исходного гамильтониана имеет вид:

$$A = \frac{1}{16\omega^2} \left((6h_{0400} + 2h_{2200} + 6h_{4000})\omega^2 + (6h_{2010}h_{2100} - 6h_{0201}h_{1200} - 14h_{0201}h_{3000} + 10h_{0210}h_{0300} + 2h_{0210}h_{2100} + 4h_{0300}h_{1101} + 14h_{0300}h_{2010} - 4h_{1110}h_{3000} - 2h_{1200}h_{2001} - 10h_{2001}h_{3000})\omega + 23h_{0300}^2 + 14h_{0300}h_{2100} + 3h_{1200}^2 + 14h_{1200}h_{3000} + 3h_{2100}^2 + 23h_{3000}^2 \right).$$

А.3. Выражения для коэффициентов a_i, b_i, c_i ($i = 0, 1, 2$) рядов (2.29)

Выражения для коэффициентов $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ рядов (2.29) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1 - 9\mu_2}{4} + \frac{1}{\tilde{\rho}^3} - \frac{3\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^2}{\tilde{\rho}^5}, \\
 a_1 &= \frac{3}{8} \left((23\mu_2 - 7)\tilde{x}_1^{(0)} + \sqrt{3}(\mu_2 - 1)\tilde{x}_2^{(0)} \right) + \\
 &+ \frac{3}{\tilde{\rho}^7} \left[2\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^3 \tilde{x}_1^{(1)} + 4\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^2 \tilde{x}_2^{(0)} \tilde{x}_2^{(1)} - 3\left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^2 \tilde{x}_1^{(0)} \tilde{x}_1^{(1)} - \left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^3 \tilde{x}_2^{(1)} \right], \\
 a_2 &= \frac{3}{32} \left[(37 - 165\mu_2)\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^2 - 50\sqrt{3}(1 - \mu_2)\tilde{x}_1^{(0)}\tilde{x}_2^{(0)} - (41 - 105\mu_2)\left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^2 - \right. \\
 &- 4(7 - 23\mu_2)\tilde{x}_1^{(1)} - 4\sqrt{3}(1 - \mu_2)\tilde{x}_2^{(1)} \left. \right] + \frac{3}{2\tilde{\rho}^9} \left[4\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^5 \tilde{x}_1^{(2)} - 2\left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^5 \tilde{x}_2^{(2)} - \right. \\
 &- 8\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^4 \left(\tilde{x}_1^{(1)}\right)^2 + 4\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^4 \left(\tilde{x}_2^{(1)}\right)^2 + 8\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^4 \tilde{x}_2^{(0)} \tilde{x}_2^{(2)} - 3\left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^4 \left(\tilde{x}_1^{(1)}\right)^2 + \\
 &+ 4\left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^4 \left(\tilde{x}_2^{(1)}\right)^2 - 6\left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^4 \tilde{x}_1^{(0)} \tilde{x}_1^{(2)} - 40\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^3 \tilde{x}_1^{(1)} \tilde{x}_2^{(0)} \tilde{x}_2^{(1)} + 30\left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^3 \tilde{x}_1^{(0)} \tilde{x}_1^{(1)} \tilde{x}_2^{(1)} - \\
 &- 2\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^3 \left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^2 \tilde{x}_1^{(2)} + 6\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^2 \left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^3 \tilde{x}_2^{(2)} - 27\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^2 \left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^2 \left(\tilde{x}_2^{(1)}\right)^2 + \\
 &\left. + 24\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^2 \left(\tilde{x}_1^{(1)}\right)^2 \left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^2 \right], \\
 b_0 &= \frac{9\mu_2 - 5}{4} + \frac{1}{\tilde{\rho}^3} - \frac{3\left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^2}{\tilde{\rho}^5}, \\
 b_1 &= \frac{3}{8} \left((11 - 19\mu_2)\tilde{x}_1^{(0)} + 3\sqrt{3}(\mu_2 - 1)\tilde{x}_2^{(0)} \right) - \\
 &- \frac{3}{\tilde{\rho}^7} \left[\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^3 \tilde{x}_1^{(1)} + 3\left(\tilde{x}_1^{(0)}\right)^2 \tilde{x}_2^{(0)} \tilde{x}_2^{(1)} - 4\left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^2 \tilde{x}_1^{(0)} \tilde{x}_1^{(1)} - 2\left(\tilde{x}_2^{(0)}\right)^3 \tilde{x}_2^{(1)} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 = & \frac{3}{32} \left[(105\mu_2 - 41) \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^2 + 90\sqrt{3}(1 - \mu_2) \tilde{x}_1^{(0)} \tilde{x}_2^{(0)} - (3 + 45\mu_2) \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^2 + \right. \\
& + 4(11 - 19\mu_2) \tilde{x}_1^{(1)} - 12\sqrt{3}(1 - \mu_2) \tilde{x}_2^{(1)} \left. \right] + \frac{3}{2\tilde{\rho}^9} \left[4 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^5 \tilde{x}_2^{(2)} - 2 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^5 \tilde{x}_1^{(2)} + \right. \\
& + 4 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^4 \left(\tilde{x}_1^{(1)} \right)^2 - 3 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^4 \left(\tilde{x}_2^{(1)} \right)^2 - 6 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^4 \tilde{x}_2^{(0)} \tilde{x}_2^{(2)} + 4 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^4 \left(\tilde{x}_1^{(1)} \right)^2 - \\
& - 8 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^4 \left(\tilde{x}_2^{(1)} \right)^2 + 8 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^4 \tilde{x}_1^{(0)} \tilde{x}_1^{(2)} + 30 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^3 \tilde{x}_1^{(1)} \tilde{x}_2^{(0)} \tilde{x}_2^{(1)} - 40 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^3 \tilde{x}_1^{(0)} \tilde{x}_1^{(1)} \tilde{x}_2^{(1)} + \\
& + 6 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^3 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^2 \tilde{x}_1^{(2)} - 2 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^2 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^3 \tilde{x}_2^{(2)} + 24 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^2 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^2 \left(\tilde{x}_2^{(1)} \right)^2 - \\
& \left. - 27 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^2 \left(\tilde{x}_1^{(1)} \right)^2 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \mu_2) - \frac{3\tilde{x}_1^{(0)}\tilde{x}_2^{(0)}}{\tilde{\rho}^5},$$

$$\begin{aligned}
c_1 = & \frac{3}{8} \left(\sqrt{3}(\mu_2 - 1) \tilde{x}_1^{(0)} + (11 - 19\mu_2) \tilde{x}_2^{(0)} \right) - \\
& - \frac{3}{\tilde{\rho}^7} \left[\left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^3 \tilde{x}_2^{(1)} - 4 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^2 \tilde{x}_2^{(0)} \tilde{x}_1^{(1)} - 4 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^2 \tilde{x}_1^{(0)} \tilde{x}_2^{(1)} + \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^3 \tilde{x}_1^{(1)} \right], \\
c_2 = & \frac{3}{32} \left[25\sqrt{3}(\mu_2 - 1) \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^2 - (82 - 210\mu_2) \tilde{x}_1^{(0)} \tilde{x}_2^{(0)} + 45\sqrt{3}(1 - \mu_2) \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^2 - \right. \\
& - 4\sqrt{3}(1 - \mu_2) \tilde{x}_1^{(1)} + 4(11 - 19\mu_2) \tilde{x}_2^{(1)} \left. \right] + \frac{3}{2\tilde{\rho}^9} \left[- 2 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^5 \tilde{x}_2^{(2)} - 2 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^5 \tilde{x}_1^{(2)} + \right. \\
& + 8 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^4 \tilde{x}_1^{(2)} \tilde{x}_2^{(0)} + 8 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^4 \tilde{x}_1^{(1)} \tilde{x}_2^{(1)} + 8 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^4 \tilde{x}_1^{(0)} \tilde{x}_2^{(2)} + 8 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^4 \tilde{x}_1^{(1)} \tilde{x}_2^{(1)} - \\
& - 20 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^3 \left(\tilde{x}_1^{(1)} \right)^2 \tilde{x}_2^{(0)} + 6 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^3 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^2 \tilde{x}_2^{(2)} + 15 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^3 \left(\tilde{x}_2^{(1)} \right)^2 \tilde{x}_2^{(0)} - \\
& - 20 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^3 \left(\tilde{x}_2^{(1)} \right)^2 \tilde{x}_1^{(0)} + 6 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^3 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^2 \tilde{x}_1^{(2)} + 15 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^3 \left(\tilde{x}_1^{(1)} \right)^2 \tilde{x}_1^{(0)} - \\
& \left. - 54 \left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^2 \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^2 \tilde{x}_1^{(1)} \tilde{x}_2^{(1)} \right],
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\left(\tilde{x}_1^{(0)} \right)^2 + \left(\tilde{x}_2^{(0)} \right)^2},$$

а $\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2$) — коэффициенты рядов (2.24).

А.4. Выражения для коэффициентов $\tilde{x}_1^{(i)}$, $\tilde{x}_2^{(i)}$ и μ_2^* , $\mu_2^{(i+1)}$ ($i = 0, 1, 2$) рядов (2.24), (2.30)

При достаточно малых значениях параметра μ_3 ($\mu_3 \ll 1$) положения относительного равновесия L_{45} , L_{55} можно получить в виде сходящихся рядов по дробным степеням малого параметра (2.24). Учитывая эти разложения, в главе 2 было показано, что при $\mu_3 \ll 1$ на резонансных кривых второго, третьего и четвёртого порядка зависимость между параметрами μ_2 и μ_3 определяется асимптотической формулой (2.30). Ниже приведены выражения для коэффициентов $\tilde{x}_1^{(0)}$, $\tilde{x}_1^{(1)}$, $\tilde{x}_1^{(2)}$, $\tilde{x}_2^{(0)}$, $\tilde{x}_2^{(1)}$, $\tilde{x}_2^{(2)}$, μ_2^* , $\mu_2^{(1)}$, $\mu_2^{(2)}$, $\mu_2^{(3)}$ рядов (2.24), (2.30).

В случае резонанса второго порядка ($\omega_1 = \omega_2$) для положения относительного равновесия L_{45} имеем следующие выражения для коэффициентов указанных рядов:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1^{(0)} &= \frac{15^{2/3}\sqrt{2}(225 + \alpha_1)}{12(19\sqrt{3} - 12\sqrt{7})^{1/3}\sqrt{13627 + 2968\sqrt{21} - (37 + 8\sqrt{21})\alpha_1}}, \\ \tilde{x}_2^{(0)} &= -\frac{15^{2/3}\sqrt{2}(\sqrt{3}\alpha_1 - 223\sqrt{3} - 96\sqrt{7})}{12(19\sqrt{3} - 12\sqrt{7})^{1/3}\sqrt{13627 + 2968\sqrt{21} - (37 + 8\sqrt{21})\alpha_1}}, \\ \tilde{x}_1^{(1)} &= \left(\frac{82049063}{126187500} - \frac{281727874\sqrt{21}}{1987453125}\right)\alpha_1\beta_1^{2/3} - \left(\frac{1110397}{7500} - \frac{1263652\sqrt{21}}{39375}\right)\beta_1^{2/3}, \\ \tilde{x}_2^{(1)} &= \left(\frac{82049063\sqrt{3}}{126187500} - \frac{281727874\sqrt{7}}{662484375}\right)\alpha_1\beta_1^{2/3} + \left(\frac{1110397\sqrt{3}}{22500} - \frac{1263652\sqrt{7}}{39375}\right)\beta_1^{2/3}, \\ \tilde{x}_1^{(2)} &= \left[\left(\frac{5431942845891814238863\sqrt{21}}{110428619490000} - \frac{8297429753981294594219}{36809539830000}\right)\alpha_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{786736040157118141\sqrt{21}}{213690960} + \frac{11445325257084473}{678384}\right]\gamma_1, \\ \tilde{x}_2^{(2)} &= \left[\left(\frac{37410568691334870664579\sqrt{7}}{773000336430000} - \frac{8163655372420908631361\sqrt{3}}{110428619490000}\right)\alpha_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{262765304923114841\sqrt{7}}{23743440} - \frac{8191441495429637\sqrt{3}}{484560}\right]\gamma_1,\end{aligned}$$

$$\mu_2^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15681 + 7104\sqrt{21}}}{450},$$

$$\mu_2^{(1)} = - \left(\frac{(7877465 + 105109\alpha_1)\sqrt{21}}{794981250} - \frac{1287\alpha_1}{2103125} - \frac{263}{5625} \right) \beta_1^{1/3} \gamma_1,$$

$$\mu_2^{(2)} = \left(\frac{5569993007407148}{2588170769296875} - \frac{8508107172641549\sqrt{21}}{18117195385078125} \right) \alpha_1 \beta_1^{2/3},$$

$$\mu_2^{(3)} = \left(\frac{66577139584750775588597561\sqrt{21}}{762196308471990000} - \frac{14528322938129873243254081}{36295062308190000} \right) \alpha_1 \gamma_1 +$$

$$+ \left(\frac{7486593300024113154483901\sqrt{21}}{1132535376630000} - \frac{544569531661881477873847}{17976752010000} \right) \gamma_1 -$$

$$- \left(\frac{9224\sqrt{21}}{45578925} - \frac{5617}{4340850} \right) \alpha_1 - \frac{1}{2},$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{15681 + 7104\sqrt{21}}, \quad \beta_1 = 17425 - 3800\sqrt{21},$$

$$\gamma_1 = \sqrt{(196800 - 896\alpha_1)\sqrt{21} - 4106\alpha_1 + 901850}.$$

Коэффициент $\mu_2^{(3)}$ для положения относительного равновесия L_{55} имеет вид:

$$\mu_2^{(3)} = \left(\frac{14528322938129873243254081}{36295062308190000} - \frac{66577139584750775588597561\sqrt{21}}{762196308471990000} \right) \alpha_1 \gamma_1 +$$

$$+ \left(\frac{544569531661881477873847}{17976752010000} - \frac{7486593300024113154483901\sqrt{21}}{1132535376630000} \right) \gamma_1 -$$

$$- \left(\frac{9224\sqrt{21}}{45578925} - \frac{5617}{4340850} \right) \alpha_1 - \frac{1}{2}.$$

В случае резонанса третьего порядка ($\omega_1 = 2\omega_2$) для положения относительного равновесия L_{45} выражения для коэффициентов рядов (2.24), (2.30) имеют вид:

$$\tilde{x}_1^{(0)} = \frac{6^{2/3} 77^{1/3} (693 + \alpha_2)}{6(233\sqrt{3} - 15\sqrt{691})^{1/3} \sqrt{261431 + 5735\sqrt{2073} - (229 + 5\sqrt{2073})\alpha_2}},$$

$$\tilde{x}_2^{(0)} = - \frac{6^{2/3} 77^{1/3} (\sqrt{3}\alpha_2 - 30\sqrt{691} - 689\sqrt{3})}{6(233\sqrt{3} - 15\sqrt{691})^{1/3} \sqrt{261431 + 5735\sqrt{2073} - (229 + 5\sqrt{2073})\alpha_2}},$$

$$\tilde{x}_1^{(1)} = \left(\frac{6078642649}{291012395520} - \frac{1659567794911\sqrt{2073}}{3619612175477760} \right) \alpha_2 \beta_2^{2/3} - \left(\frac{265678213}{18213888} - \frac{3011331805\sqrt{2073}}{9439347456} \right) \beta_2^{2/3},$$

$$\tilde{x}_2^{(1)} = \left(\frac{6078642649\sqrt{3}}{291012395520} - \frac{1659567794911\sqrt{691}}{1206537391825920} \right) \alpha_2 \beta_2^{2/3} + \left(\frac{265678213\sqrt{3}}{54641664} - \frac{3011331805\sqrt{691}}{9439347456} \right) \beta_2^{2/3},$$

$$\tilde{x}_1^{(2)} = \left[\left(\frac{4693545442174012645913\sqrt{2073}}{209459118544882483200} - \frac{927774931390589790877}{909373886591385600} \right) \alpha_2 + \frac{184306149786543128305019\sqrt{2073}}{92566067329105920} - \frac{3148442134611705749233}{34730260561920} \right] \gamma_2,$$

$$\tilde{x}_2^{(2)} = \left[\frac{2632101522686586866392901723\sqrt{3}}{20166275309050567065600} \alpha_2 - \frac{2194740689214947\sqrt{3}}{75391303680} - \frac{119840133917687309080523194183\sqrt{691}}{13934896238553941842329600} \alpha_2 + \frac{207145984734897296279\sqrt{691}}{107993745217290240} \right] \gamma_2,$$

$$\mu_2^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{152715 + 30\sqrt{108710193}}}{1386},$$

$$\mu_2^{(1)} = \left(\frac{10825\sqrt{2073}}{819116928} - \frac{8632919\sqrt{2073}}{452451521934720} \alpha_2 - \frac{64583}{72753098880} \alpha_2 + \frac{28979}{47811456} \right) \beta_2^{1/3} \gamma_2,$$

$$\mu_2^{(2)} = \left(\frac{315313064688669067967}{4549228121475274406400} - \frac{4785377495633834964089\sqrt{2073}}{3143516631939414614822400} \right) \alpha_2 \beta_2^{2/3},$$

$$\begin{aligned} \mu_2^{(3)} &= \frac{3543235438841893183139223450826081}{10105180921640216607326208000} \alpha_2 \gamma_2 - \\ &\quad - \frac{32264850553209536104055562802166113\sqrt{2073}}{4189608010112033805397445836800} \alpha_2 \gamma_2 + \\ &\quad + \frac{90321737225989663123107815366674049\sqrt{2073}}{50477204941108841028884889600} \gamma_2 - \frac{905018\sqrt{2073}}{133744041585} \alpha_2 - \\ &\quad - \frac{220419555029995304321995640515621}{2705537060680111541452800} \gamma_2 + \frac{53329}{129034290} \alpha_2 - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_2 = \sqrt{152715 + 30\sqrt{108710193}}, \quad \beta_2 = 4085389 - 89705\sqrt{2073},$$

$$\gamma_2 = \sqrt{(177870 - 770\alpha_2)\sqrt{2073} + 35266\alpha_2 - 7956718}.$$

Коэффициент $\mu_2^{(3)}$ для положения относительного равновесия L_{55} имеет вид:

$$\begin{aligned} \mu_2^{(3)} = & \frac{32264850553209536104055562802166113\sqrt{2073}}{4189608010112033805397445836800} \alpha_2 \gamma_2 - \\ & - \frac{3543235438841893183139223450826081}{10105180921640216607326208000} \alpha_2 \gamma_2 - \\ & - \frac{90321737225989663123107815366674049\sqrt{2073}}{50477204941108841028884889600} \gamma_2 - \frac{905018\sqrt{2073}}{133744041585} \alpha_2 + \\ & + \frac{220419555029995304321995640515621}{2705537060680111541452800} \gamma_2 + \frac{53329}{129034290} \alpha_2 - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

В случае резонанса четвёртого порядка ($\omega_1 = 3\omega_2$) для положения относительного равновесия L_{45} выражения для коэффициентов рядов (2.24), (2.30) имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^{(0)} &= \frac{203^{1/3} 3^{5/6} \sqrt{2} (609 + \alpha_3)}{12(51\sqrt{3} - 20\sqrt{19})^{1/3} \sqrt{305521 + 40440\sqrt{57} - (303 + 40\sqrt{57})\alpha_3}}, \\ \tilde{x}_2^{(0)} &= -\frac{203^{1/3} 3^{5/6} \sqrt{2} (\sqrt{3}\alpha_3 - 607\sqrt{3} - 160\sqrt{19})}{12(51\sqrt{3} - 20\sqrt{19})^{1/3} \sqrt{305521 + 40440\sqrt{57} - (303 + 40\sqrt{57})\alpha_3}}, \\ \tilde{x}_1^{(1)} &= \left(\frac{25033313177}{329765132340} - \frac{47233417942\sqrt{57}}{4699153135845} \right) \alpha_3 \beta_3^{2/3} - \\ & - \left(\frac{206643653}{4450572} - \frac{129704060\sqrt{57}}{21140217} \right) \beta_3^{2/3}, \\ \tilde{x}_2^{(1)} &= \left(\frac{25033313177\sqrt{3}}{329765132340} - \frac{47233417942\sqrt{19}}{1566384378615} \right) \alpha_3 \beta_3^{2/3} + \\ & + \left(\frac{206643653\sqrt{3}}{13351716} - \frac{129704060\sqrt{19}}{21140217} \right) \beta_3^{2/3}, \\ \tilde{x}_1^{(2)} &= \left[\left(\frac{252694704961964998127\sqrt{19}}{219795496931782800} - \frac{33470201127984014671\sqrt{3}}{11568184049041200} \right) \alpha_3 + \right. \\ & \left. + \frac{2357720579927441111\sqrt{19}}{14856767280} - \frac{2186014046537623873\sqrt{3}}{5473545840} \right] \gamma_3, \\ \tilde{x}_2^{(2)} &= \left[\left(\frac{477328221074951330814127}{242931865029865200} - \frac{1201249679192455782679333\sqrt{57}}{4615705435567438800} \right) \alpha_3 + \right. \\ & \left. + \frac{3013509600598177\sqrt{57}}{103997370960} - \frac{21007937588347}{96027120} \right] \gamma_3, \end{aligned}$$

$$\mu_2^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{120385 + 32320\sqrt{57}}}{1218},$$

$$\mu_2^{(1)} = \left(\frac{695425\sqrt{19}}{8582928102} - \frac{416921\sqrt{19}}{3132768757230}\alpha_3 + \frac{138739\sqrt{3}}{677599587} - \frac{27953\sqrt{3}}{82441283085}\alpha_3 \right) \beta_3^{1/3} \gamma_3,$$

$$\mu_2^{(2)} = \left(\frac{2333809242160599044}{9246594112699244175} - \frac{1957757749103853097\sqrt{57}}{58561762713761879775} \right) \alpha_3 \beta_3^{2/3},$$

$$\mu_2^{(3)} = \frac{368375826348546388028698068191\sqrt{3}}{208626133018955209815600}\alpha_3\gamma_3 -$$

$$- \frac{13905882494764851717633819252893\sqrt{19}}{19819482636800744932482000}\alpha_3\gamma_3 -$$

$$- \frac{3083322042428030602366123901449\sqrt{3}}{8573676699409118211600}\gamma_3 - \frac{358696\sqrt{57}}{7589476755}\alpha_3 +$$

$$+ \frac{7759523644194006566092031449781\sqrt{19}}{54299952429591082006800}\gamma_3 + \frac{41201}{88765810}\alpha_3 - \frac{1}{2},$$

где

$$\alpha_3 = \sqrt{120385 + 32320\sqrt{57}}, \quad \beta_3 = 9380427 - 1242360\sqrt{57},$$

$$\gamma_3 = \sqrt{(9890160 - 48720\alpha_3)\sqrt{57} + 369054\alpha_3 - 73928946}.$$

Коэффициент $\mu_2^{(3)}$ для положения относительного равновесия L_{55} имеет вид:

$$\mu_2^{(3)} = \frac{13905882494764851717633819252893\sqrt{19}}{19819482636800744932482000}\alpha_3\gamma_3 -$$

$$- \frac{368375826348546388028698068191\sqrt{3}}{208626133018955209815600}\alpha_3\gamma_3 +$$

$$+ \frac{3083322042428030602366123901449\sqrt{3}}{8573676699409118211600}\gamma_3 - \frac{358696\sqrt{57}}{7589476755}\alpha_3 -$$

$$- \frac{7759523644194006566092031449781\sqrt{19}}{54299952429591082006800}\gamma_3 + \frac{41201}{88765810}\alpha_3 - \frac{1}{2},$$

При $\mu_3 \ll 1$ коэффициенты $\tilde{x}_1^{(1)}$, $\tilde{x}_2^{(1)}$, μ_2^* , $\mu_2^{(2)}$ для положения относительного равновесия L_{55} имеют те же значения, что и для положения относительного равновесия L_{45} . Коэффициенты $\tilde{x}_1^{(0)}$, $\tilde{x}_1^{(2)}$, $\tilde{x}_2^{(0)}$, $\tilde{x}_2^{(2)}$, $\mu_2^{(1)}$ для положения относительного равновесия L_{55} равны по абсолютной величине коэффициентам для положения относительного равновесия L_{45} , но противоположны им по знаку.

Список литературы

1. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *Успехи Математических Наук.* 1963. Т. 18, Вып. 6. С. 91–192.
2. *Бардин Б.С., Волков Е.В.* Исследование устойчивости центральной конфигурации в плоской ограниченной задаче четырех тел // Материалы XIII Международная конференция по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2020). Алушта, 2020. С. 367–368.
3. *Бардин Б.С., Волков Е.В.* Анализ устойчивости и бифуркаций центральных конфигураций в ограниченной плоской круговой задаче четырех тел // «IX Поляховские чтения»: Материалы международной научной конференции по механике. Санкт-Петербург, 2021. С. 143–145.
4. *Бардин Б.С., Волков Е.В., Сухов Е.А.* Построение и анализ орбитальной устойчивости периодических движений в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2022. С. 88–89.
5. *Бардин Б.С., Волков Е.В., Сухов Е.А.* Нелинейный анализ орбитальной устойчивости периодических движений в окрестности положения относительного равновесия плоской круговой ограниченной задачи четырех тел // 22-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Москва, 2023. С. 254–255.
6. *Брумберг В.А.* Постоянные конфигурации в задаче четырех тел и их устойчивость // *Астрономический журнал.* 1957. Т. 34, Вып. 1. С. 55–74.
7. *Будько Д.А.* Исследование устойчивости равновесных решений ограниченной задачи четырех тел // *Известия НАН Беларуси.* 2011. Вып. 4. С. 55–59.
8. *Будько Д.А., Прокопеня А.Н.* Символьно-численный анализ равновесных решений в ограниченной задаче четырех тел // *Программирование.* 2010.

Т. 36, № 2. С. 13–20.

9. *Будько Д.А., Прокопеня А.Н.* Символьно-численные методы поиска положений равновесия в ограниченной задаче четырёх тел // *Программирование*. 2013. Т. 39, № 2. С. 30–37.
10. *Волков Е.В.* Исследование устойчивости центральных конфигураций в ограниченной задаче четырех тел // XLVI Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения». Москва, 2020. С. 910–911.
11. *Волков Е.В.* Аналитическое и численное исследование устойчивости и бифуркации центральных конфигураций в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел // XLVII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения». Москва, 2021. С. 837–838.
12. *Волков Е.В.* Нелинейный анализ устойчивости центральной конфигурации в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел в резонансных случаях // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Санкт-Петербург, 2023. С. 80–82.
13. *Волков Е.В.* Линейный анализ орбитальной устойчивости периодических движений в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел // *Труды МАИ*. 2024. Вып. 138.
14. *Волков Е.В., Бардин Б.С.* Линейный анализ устойчивости центральной конфигурации в ограниченной круговой задаче четырех тел // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Москва, 2020. С. 539–540.
15. *Волков Е.В., Бардин Б.С.* Нелинейный анализ устойчивости центральной конфигурации в плоской круговой задаче четырех тел // 20-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Москва, 2021. С. 413–414.
16. *Волков Е.В., Бардин Б.С.* Нелинейный анализ устойчивости центральной конфигурации в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел при резонансах второго и третьего порядка // 21-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Москва, 2022. С. 381–382.

17. *Волков Е.В., Сухов Е.А.* Анализ орбитальной устойчивости семейств периодических движений в плоской круговой ограниченной задаче четырех тел // 21-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Москва, 2022. С. 429–430.
18. *Каримов С.Р., Соколовский А.Г.* Метод продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем // *Препринт ИТА АН СССР*. 1990. № 9.
19. *Колмогоров А.Н.* О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции гамильтона // *Доклады Академии Наук СССР*. 1954. Т. 98, Вып. 4. С. 527–530.
20. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // *Собрание сочинений*. Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
21. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: "Наука", 1966.
22. *Маркеев А.П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // *Прикладная математика и механика*. 1968. Т. 32, Вып. 4. С. 738–744.
23. *Маркеев А.П.* К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *Прикладная математика и механика*. 1970. Т. 34, Вып. 6. С. 997–1004.
24. *Маркеев А.П.* Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // *Космические исследования*. 1975. Т. 13, № 3. С. 322–336.
25. *Маркеев А.П.* Точки либраций в небесной механике и космодинамике. М.: "Наука", 1978.
26. *Маркеев А.П.* О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // *Изв. АН. МТТ*. 1996. № 2. С. 37–54.
27. *Маркеев А.П.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 // *Прикладная математика и механика*. 1999. Т. 63, Вып. 5. С. 757–769.

28. Маркеев А.П. К задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы при резонансе 3:1 // *Прикладная математика и механика*. 2001. Т. 65, Вып. 4. С. 653–660.
29. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *Механика твёрдого тела*. 2004. № 6. С. 3–12.
30. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2009.
31. Сокольский А.Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // *Прикладная математика и механика*. 1974. Т. 38, Вып. 5. С. 791–799.
32. Сокольский А.Г., Хованский С.А. О численном продолжении периодических решений лагранжевой системы с двумя степенями свободы // *Космические исследования*. 1983. Т. 21, № 6. С. 851–860.
33. Сухов Е. А., Бардин Б. С. Численно-аналитическое построение семейства периодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2016. Т. 53.
34. Alvarez-Ramirez M., Vidal C. Dynamical aspects of an equilateral restricted four-body problem // *Mathematical Problems in Engineering*. 2009. V. 2009. P. 23.
35. Alvarez-Ramirez M., Zepeda Ramirez J.A. Equilibrium points and their linear stability in the planar equilateral restricted four-body problem: a review and new results // *Astrophysics and Space Science*. 2022. V. 367.
36. Arenstorf R.F. Central configurations of four bodies with one inferior mass // *Celestial mechanics*. 1982. V. 28. P. 9–15.

37. *Baltagiannis A.N., Papadakis K.N.* Families of periodic orbits in the restricted four-body problem // *Astrophysics and Space Science*. 2011. V. 336, no. 2. P. 357–367.
38. *Baltagiannis A.N., Papadakis K.E.* Equilibrium points and their stability in the restricted four-body problem // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 2011. V. 21, no. 8. P. 2179–2193.
39. *Bardin B.S.* On nonlinear motions of hamiltonian system in case of fourth order resonance // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2007. V. 12, no. 1. P. 86–100.
40. *Bardin B.S.* On a method of introducing local coordinates in the problem of the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2020. V. 16, no. 4. P. 581–594.
41. *Bardin B.S.* On the method of introduction of local variables in a neighborhood of periodic solution of a hamiltonian system with two degrees of freedom // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2023. V. 28, no. 6. P. 878–887.
42. *Bardin B.S., Esipov P.A.* Investigation of lyapunov stability of a central configuration in the restricted four body problem // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 1959. P. 040004.
43. *Bardin B.S., Sukhov E.A., Volkov E.V.* Nonlinear orbital stability of periodic motions in the planar restricted four-body problem // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2023. V. 19, no. 4. P. 545–557.
44. *Bardin B.S., Volkov E.V.* Stability study of a relative equilibrium in the planar circular restricted four-body problem // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. V. 927.
45. *Bardin B.S., Volkov E.V.* Analysis of linear stability and bifurcations of central configurations in the planar restricted circular four-body problem // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. V. 1191.
46. *Bardin B.S., Volkov E.V.* On bifurcations and stability of central configurations in the planar circular restricted four-body problem // *Journal of Physics: Con-*

- ference Series*. 2021. V. 1959.
47. *Bardin B.S., Volkov E.V.* The lyapunov stability of central configurations of the planar circular restricted four-body problem // *Cosmic Research*. 2024. V. 62, no. 5. P. 388–400.
 48. *Birkhoff G.D.* Dynamical systems. American Mathematical Society, N. Y., 1927.
 49. *Budzko D.A.* Linear stability analysis of equilibrium solutions of the restricted planar four-body problem // *Computer algebra systems in teaching and research*. 2009. V. 1. P. 28–36.
 50. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem // *Computer Algebra in Scientific Computing*. 2011. P. 88–100.
 51. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* Equilibrium positions and stability in the spatial circular restricted four-body problem // *Classical and celestial mechanics. Selected Papers*. 2012. P. 7–19.
 52. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* Stability of equilibrium positions in the spatial circular restricted four-body problem // *Computer Algebra in Scientific Computing*. 2012. P. 72–83.
 53. *Burgos-Garcia J., Delangado J.* Periodic orbits in the restricted four-body problem with two equal masses // *Astrophysics and Space Science*. 2013. V. 345, no. 2. P. 247–263.
 54. *Burgos-García J., Gidea M.* Hill’s approximation in a restricted four-body problem // *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 2015. V. 122, no. 2. P. 117–141.
 55. *Carl Ludwig Siegel, Jurgen K. Moser.* Lectures on Celestial Mechanics. Springer New York, NY, 1971. P. 290.
 56. *Corbera M., Cors J.M., Llibre J.* On the central configurations of the planar 1+3 body problem // *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 2011. V. 109, no. 1. P. 27–43.
 57. *Deprit, A., Henrard, J.* Natural families of periodic orbits // *Astronomical Jour-*

- nal.* 1967. V. 72, no. 2. P. 158–172.
58. *Eduardo S.G. Leandro.* On the central configurations of the planar restricted four-body problem // *J. Differential Equations.* 2006. V. 226, no. 1. P. 323–351.
 59. *Elmabsout B.* Sur l'existence de certaines configurations d'équilibre relatif dans le probleme des n corps // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 1987. V. 41. P. 131–151.
 60. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. Springer New York, NY, 1972.
 61. *Grebenikov E.A.* New exact solutions in the planar symmetrical $(n+1)$ -body problem // *Romanian Astronomical Journal.* 1997. V. 7. P. 151–156.
 62. *Grebenikov E.A., Gadomski L., Prokopenya A.N.* Studying the stability of equilibrium solutions in the planar circular restricted four-body problem // *Nonlinear Oscillations.* 2007. V. 10, no. 1. P. 62–77.
 63. *H. Poincaré.* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1892. V. 2.
 64. *Hampton M., Moeckel R.* Finiteness of relative equilibria of the four-body problem // *Invent. Math.* 2006. V. 163, no. 2. P. 289–312.
 65. *Howell K.C., Spencer D.B.* Periodic orbits in the restricted four-body problem // *Acta Astronautica.* 1986. V. 13, no. 8. P. 473–479.
 66. *Jean F. Barros, Eduardo S.G. Leandro.* The set of degenerate central configurations in the planar restricted four-body problem // *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* 2011. V. 43, no. 2.
 67. *Jean F. Barros, Eduardo S.G. Leandro.* Bifurcations and enumeration of classes of relative equilibria in the planar restricted four-body problem // *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* 2014. V. 46, no. 2.
 68. *Lagrange J.L.* Eassais sur le problème des trois corps. Paris, 1772.
 69. *Lerman L.M., Markova A.P.* On stability at the hamiltonian hopf bifurcation // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2009. V. 14, no. 1. P. 148–162.

70. *Ligeza A., Żołądek H.* Qualitative analysis of some libration points in the restricted four-body problem // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 17, no. 4. P. 369–390.
71. *Maranhão D., Llibre J.* Ejection-collision orbits and invariant punctured tori in a restricted four-body problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1998. V. 71. P. 1–14.
72. *Markeev A.P.* An algorithm for normalizing hamiltonian systems in the problem of the orbital stability of periodic motions // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2002. V. 66, no. 6. P. 889–896.
73. *Meyer K.* Bifurcation of a central configuration // *Celestial Mechanics*. 1987. V. 40. P. 273–282.
74. *Meyer K., Schmidt D.* Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem // *Ergodic Theory Dyn. Syst.* 1988. V. 8. P. 215–225.
75. *Michalodimitrakis M.* The circular restricted four-body problem // *Astrophysics and Space Science*. 1981. V. 75, no. 2. P. 289–305.
76. *Moser J.K.* Lectures on Hamiltonian Systems. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1968.
77. *Oshima K.* Multiple families of synodic resonant periodic orbits in the bicircular restricted four-body problem // *Advances in Space Research*. 2022. V. 70, no. 5. P. 1325–1335.
78. *Papadakis K.E.* Asymptotic orbits in the restricted four-body problem // *Planetary and Space Science*. 2007. V. 55, no. 10. P. 1368–1379.
79. *Pedersen P.* Librationspunkte im restringierten vierkörperproblem // *Dan. Mat.-Fys. Medd.* 1944. V. 21. P. 1–80.
80. *Pedersen P.* Stabilitätsuntersuchungen im restringierten vierkörperproblem // *Dan. Mat.-Fys. Medd.* 1952. V. 26. P. 1–37.
81. *Perko L.M., Walter E.L.* Regular polygon solutions of the n-body problem // *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1985. V. 94, no. 2.

- P. 301–309.
82. *Prokopenya A.N.* Symbolic-numerical analysis of the relative equilibria stability in the planar circular restricted four-body problem // *Computer Algebra in Scientific Computing*. 2017. P. 329–345.
 83. *Prokopenya A.N.* Numerical-symbolic methods for searching relative equilibria in the restricted problem of four bodies // *Mathematical Modelling and Analysis*. 2018. V. 23, no. 3. P. 507–525.
 84. *Routh E.J.* On laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion // *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1875. V. 6. P. 86–97.
 85. *Schmidt D.S.* Periodic solutions near a resonant equilibrium of a hamiltonian system // *Celestial Mech.* 1974. V. 9, no. 1. P. 81–103.
 86. *Siegel C.L.* Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin: Springer, 1956.
 87. *Simo C.* Relative equilibrium solutions in the four body problem // *Celestial Mechanics*. 1978. V. 18. P. 165–184.
 88. *Sukhov E.A.* Stability and bifurcation of resonance periodic motions of a symmetric satellite // *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. V. 250, no. 1. P. 155–165.
 89. *Sukhov E.A., Volkov E.V.* Numerical orbital stability analysis of nonresonant periodic motions in the planar restricted four-body problem // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2022. V. 18, no. 4. P. 563–576.
 90. *Wintner A.* Grundlagen einer genealogie der periodischen bahnen im re-stringierten dreikörperproblem // *Math. Z.* 1932. V. 34, no. 1. P. 321–349.