Труды МАИ. 2023. № 132
Trudy MAI, 2023, no. 132

Научная статья
УДК 531.38
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=176847

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ

Вин Ко Ко
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия
win.c.latt@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена определению дифференциальных уравнений для обобщенных координат движений двухслойной жидкости в полости твёрдого тела, совершающего заданное движение в пространстве. В статье сформулирована постановка нелинейной задачи о движениях несмешивающихся несжимаемых идеальных жидкостей, полностью заполняющих цилиндрическую полость, и приводятся потенциалы скоростей для каждой жидкости. При получении дифференциальных уравнений для обобщенных координат нелинейных движений поверхности раздела жидкостей используется вариационный принцип Гамильтона - Остроградского, в котором задействована видоизменённая функция Лагранжа. В результате были получены бесконечные системы нелинейных дифференциальных

уравнений для обобщенных координат рассматриваемой задачи при сложном движении твердого тела, а также дифференциальные уравнения в частных случаях.

Ключевые слова: вариационный принцип, несмешивающиеся жидкости, возмущённая поверхность раздела, нелинейная краевая задача, обобщенные коэффициенты

Для цитирования: Вин Ко Ко. Уравнения для обобщенных координат нелинейных движений поверхности раздела жидкостей // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=176847

Original article

EQUATIONS FOR GENERALIZED COORDINATES OF NON-LINEAR MOTIONS INTERFACE SURFACES OF LIQUIDS

Win Ko Ko

Moscow State Technical University. N.E. Bauman,

Moscow, Russia

win.c.latt@gmail.com

Abstract. Nonlinear problems of the dynamics of a rigid body with a cavity filled with several fluids are of considerable applied and theoretical interest. The article shows that with the help of the variational principle, written in a form different from the traditional one, it is possible to obtain a complete set of equations of nonlinear motions of liquids, including nonlinear kinematic and dynamic conditions on the interfaces of liquids filling the cavity of a solid

body that performs a given movement. The variational formulation of the problem of dynamics has certain advantages, for example, from the point of view of substantiating the necessity and sufficiency of the derived equations and boundary conditions, and considering the body and fluid as one system allows one to achieve a certain multiplicity.

The article is devoted to the definition of differential equations for the generalized coordinate motions of a two-layer liquid in the cavity of a solid body performing a given motion in space. In the article, the formulation of a nonlinear problem about the motions of immiscible incompressible ideal liquids that completely fill a cylindrical cavity is formulated, and velocity potentials are given for each liquid. When obtaining differential equations for generalized coordinates of non-linear movements of liquid interface surfaces, the variational principle of Hamilton - Ostrogradsky is used, in which a modified Lagrange function is used. As a result, infinite systems of nonlinear differential equations were obtained for the generalized coordinates of the problem under consideration in the complex motion of a rigid body, as well as differential equations in particular cases.

1. Введение

В последние время появились работы, в которых проводили теоретико-экспериментальные исследования колебания двуслойной жидкости в баках в виде прямоугольного параллелепипеда [1-2], круглого цилиндра [3]. В работе [4], используя вариационный принцип Гамильтона – Остроградского, приведены постановки краевых задач, описывающих немалые колебания двух жидкостей в сосудах произвольной формы, совершающих заданное движение в пространстве. Также в работе [5] приводится составление уравнений возмущенного движения твердого тела с полостью, целиком заполненной двумя несмешивающимися жидкостями. В работе [6] получен аналогичный результат для тяжелой идеальной жидкости, частично заполняющей полость подвижного твёрдого тела. Такая постановка вопроса представляет большой интерес в связи с разработкой приближенных методов исследования динамики твердого тела с полостями, содержащими жидкость, в нелинейной постановке. Большое практическое использование нашли вариационные подходы при решении линейных задач колебаний тонкостенных оболочек с жидкостью [7-8].

Применительно к задачам о движениях свободной поверхности однородной жидкости, частично заполняющей сосуд с твёрдыми или упругими стенками, вариационный подход использовался в работах [9-11].

В работе [12] были решены задачи выбора наиболее эффективного механизма для математического моделирования взаимосвязанных физических полей в сплошных средах, рассматривается использование вариационных подходов. Кратко излагается существующая по этому вопросу теория, основанная на использовании вариационных принципов либо вариационных уравнений, приводится критерий их выбора, разбираются особенности метода, приводится конкретный пример. Во второй части работы проделан разбор случаев, когда вариационный подход является единственно возможным для составления математических моделей мульти-физических явлений.

В работе [13] рассмотрено обоснование принципа Гамильтона – Остроградского, применённого к движению консервативных и неконсервативных систем, составлены однородные и неоднородные уравнения Эйлера-Лагранжа.

В работах [14-15] исследовалась проблема о движениях двухслойной тяжелой жидкости, и решена задача об управлении движением сосуда с финальным условием гашения внутренних волн жидкости. Также исследовалась задача о колебаниях твердого тела, имеющего прямоугольную полость и скреплённого упругой связью с неподвижным основанием.

В статье [16] показано качественное отличие движений твёрдого тела с полостью, целиком наполненной двумя жидкостями от аналогичных случаев движений твёрдого тела с одной однородной жидкостью, рассмотренное Н.Е. Жуковским [17]. В работах [18-20] рассматривались задачи, посвященные линейной динамике однородной жидкости в полости частично заполненного подвижного тела. В последние годы эта тема активно исследуется в различных областях науки и инженерии.

Ниже приводится вывод дифференциальных уравнений для обобщенных координат, характеризующих нелинейные движения поверхности раздела двух жидкостей.

2. Постановка задачи

В предыдущей работе [4] было показано, что с помощью вариационного принципа Гамильтона - Остроградского, записанного в виде отличного от традиционного, можно получить полную совокупность уравнений нелинейных движений жидкостей, включая нелинейные кинематические и динамические условия на поверхностях раздела жидкостей, заполняющих полость твёрдого тела, совершающего заданное движение. В случае двух жидкостей полученная совокупность уравнений имеет вид

(1) уравнения Лапласа,

$$\nabla^2\Phi_1 = 0\text{, в } \tau_1\text{, } \nabla^2\Phi_2 = 0\text{, в } \tau_2\text{,} \tag{1}$$

(2) условия непротекания на смачиваемых поверхностях S_1, S_2

$$\frac{d\Phi_1}{d\nu} = \vec{V}_0\cdot\vec{\nu} + \vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nu}) \text{ на } S_1\text{, } \frac{d\Phi_2}{d\nu} = \vec{V}_0\cdot\vec{\nu} + \vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nu}) \text{ на } S_2\text{,} \tag{2}$$

(3) кинематические условия и динамические условия на поверхности раздела

$$\frac{d\Phi_1}{d\nu} = \frac{d\Phi_2}{d\nu} = \vec{V}_0\cdot\vec{\nu} + \vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nu}) + u_\nu \text{ при } x=0 \text{ на } \Gamma_1\text{,} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\left(\rho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-\rho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left[\rho_2(\nabla\Phi_2)^2-\rho_1(\nabla\Phi_1)^2\right]-\\&-\left[\rho_2\nabla\Phi_2\cdot(\vec{V}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})-\rho_1\nabla\Phi_1\cdot(\vec{V}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})\right]-(\rho_2-\rho_1)\vec{g}\cdot\vec{r}=0\end{aligned}\quad \text{на } \Gamma_1, \tag{4}$$

В сформулированной задаче нелинейные граничные условия являются естественными, и это обстоятельство является определяющими для построения эффективного приближенного метода решения. С этой целью будем считать поступательную скорость движения твердого тела $\vec{V}_0(t)$ и мгновенную угловую скорость $\omega(t)$ известными функциями времени.

Рассмотрим полость в твердом теле, имеющую цилиндрическую форму вблизи границ раздела жидкостей твердого тела, и запишем уравнение возмущенной поверхности $F(x,y,z,t)$ в виде

$$F=x-f(y,z,t)=0\,, \tag{5}$$

Кинематические граничные условия (2), (3) позволяют представить потенциалы скоростей жидкостей $\Phi_k(x,y,z,t)$ в форме Стокса-Жуковского

$$\Phi_k(x,y,z,t)=\vec{V}_0\cdot\vec{U}_k+\vec{\omega}\cdot\vec{A}_k+\varphi_k\,,\ (k=1,2)\,, \tag{6}$$

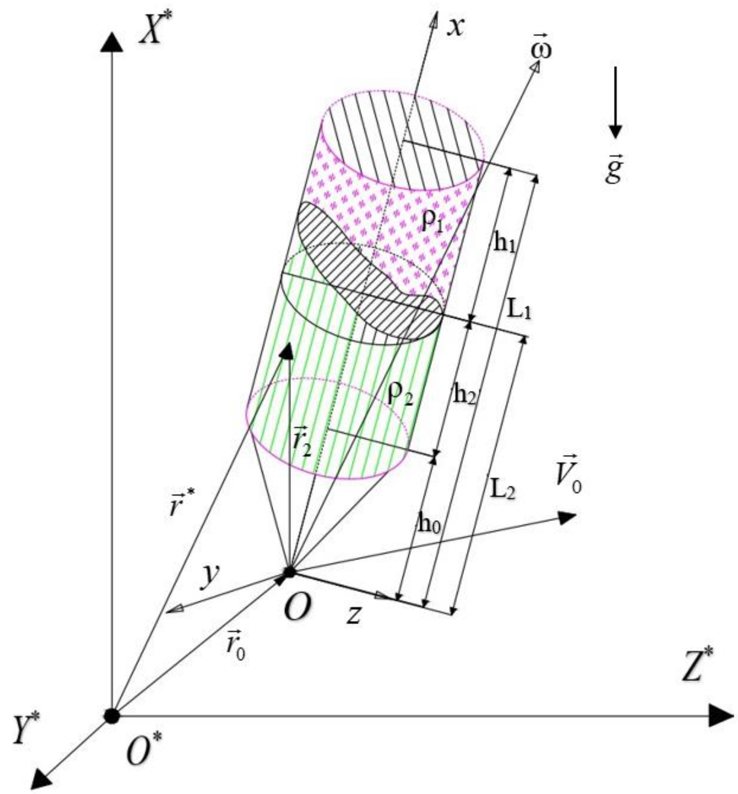

Рис. 1. Система координат и принятые обозначения

где $\vec{U}_k(x,y,z)$ и $\vec{A}_k(x,y,z)$-гармонические векторы, т.е. векторы, проекции которых U_{1k}, U_{2k}, U_{3k} и A_{1k}, A_{2k}, A_{3k} на оси системы $Oxyz$ являются гармоническими функциями, удовлетворяющие следующим краевым условиям

$$\left.\frac{\partial \vec{U}_{1k}}{\partial \nu}\right|_{S_k+\Gamma} = \nu_1, \; \left.\frac{\partial \vec{U}_{2k}}{\partial \nu}\right|_{S_k+\Gamma} = \nu_2, \; \left.\frac{\partial \vec{U}_{3k}}{\partial \nu}\right|_{S_k+\Gamma} = \nu_3; \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial \vec{A}_{1k}}{\partial \nu}\right|_{S_k+\Gamma} = y\nu_3 - z\nu_2, \; \left.\frac{\partial \vec{A}_{2k}}{\partial \nu}\right|_{S_k+\Gamma} = z\nu_1 - x\nu_3, \; \left.\frac{\partial \vec{A}_{3k}}{\partial \nu}\right|_{S_k+\Gamma} = x\nu_2 - y\nu_1. \tag{8}$$

Здесь ν_1, ν_2, ν_3- проекции орта $\vec{\nu}$ на оси системы $Oxyz$.

Гармоническая функция φ_k, входящая в (6), удовлетворяет граничным условиям

$$\left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\right|_{S_k}=0\,,\ \left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\right|_{\Gamma}=\frac{f_t}{N}\,,\ N=\sqrt{1+\,f_y^{\,2}+\,f_z^{\,2}}\,, \tag{9}$$

и описывает волновые движения жидкостей в покоящемся сосуде.

Решение краевых задач, связанных с поступательном движением твердого тела, всегда имеет однозначную функцию времени может быть записаны в виде

$$\vec{U}_1=\vec{r}_1\,,\ \vec{U}_2=\vec{r}_2\,, \tag{10}$$

где $\vec{r}_k$ - радиус-векторы, определяющие положения частиц каждой жидкости. Так как для описания движения жидкостей используется подход Эйлера, то векторы $\vec{U}_k$ также необходимо считать зависящими от времени.

Подобные рассуждения позволяют считать векторы $\vec{A}_k$, также функциями времени.

Так как векторы $\vec{r}_k[x(t),y(t),z(t)]$ - радиус-векторы частицы жидкостей относительно полости, то полные производные по времени этих векторов представляют собой относительные скорости жидкостей

$$\dot{\vec{r}}_1(t)=\dot{\vec{r}}_1[\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)],\ \dot{\vec{r}}_2(t)=\dot{\vec{r}}_2[\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)], \tag{11}$$

$$\vec{V}_{ak}=\vec{V}_0+\vec{\omega}\times\vec{r}_k+\dot{\vec{r}}_k\,,\ (k=1,2)\,. \tag{12}$$

Точкой отмечены векторы, проекции которых на оси связанной с телом системы координат $Oxyz$ равны производным проекций на них соответствующих векторов. При этом на основе (6) получим

$$\vec{V}_{ak}=\nabla\Phi_k=\nabla(\vec{V}_0\cdot\vec{r}_k)+\nabla(\vec{\omega}\cdot\vec{A}_k)+\nabla\varphi_k=\vec{V}_0+\nabla(\vec{\omega}\cdot\vec{A}_k)+\nabla\varphi_k\,; \tag{13}$$

из формулы (13), (12) следует, что относительная скорость равна

$$\dot{\vec{r}}_k = \nabla(\vec{\omega} \cdot \vec{A}_k) + \nabla \varphi_k - (\vec{\omega} \times \vec{r}_k), \qquad (14)$$

т.е. при заданном движении твердого тела движения жидкостей будет известно, если получены решения краевых задач Неймана по определению функций A_{ik} и φ_k.

Приближенное решение нелинейной краевой задачи (1)-(4) будем искать в виде, основанном на эквивалентной вариационной проблеме, т.е. задачи нахождения экстремальных значений функционала

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \qquad (15)$$

рассмотренного в работе [4]. Далее предположим, что функция $f(y,z,t)$, описывающая возмущенное положение поверхности раздела жидкостей, может быть представлена в виде суммы

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(t) f_j(y,z), \qquad (16)$$

где $f_j(y,z)$ - полная ортогональная система функций вместе с константой, заданная на невозмущенной границе раздела жидкостей Γ_0, и $\beta_j(t)$ представляют собой обобщенные коэффициенты Фурье, зависящие от времени как параметра и имеющие смысл обобщенных координат, характеризующих отклонение границы раздела жидкостей:

$$\beta_j(t)=\int\limits_{\Gamma_0} f(y,z,t)f_j(y,z)dS\,. \tag{17}$$

Потенциалы скоростей жидкостей в полости неподвижного твердого тела зададим следующим образом

$$\varphi_1(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(t)\varphi_{1n}(x,y,z)\,,\ \varphi_2(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(t)\varphi_{2n}(x,y,z)\,, \tag{18}$$

где $\varphi_{kn}(x,y,z)$ - система гармонических функций, удовлетворяющих только условию непротекания $(\partial\varphi_{kn}/\partial\nu=0)$ на смачиваемых поверхностях сосуда S_k, а $Q_n(t)$ - параметры, характеризующие изменение функций φ_k во времени и имеющие смысл обобщенных координат при определении потенциалов скоростей жидкостей.

Такой набор гармонических функций дает решение линейных краевых задач с параметром в краевых условиях. Функции A_{ik}, пространственных переменных, будем считать известными. Следовательно, необходимо определить неизвестные функции времени $\beta_j(t)$ и $Q_n(t)$, которые вместе с заданными $\vec{V}_0(t)$ и $\omega(t)$ и определяют движение жидкости относительно полости.

Для определения $\beta_j(t)$ и $Q_n(t)$ воспользуемся уравнением в вариациях, в котором интегралы по области τ_k и поверхности S_k обращаются в нуль в силу приведенных выше формул относительно потенциала скоростей $\Phi_k(x,y,z,t)$. Поэтому, в уравнении останутся только поверхностные интегралы по невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0 [4], т. е.

$$
\delta W = -\rho_2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Gamma_0} \left\{ \begin{array}{l} \left(\Phi_{2t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_2)^2 - \nabla \Phi_2 \cdot (\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_2) - \vec{g} \cdot \vec{r}_2 \right) \Big|_{x=f_1} \delta f + \\ + [\nabla \Phi_2 \cdot \nabla F - (\vec{V}_0 \cdot \nabla F) - (\vec{\omega} \times \vec{r}_2) \cdot \nabla F - f_t]_{x=f} \delta \Phi_2 \end{array} \right\} d\Gamma_0 dt -
$$

$$
-\rho_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Gamma_0} \left\{ \begin{array}{l} \left(\Phi_{1t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_1)^2 - \nabla \Phi_1 \cdot (\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1) - \vec{g} \cdot \vec{r}_1 \right) \Big|_{x=f} \delta f + \\ + [\nabla \Phi_1 \cdot \nabla F - (\vec{V}_0 \cdot \nabla F) - (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) \cdot \nabla F - f_t]_{x=f} \delta \Phi_1 \end{array} \right\} d\Gamma_0 dt \tag{19}
$$

где $F(x, y, z, t) = 0$ - уравнение возмущенной поверхности раздела жидкостей.

Уравнение (19) приводится к бесконечной системе нелинейных дифференциальных уравнений относительно параметров $\beta_j(t)$ и $Q_n(t)$. Эта же система может быть также получена непосредственно из функционала (15), т.е. путем подстановки (6) в функцию Лагранжа с последующим варьированием по параметрам β_j и Q_n. Подставим выражение для потенциала скоростей (6) в (19) и придадим функции Лагранжа следующий вид:

$$
L = -\rho_2 \int\limits_{\tau_2} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{V}}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\omega} \cdot \vec{A}_2) + \frac{1}{2} \nabla (\vec{\omega} \cdot \vec{A}_2) \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{A}_2) + \nabla (\vec{\omega} \cdot \vec{A}_2) \cdot \nabla \varphi_2 - \\ - \frac{1}{2} \vec{V}_0^2 - \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{V}_0) - \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \nabla (\vec{\omega} \cdot \vec{A}_2)) - \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \nabla \varphi_2) \end{array} \right\} d\tau_2 -
$$

$$
-\rho_1 \int\limits_{\tau_1} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{V}}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\omega} \cdot \vec{A}_1) + \frac{1}{2} \nabla (\vec{\omega} \cdot \vec{A}_1) \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{A}_1) + \nabla (\vec{\omega} \cdot \vec{A}_1) \cdot \nabla \varphi_1 - \\ - \frac{1}{2} \vec{V}_0^2 - \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{V}_0) - \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \nabla (\vec{\omega} \cdot \vec{A}_1)) - \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \nabla \varphi_1) \end{array} \right\} d\tau_1 + L_{12} \tag{20}
$$

где

$$L_{12} = -\rho_2 \int\limits_{\tau_2} \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_2)^2 + U_2 \right\} d\tau_2 - \rho_1 \int\limits_{\tau_1} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1)^2 + U_1 \right\} d\tau_1 - \\ -(m_2 + m_1) \vec{g} \cdot \vec{r}_0, \qquad (21)$$

обозначает функцию Лагранжа для случая движения жидкостей в неподвижном сосуде.

Учитывая (17) и (18), из выражения (21) получаем

$$L_{12} = -\rho_2 \int\limits_{\tau_2} \left\{ \sum_{n=1} \dot{Q}_n \varphi_{2n} + \frac{1}{2} \sum_n \sum_m Q_n Q_m (\nabla \varphi_{2n}, \nabla \varphi_{2m}) + U_2 \right\} d\tau_2 - \\ -\rho_1 \int\limits_{\tau_1} \left\{ \sum_n \dot{Q}_n \varphi_{1n} + \frac{1}{2} \sum_n \sum_m Q_n Q_m (\nabla \varphi_{1n}, \nabla \varphi_{1m}) + U_1 \right\} d\tau_1 - (m_2 + m_1) \vec{g} \cdot \vec{r}_0 = \\ = -\sum B_{2n} \dot{Q}_n + \frac{1}{2} \sum_n \sum_m B_{2nm} Q_n Q_m - g_1 l_{21} - g_2 l_{22} - g_3 l_{23} + \sum B_{1n} \dot{Q}_n + \\ + \frac{1}{2} \sum_n \sum_m B_{1nm} Q_n Q_m - g_1 l_{11} - g_2 l_{12} - g_3 l_{13} - (m_2 + m_1) \vec{g} \cdot \vec{r}_0, \qquad (22)$$

где величины

$$B_{kn} = \rho_k \int\limits_{\tau_k} \varphi_{kn} d\tau_k \,, \; B_{knm} = B_{kmn} = \rho_k \int\limits_{\tau_k} (\nabla \varphi_{kn}, \nabla \varphi_{km}) d\tau_k = \rho_k \int\limits_{S_k + \Gamma} \varphi_{kn} \frac{\partial \varphi_{km}}{\partial \nu} dS_k \,, \qquad (23)$$

$$l_{k1} = \rho_k \int\limits_{\tau_k} x d\tau_k \,, \; l_{k2} = \rho_k \int\limits_{\tau_k} y d\tau_k \,, \; l_{k3} = \rho_k \int\limits_{\tau_k} z d\tau_k \,, \qquad (24)$$

представляют собой в силу (16) некоторые полиномы от параметров $\beta_j(t)$.

Для удобства дальнейшего решения выражения (20) можно представить в виде

$$L = -\left[\begin{array}{l} \dot{V}_{01}(l_{21}+l_{11}) + \dot{V}_{02}(l_{22}+l_{12}) + \dot{V}_{03}(l_{23}+l_{13}) + \dot{\omega}_1(l_{21\omega}+l_{11\omega}) + \\ +\dot{\omega}_2(l_{22\omega}+l_{12\omega}) + \dot{\omega}_3(l_{23\omega}+l_{13\omega}) + \omega_1(l^*_{21\omega}+l^*_{11\omega}) + \omega_2(l^*_{22\omega}+l^*_{12\omega}) + \\ +\omega_3(l^*_{23\omega}+l^*_{13\omega}) - \omega_1{}^2(J_{211}+J_{111})/2 - \omega_2{}^2(J_{222}+J_{122})/2 - \\ -\omega_3{}^2(J_{233}+J_{133})/2 - \omega_1\omega_2(J_{212}+J_{112}) - \omega_1\omega_3(J_{213}+J_{113}) - \\ -\omega_2\omega_3(J_{223}+J_{123}) - (m_2+m_1)(V_{01}^2+V_{02}^2+V_{03}^2)/2 + \\ +(\omega_2 V_{03} - \omega_3 V_{02})(l_{21}+l_{11}) + (\omega_3 V_{01} - \omega_1 V_{03})(l_{22}+l_{12}) + \\ +(\omega_1 V_{02} - \omega_2 V_{01})(l_{23}+l_{13}) \end{array}\right] + L_{12}, \qquad (25)$$

в выражении (25) введены следующие обозначения:

$$m_k = \rho_k \int_{\tau_k} d\tau_k\,,\; l_{ki\omega} = \rho_k \int_{\tau_k} A_{ki}\, d\tau_k\,,\; l^*_{ki\omega} = \rho_k \int_{\tau_k} \frac{\partial A_{ki}}{\partial t}\, d\tau_k\,, \qquad (26)$$

$$J_{k11} = \rho_k \int_{\tau_k} \left(y\frac{\partial A_{k1}}{\partial z} - z\frac{\partial A_{k1}}{\partial y}\right) d\tau_k = \rho_k \int_{S_k+\Gamma} A_{k1}\frac{\partial A_{k1}}{\partial \nu}\, dS_k\,, \qquad (27)$$

$$J_{k22} = \rho_k \int_{\tau_k} \left(z\frac{\partial A_{k2}}{\partial x} - x\frac{\partial A_{k2}}{\partial z}\right) d\tau_k = \rho_k \int_{S_k+\Gamma} A_{k2}\frac{\partial A_{k2}}{\partial \nu}\, dS_k\,, \qquad (28)$$

$$J_{k33} = \rho_k \int_{\tau_k} \left(x\frac{\partial A_{k3}}{\partial y} - y\frac{\partial A_{k3}}{\partial x}\right) d\tau_k = \rho_k \int_{S_k+\Gamma} A_{k3}\frac{\partial A_{k3}}{\partial \nu}\, dS_k\,, \qquad (29)$$

$$\begin{aligned} J_{k12} = J_{k21} &= \rho_k \int_{\tau_k} \left(z\frac{\partial A_{k1}}{\partial x} - x\frac{\partial A_{k1}}{\partial z}\right) d\tau_k = \rho_k \int_{\tau_k} \left(y\frac{\partial A_{k2}}{\partial z} - z\frac{\partial A_{k2}}{\partial y}\right) d\tau_k = \\ &= \rho_k \int_{S_k+\Gamma} A_{k1}\frac{\partial A_{k2}}{\partial \nu}\, dS_k = \rho_k \int_{S_k+\Gamma} A_{k2}\frac{\partial A_{k1}}{\partial \nu}\, dS_k, \end{aligned} \qquad (30)$$

$$\begin{aligned} J_{k13} = J_{k31} &= \rho_k \int_{\tau_k} \left(x\frac{\partial A_{k1}}{\partial y} - y\frac{\partial A_{k1}}{\partial x}\right) d\tau_k = \rho_k \int_{\tau_k} \left(y\frac{\partial A_{k3}}{\partial z} - z\frac{\partial A_{k3}}{\partial y}\right) d\tau_k = \\ &= \rho_k \int_{S_k+\Gamma} A_{k1}\frac{\partial A_{k3}}{\partial \nu}\, dS_k = \rho_k \int_{S_k+\Gamma} A_{k3}\frac{\partial A_{k1}}{\partial \nu}\, dS_k, \end{aligned} \qquad (31)$$

$$J_{k23}=J_{k32}=\rho_k\int_{\tau_k}(x\frac{\partial A_{k2}}{\partial y}-y\frac{\partial A_{k2}}{\partial x})d\tau_k=\rho_k\int_{\tau_k}(z\frac{\partial A_{k3}}{\partial x}-x\frac{\partial A_{k3}}{\partial z})d\tau_k=$$
$$=\rho_k\int_{S_k+\Gamma}A_{k2}\frac{\partial A_{k3}}{\partial \nu}dS_k=\rho_k\int_{S_k+\Gamma}A_{k3}\frac{\partial A_{k2}}{\partial \nu}dS_k. \qquad (32)$$

Предполагая, что $\vec{V}_0$ и $\vec{\omega}$ заданы, основываясь на выражениях (22) и (25), и используя формулы (26)-(32) , находим вариацию функционала (19)

$$\delta W=\int_{t_1}^{t_2}\left[\begin{array}{l}\sum_n(B_{2n}+B_{1n})\delta\dot{Q}_n+\frac{1}{2}\sum_n\sum_m(B_{2nm}+B_{1nm})Q_m\delta Q_n+\\ +\sum_j\left(\begin{array}{l}\sum_n\dot{Q}_n(\frac{\partial B_{2n}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial B_{1n}}{\partial\beta_j})+\omega_1(\frac{\partial l^*_{21\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l^*_{11\omega}}{\partial\beta_j})+\omega_2(\frac{\partial l^*_{22\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l^*_{12\omega}}{\partial\beta_j})+\\ +\omega_3(\frac{\partial l^*_{23\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l^*_{13\omega}}{\partial\beta_j})+\frac{1}{2}\sum_n\sum_m Q_mQ_n(\frac{\partial B_{2nm}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial B_{1nm}}{\partial\beta_j})+\\ +\dot{\omega}_1(\frac{\partial l_{21\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{11\omega}}{\partial\beta_j})+\dot{\omega}_2(\frac{\partial l_{22\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{12\omega}}{\partial\beta_j})+\dot{\omega}_3(\frac{\partial l_{23\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{13\omega}}{\partial\beta_j})+\\ +(\dot{V}_{01}-g_1+\omega_2V_{03}-\omega_3V_{02})(\frac{\partial l_{21}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{11}}{\partial\beta_j})+\\ +(\dot{V}_{02}-g_2+\omega_3V_{01}-\omega_1V_{03})(\frac{\partial l_{22}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{12}}{\partial\beta_j})+\\ +(\dot{V}_{03}-g_3+\omega_1V_{02}-\omega_2V_{01})(\frac{\partial l_{23}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{13}}{\partial\beta_j})-\\ -\frac{1}{2}\omega_1^2(\frac{\partial J_{211}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{111}}{\partial\beta_j})-\frac{1}{2}\omega_2^2(\frac{\partial J_{222}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{122}}{\partial\beta_j})-\\ +\frac{1}{2}\omega_3^2(\frac{\partial J_{233}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{133}}{\partial\beta_j})-\omega_1\omega_2(\frac{\partial J_{212}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{112}}{\partial\beta_j})-\\ -\omega_1\omega_3(\frac{\partial J_{213}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{113}}{\partial\beta_j})-\omega_2\omega_3(\frac{\partial J_{223}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{123}}{\partial\beta_j}))\delta\beta_j+\\ (\omega_1(\frac{\partial l^*_{21\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}+\frac{\partial l^*_{11\omega}}{\partial\dot{\beta}_j})+\omega_2(\frac{\partial l^*_{22\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}+\frac{\partial l^*_{12\omega}}{\partial\dot{\beta}_j})+\omega_3(\frac{\partial l^*_{23\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}+\frac{\partial l^*_{13\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}))\delta\dot{\beta}_j\end{array}\right)\end{array}\right]dt. \qquad (33)$$

Интегрируя (33) по частям и принимая во внимание обстоятельство, что в принципе Гамильтона – Остроградского начальное и конечное положения гидромеханической системы для действительных движений и движений сравнений одни и те же, получаем для определения параметров $Q_n(t)$ и $\beta_j(t)$ следующие бесконечные системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}(B_{2n}+B_{1n})-\sum_m Q_m(B_{2nm}+B_{1nm})=0,\ n=1,2,...; \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_n \dot{Q}_n(B_{2n}+B_{1n})+\frac{1}{2}\sum_n\sum_m\left(\frac{\partial B_{2nm}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial B_{1nm}}{\partial\beta_j}\right)Q_mQ_n+\dot{\omega}_1\left(\frac{\partial l_{21\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{11\omega}}{\partial\beta_j}\right)+\\
&+\dot{\omega}_2\left(\frac{\partial l_{22\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{12\omega}}{\partial\beta_j}\right)+\dot{\omega}_3\left(\frac{\partial l_{23\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{13\omega}}{\partial\beta_j}\right)+\omega_1\left(\frac{\partial l^*_{21\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l^*_{11\omega}}{\partial\beta_j}\right)+\omega_2\left(\frac{\partial l^*_{22\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l^*_{12\omega}}{\partial\beta_j}\right)+\\
&+\omega_3\left(\frac{\partial l^*_{23\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l^*_{13\omega}}{\partial\beta_j}\right)-\frac{d}{dt}\left(\omega_1\left(\frac{\partial l^*_{21\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}+\frac{\partial l^*_{11\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}\right)+\omega_2\left(\frac{\partial l^*_{22\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}+\frac{\partial l^*_{12\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}\right)+\right.\\
&\left.+\omega_3\left(\frac{\partial l^*_{23\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}+\frac{\partial l^*_{13\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}\right)\right)+(\dot{V}_{01}-g_1+\omega_2V_{03}-\omega_3V_{02})\left(\frac{\partial l_{21}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{11}}{\partial\beta_j}\right)+\\
&+(\dot{V}_{02}-g_2+\omega_3V_{01}-\omega_1V_{03})\left(\frac{\partial l_{22}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{12}}{\partial\beta_j}\right)+(\dot{V}_{03}-g_3+\omega_1V_{02}-\omega_2V_{01})\left(\frac{\partial l_{23}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial l_{13}}{\partial\beta_j}\right)-\\
&-\frac{1}{2}\omega_1^2\left(\frac{\partial J_{211}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{111}}{\partial\beta_j}\right)-\frac{1}{2}\omega_2^2\left(\frac{\partial J_{222}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{122}}{\partial\beta_j}\right)-\frac{1}{2}\omega_3^2\left(\frac{\partial J_{233}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{133}}{\partial\beta_j}\right)-\\
&-\omega_1\omega_2\left(\frac{\partial J_{212}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{112}}{\partial\beta_j}\right)-\omega_1\omega_3\left(\frac{\partial J_{213}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{113}}{\partial\beta_j}\right)-\omega_2\omega_3\left(\frac{\partial J_{223}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial J_{123}}{\partial\beta_j}\right)=0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Система уравнений (34) оказывается линейной по отношению к параметрам $Q_n(t)$, характеризующих изменение потенциала скорости со временем. Следовательно, можно решить его относительно этих параметров и получить из них систему нелинейных уравнений второго порядка относительно параметров $\beta_j(t)$, характеризующих отклонение границы раздела жидкостей от ее невозмущенного положения.

Величины $\frac{\partial l_{ki}}{\partial \beta_j}$, содержащиеся в (35) могут быть рассчитаны по формулам:

$$\frac{\partial l_{ki}}{\partial \beta_j} = \rho_k N_{kj}^2 \beta_j = \lambda_{kj1}\beta_j,\ N_{kj}^2 = \int\limits_{\Gamma_0} f_j^2 dS_k, \qquad (36)$$

$$\frac{\partial l_{k2}}{\partial \beta_j} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} y f_j dS_k = \lambda_{kj2},\ \frac{\partial l_{k3}}{\partial \beta_j} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} z f_j dS_k = \lambda_{kj3}. \qquad (37)$$

Относительно простым случаем для анализа (в смысле получения фактических значений коэффициентов уравнений движения) является случай поступательного движения жидкостей в сосуде в плоскости, параллельной плоскости X^*OZ^*. Уравнения движения для этого случая имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(B_{2n} + B_{1n}) - \sum_m Q_m (B_{2nm} + B_{1nm}) = 0,\ n = 1,2,...; \qquad (38)$$

$$\sum_n \dot{Q}_n (B_{2n} + B_{1n}) + \frac{1}{2}\sum_n \sum_m \left(\frac{\partial B_{2nm}}{\partial \beta_j} + \frac{\partial B_{1nm}}{\partial \beta_j}\right) Q_m Q_n - (\lambda_{2j1} + \lambda_{1j1}) g_1 \beta_j + \\ + \dot{V}_{03}(\lambda_{2j3} + \lambda_{1j3}) = 0, \quad j = 1,2,... \qquad (39)$$

Будем далее считать, что формы колебаний чётные относительно осей y и z мало влияют как на границы области неустойчивости, так и на величину амплитуды колебания в области основного резонанса. Поэтому ограничимся, только двумя основными несимметричными гармониками, возбуждаемыми в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. С этой целью обозначим параметры β_1, β_2 иначе, пусть

$\beta_1 = \alpha$, $\beta_2 = \beta$. Для случая заданного поступательного движения полости в направлении оси Oz по закону $U(t) = S\cos\omega t$, $V_{03} = -S\omega\sin\omega t$ уравнения (38) и (39) запишутся в виде, приведённом в работе [3]

$$\begin{aligned}&\ddot{\alpha} + \sigma^2\alpha + d_1(\alpha^2\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2\alpha + \alpha\beta\ddot{\beta} + \alpha\dot{\beta}^2) + \\ &+ d_2(\beta^2\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - \alpha\beta\ddot{\alpha} - 2\alpha\dot{\beta}^2) - \omega^2 P\cos\omega t = 0;\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{\beta} + \sigma^2\beta + d_1(\beta^2\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2\beta + \alpha\beta\ddot{\alpha} + \beta\dot{\beta}^2) + \\ &+ d_2(\beta^2\ddot{\beta} + 2\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta} - \alpha\beta\ddot{\alpha} - 2\beta\dot{\alpha}^2) = 0;\end{aligned} \tag{41}$$

где $\sigma^2 = \sigma_0^2$, $d_1 = \mu_1 / \mu_0^*$, $d_2 = \mu_2 / \mu_0^*$, $\mu_0^* = (B_{2n} + B_{1n})$, $P = S\lambda / \mu_0^*$,

$$\sigma_0^2 = gN^2 / \mu_0^* = \frac{\omega_{nm}^2(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 \bar{f}_{nm} + \rho_1)}, \; \omega_{nm}^2 = gk_{nm} \cdot thk_{nm}h_1, \; \bar{f}_{nm} = thk_{nm}h_1 \cdot cthk_{nm}h_2; \tag{42}$$

выражения μ_1, μ_2, μ_0^* были приведены в работе [3].

Заключение

Уравнения для обобщённых координат рассмотренной гидродинамической системы могут быть получены из уравнений Лагранжа 2-го рода [1]. Учитывая, что уравнения Лагранжа вытекают из более общих принципов механики, представлялось интересным получить уравнения для обобщённых координат непосредственно используя вариационный метод Гамильтона-Остроградского, связанный с параметрами, характеризующими движение системы, вполне конкретным способом, не противоречащих необходимым условиям экстремума функционала и физическим условиям применимости вариационных принципов и приводящий в данном случае к исследованию нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат, характеризующих нелинейные движения поверхности раздела двух жидкостей.

Список источников

1. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce, M.A. Boniforti. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Physics of Fluids, 2005, no. 17 (6), pp. 062101. DOI: 10.1063/1.1922887

2. La Rocca. Interfacial gravity waves in a two-fluid system // Fluids Dynamics Research, 2002, no. 30, pp. 31-66. DOI: 10.1016/S0169-5983(01)00039-9

3. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объёме // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. DOI: 10.17223/19988621/69/8

4. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Вариационная формулировка нелинейных краевых задач динамики двух жидкостей, совершающих заданное движение в пространстве// Труды МАИ. 2023. № 130. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=174607. DOI: 10.34759/trd-2023-130-11

5. Моисеев Г.А. Движение твердого тела, имеющего полость, целиком заполненную двумя несмешивающимися жидкостями. В кн.: Математическая физика. – Киев: Наукова думка, вып. 13. 1973.

6. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела полостями, содержащими жидкость. - Киев: Наукова думка, 1990. 296 с.

7. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Применение метода отсеков к расчёту колебаний жидкостных ракет-носителей. – М.: МАИ, 2017. - 100 с.

8. Шклярчук Ф.Н. Динамика конструкций летательных аппаратов. - М.: МАИ, 1983. – 79 с.

9. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=53486

10. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=84412

11. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=159785. DOI: 34759/trd-2021-119-08

12. Шарфарец Б.П. Вариационные методы как наиболее эффективный механизм при моделировании взаимосвязанных физических полей в сплошных средах // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 1. С. 102-112.

13. Макаров П.А. О вариационных принципах механики консервативных и неконсервативных систем // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. № 2 (23). С. 46-59.

14. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость // Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 27–36.

15. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость // Механика твердого тела. 1987. № 2. С. 52–58.

16. Ганичев А.И., Качура В.П., Темнов А.Н. Малые колебания двух несмешивающихся жидкостей в подвижном цилиндрическом сосуде. В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. – Новосибирск: НЭТИ, 1974. С. 82-88.

17. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. - М.: Гостехиздат, 1948. - 143 с.

18. Микишев Г.Н, Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкость. - М.: Машиностроение, 1968. - 532 с.

19. Колесников К.С. Динамика ракет. - М.: Машиностроение, 2003. - 520 с.

20. Микишев. Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1987. -248 с.

References

1. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce, M.A. Boniforti. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface, *Physics of Fluids*, 2005, no. 17 (6), pp. 062101. DOI: 10.1063/1.1922887

2. La Rocca. Interfacial gravity waves in a two-fluid system, *Fluids Dynamics Research*, 2002, no. 30, pp. 31-66. DOI: 10.1016/S0169-5983(01)00039-9

3. Win Ko Ko, Temnov A.N. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2021, no. 69. DOI: 10.17223/19988621/69/8

4. Win Ko Ko, Temnov A.N. Trudy MAI. 2023. № 130. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=174607. DOI: 10.34759/trd-2023-130-11

5. Moiseev G.A. *Dvizhenie tverdogo tela, imeyushchego polost', tselikom zapolnennuyu dvumya nesmeshivayushchimisya zhidkostyami. V kn.: Matematicheskaya fizika* (The motion of a rigid body having a cavity completely filled with two immiscible liquids. In the book: Mathematical Physics), Kiev, Naukova dumka, issue 13. 1973.

6. Lukovskii I.A. *Vvedenie v nelineinuyu dinamiku tverdogo tela polostyami, soderzhashchimi zhidkost'* (Introduction to the nonlinear dynamics of a rigid body with cavities containing a liquid), Kiev, Naukova dumka, 1990, 296 p.

7. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Primenenie metoda otsekov k raschetu kolebanii zhidkostnykh raket-nositelei* Application of the compartment method to the calculation of oscillations of liquid-propellant launch vehicles), Moscow, MAI, 2017, 100 p.

8. Shklyarchuk F.N. *Dinamika konstruktsii letatel'nykh apparatov* (Dynamics of aircraft structures), Moscow, MAI, 1983, 79 p.

9. Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53486

10. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. O parametricheskikh osesimmetrichnykh kolebaniyakh zhidkosti v tsilindricheskom sosude, *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412

11. Pak Songi, Grigor'ev V.G. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159785. DOI: 34759/trd-2021-119-08

12. Sharfarets B.P. *Nauchnoe priborostroenie*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 102-112.

13. Makarov P.A. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2017, no. 2 (23), pp. 46-59.

14. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Mekhanika tverdogo tela, 1986, no. 1, pp. 27–36.

15. Akulenko L.D., Nesterov S.V. *Mekhanika tverdogo tela*, 1987, no. 2, pp. 52–58.

16. Ganichev A.I., Kachura V.P., Temnov A.N. *Malye kolebaniya dvukh nesmeshivayushchikhsya zhidkostei v podvizhnom tsilindricheskom sosude. V kn.: Kolebaniya uprugikh konstruktsii s zhidkost'yu* (Small oscillations of two immiscible liquids in a movable cylindrical vessel. In the book: Vibrations of elastic structures with liquid, Novosibirsk, NETI, 1974, pp. 82-88.

17. Zhukovskii N.E. *O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoi kapel'noi zhidkost'yu* (On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous droplet liquid), Moscow, Gostekhizdat, 1948, 143 p.

18. Mikishev G.N, Rabinovich B.I. *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost'* (Dynamics of a rigid body with cavities partially filled with liquid), Moscow, Mashinostroenie, 1968, 532 p.

19. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* (Rocket dynamics), Moscow, Mashinostroenie, 2003, 520 p.

20. Mikishev G.N. *Eksperimental'nye metody v dinamike kosmicheskikh apparatov*. (Experimental methods in the dynamics of spacecraft), Moscow, Mashinostroenie, 1987, 248 p.

Статья поступила в редакцию 14.08.2023
Одобрена после рецензирования 08.10.2023
Принята к публикации 27.10.2023
The article was submitted on 14.08.2023; approved after reviewing on 08.10.2023; accepted for publication on 27.10.202