

Разложение Гельмгольца, *etc.*

Р. И. Храпко

Рассмотрены различные способы разложения векторных полей на безвихревую и соленоидальную части. При этом использован тот факт, что поля электромагнетизма представлены либо контравариантными (антисимметричными) плотностями, либо (антисимметричными) ковариантными тензорами, причем эти классы величин связаны операцией сопряжения. Все дифференциальные операции, grad , div , rot , рассмотрены с единой точки зрения, так же, как обратные к ним интегральные операции. Показано, что двукратное применение дифференциальной операции или интегральной операции дает ноль. Однако операция сопряжения, примененная между дифференцированием или интегрированием, приводит к конечным или бесконечным цепочкам величин. Оператор Лапласа и обратный к нему интегральный оператор представлены в терминах рассмотренных дифференциальных или интегральных операторов. Результаты проиллюстрированы простыми примерами.

1. Введение

Теорема Гельмгольца хорошо известна физикам и математикам [1, p. 241] [2, 5.7-3]. Суть ее заключается в следующем. Некоторое векторное поле, например, электрическое поле \mathbf{E} , может быть разложено на две части: безвихревое или продольное поле \mathbf{E}_{\times} и соленоидальное или поперечное поле \mathbf{E}_{\circ} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\times} + \mathbf{E}_{\circ}, \quad \text{rot}_{\times} \mathbf{E} \equiv \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \text{div}_{\circ} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (1.1)$$

Безвихревое или продольное поле обычно обозначают \mathbf{E}_{\parallel} или \mathbf{E}_{\circ} , а соленоидальное или поперечное поле обозначают \mathbf{E}_{\perp} или \mathbf{E}_{\times} , однако мы будем

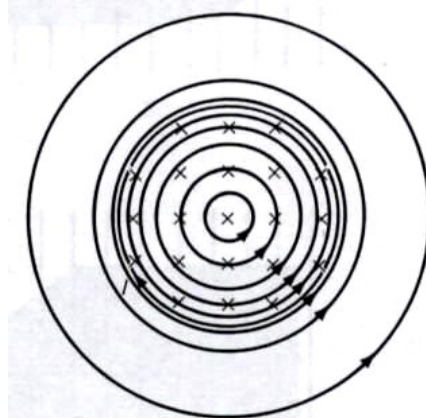
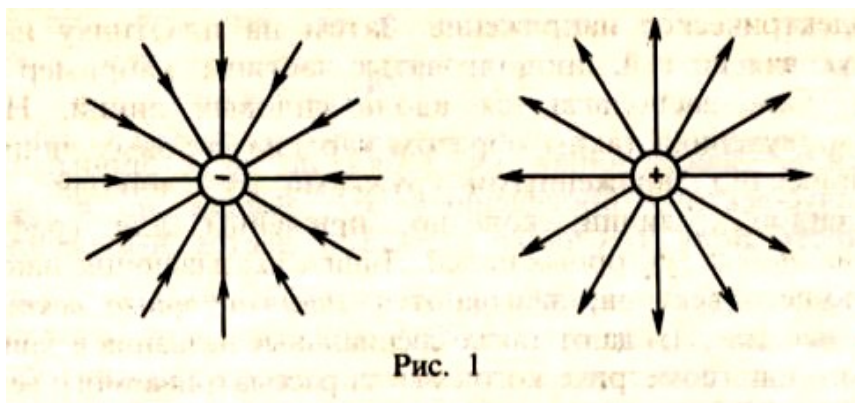


Fig. 32.22 Electric field lines (black) within solenoid and outside of solenoid.

Рис. 2

использовать крестик \times или кружок \circ для обозначения этих полей из-за того, что такие обозначения напоминают расположение силовых трубок (или линий) этих полей.

Рис. 1 взят из [3], а Рис. 2 вместе с подписью из [4].

Разложение Гельмгольца многократно приведено в литературе. Для вектора \mathbf{E} безвихревая часть дается формулой

$$\mathbf{E}_{\times}(x) = -\nabla \int \frac{\nabla' \mathbf{E}(x') dV'}{4\pi r(x, x')} . \quad (1.2)$$

В то же время для соленоидальной части известны две различные формулы

$$\mathbf{E}_{\circ}(x) = \nabla \times \left(\nabla \times \int \frac{\mathbf{E}(x') dV'}{4\pi r(x, x')} \right) [1, 5] \quad (1.3)$$

$$\mathbf{E}_{\circ}(x) = \nabla \times \int \frac{\nabla' \times \mathbf{E}(x') dV'}{4\pi r(x, x')} [2, 6 - 9] \quad (1.4)$$

Здесь \mathcal{X} означает тройку переменных x, y, z , штрих отмечает переменную интегрирования или дифференцирования под знаком интеграла, а $r(x, x')$ означает модуль вектора, соединяющего точку x' и точку x .

Важно отметить, что разложение Гельмгольца в неизменном виде справедливо для поля, зависящего от времени, поскольку время не входит в формулы разложения.

Разложение Гельмгольца оказалось выдвинутым на первый план в последнее время в связи с обсуждением кулоновской калибровки электромагнитных потенциалов [10, 11]. Как известно, электромагнитные потенциалы ϕ, \mathbf{A} , определяют электромагнитные поля \mathbf{E}, \mathbf{B} однозначно,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

но при этом сами они, при фиксированных \mathbf{E}, \mathbf{B} , допускают калибровочное преобразование

$$\phi \rightarrow \bar{\phi} = \phi - \partial_t \chi, \quad \mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \chi,$$

с помощью которого можно получить соленоидальный, или кулоновский, векторный потенциал и соответствующий ему кулоновский скалярный потенциал

$$\bar{\phi} = \phi, \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} = \mathbf{A}_c, \quad \nabla \mathbf{A}_c = 0.$$

Кулоновская калибровка интересна тем, что уравнения, связывающие эти потенциалы с источниками электромагнитного поля, то есть с плотностью заряда и тока ρ, \mathbf{j} , [1, p. 240]

$$\nabla^2 \phi + \partial_t \nabla \mathbf{A} = -\rho, \quad (\nabla^2 - \partial_t^2) \mathbf{A} - \nabla(\nabla \mathbf{A} + \partial_t \phi) = -\mathbf{j},$$

упрощаются,

$$\nabla_c^2 \phi = -\rho, \quad (\nabla_c^2 - \partial_t^2) \mathbf{A}_c - \nabla \partial_t \phi = -\mathbf{j},$$

и, кроме того, уравнение для тока разлагается на безвихревую и соленоидальную части,

$$\nabla \partial_t \phi = \mathbf{j}_{\times}, \quad (\nabla_c^2 - \partial_t^2) \mathbf{A}_c = -\mathbf{j}_{\circ}.$$

Мы, однако, не будем рассматривать в этой статье следствия кулоновской калибровки в электромагнетизме. Вместо этого мы предложим более простые формулы разложения Гельмгольца, проиллюстрируем эти формулы на простом примере полу бесконечного прямого провода с током и объясним получение этих формул, используя результаты работ [12, 13].

2. Формулы разложения Гельмгольца первого порядка

Мы предлагаем, вместо (1.2) и (1.3), (1.4) следующие формулы для безвихревой и соленоидальной частей поля \mathbf{E} при разложении (1.1).

$$\mathbf{E}_{\times} = \int \frac{(\nabla' \mathbf{E}') \mathbf{r}(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} \quad \text{или} \quad \mathbf{E}_{\times} = \int \frac{(\nabla' \times \mathbf{E}') \times \mathbf{r}'(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{E}_{\circ} = \nabla \times \int \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{r}'(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} \quad \text{или} \quad \mathbf{E}_{\circ} = \nabla \int \frac{\mathbf{E}' \mathbf{r}'(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (2.2)$$

Эти формулы взяты из работ [12, 13], а также из статьи «Электромагнетизм в терминах границ и порождений дифференциальных форм», которая была направлена в УФН 04.09.2000 и отклонена 10.01.2001. Мы воспроизведем здесь вывод этих формул, а также объясним, почему эти формулы названы формулами первого порядка. Но сначала рассмотрим

3. Пример использования формул первого порядка

Рассмотрим полу бесконечный прямой тонкий провод с током I , расположенный вдоль положительной оси Z . Пусть плотность тока \mathbf{j} сингулярна на территории провода. Мы должны разложить эту плотность на безвихревую и соленоидальную части. Воспользуемся для этого первыми формулами из (2.1), (2.2):

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\times} + \mathbf{j}_{\circ} = \int \frac{(\nabla' \mathbf{j}') \mathbf{r}(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} + \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}' \times \mathbf{r}'(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} \quad (3.1)$$

Проведем вычисления шаг за шагом. Мы пользуемся при этом обозначениями ρ , $\mathbf{B} = \{B_x, B_y\}$ для плотности заряда и магнитного поля, но введение этих величин имеет лишь методическое значение и не является обязательным. Итак

$$\nabla \mathbf{j} = -\partial_t \rho = I \delta(0), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{j}_{\times}(x) = \int \frac{I \delta(0') \mathbf{r}(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} = \frac{I \mathbf{r}(x)}{4\pi r^3(x)}. \quad (3.3)$$

Здесь $\delta(0)$ обозначает δ -функцию $\delta(x, y, z)$ при $x = y = z = 0$.

Далее, по закону Био-Савара-Лапласа

$$\mathbf{B} = \int \frac{\mathbf{j}' \times \mathbf{r}'(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} = \int \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}'(x, x')}{4\pi r^3(x, x')},$$

$$B_x = \frac{I y}{4\pi} \int_{z'=0}^{\infty} \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{I y}{4\pi R^2} \left(1 + \frac{1}{r}\right), \quad B_y = \frac{I x}{4\pi R^2} \left(1 + \frac{1}{r}\right), \quad R^2 = (x^2 + y^2) \quad (3.4)$$

Находим теперь ротор этого магнитного поля, или, как мы говорим, *границу* магнитного поля:

$$j_{\circ x} = -\partial_z B_y = -\frac{I x}{4\pi r^3}, \quad j_{\circ y} = \partial_z B_x = -\frac{I y}{4\pi r^3}, \quad j_{\circ z} = \partial_x B_y - \partial_y B_x = -\frac{I z}{4\pi r^3}, \quad \text{i.e. } \mathbf{j} = -\frac{I \mathbf{r}}{4\pi r^3}. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) верна во всех точках, кроме точек положительной оси Z , потому что при $z > 0, x = y = 0$ магнитное поле сингулярно:

$$B_x = -\frac{I y}{2\pi R^2}, \quad B_y = \frac{I x}{2\pi R^2}. \quad (3.6)$$

Ротор этого магнитного поля можно определить по теореме Стокса для окружности радиуса R при $R \rightarrow 0$:

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \mathbf{d}\mathbf{a} = \oint \mathbf{B} \mathbf{d}\mathbf{l} = \frac{I}{2\pi R^2} \int -y dx + x dy = \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = I. \quad (3.7)$$

Поэтому $(\nabla \times \mathbf{B})_z = I \delta(x, y)$, $\int \delta(x, y) da = 1$. Другими словами, соленоидальная часть \mathbf{j} тока \mathbf{j}

$$\mathbf{j} = -\frac{I \mathbf{r}}{4\pi r^3} + I \cdot (\text{ось } z > 0), \quad (3.8)$$

состоит из радиально сходящихся силовых трубок (3.5) и положительной оси Z .

На Рис. 3 нарисовано это разложение, причем силовые трубки использованы вместо обычных

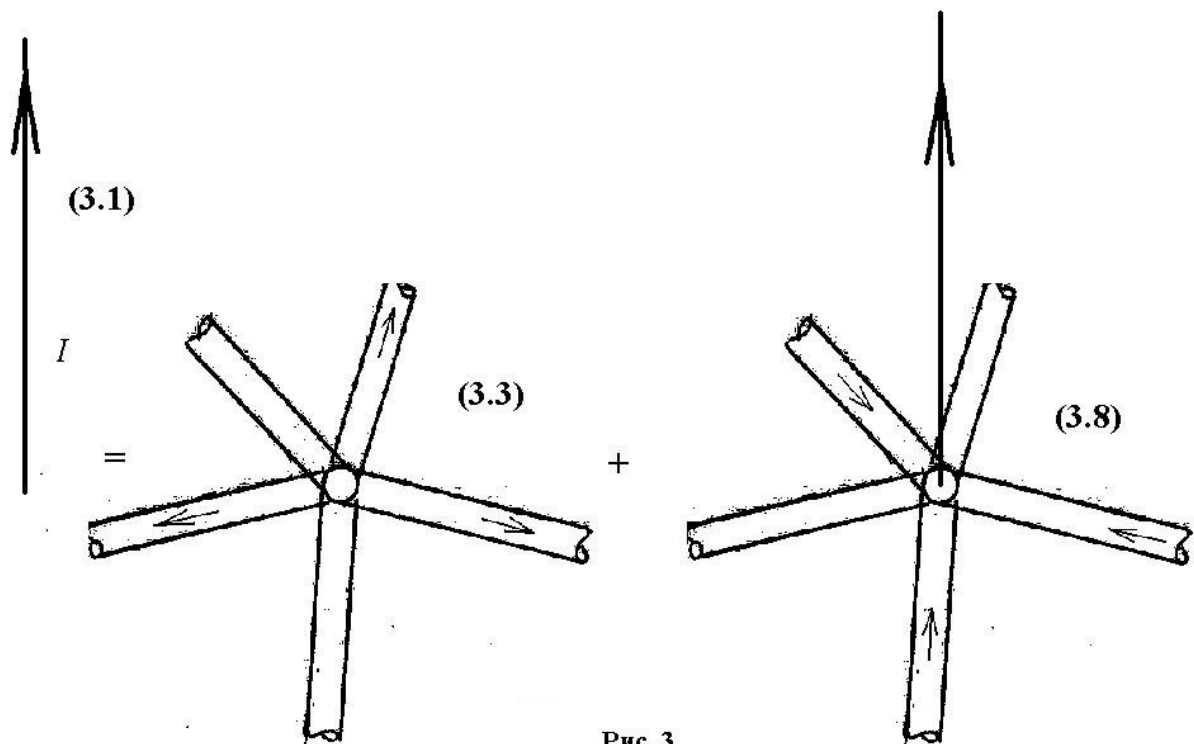


Рис. 3

силовых линий по причинам, изложенным в работах [12, 13]. Видна нелокальность безвихревой и соленоидальной частей прямого тока, на что указывали многие авторы [1, 10, 14].

4. Границы, сопряжение, цепочки

Для вывода формул (2.1), (2.2) важно учитывать, что в теории электромагнетизма на самом деле присутствуют геометрические величины [15] двух различных типов. Это ковариантные (антисимметричные) тензоры: φ , E_i , A_i , B_{ij} , иначе называемые дифференциальными формами, или просто формами, и контравариантные тензорные плотности: B_{\wedge}^{ik} , J_{\wedge}^i , E_{\wedge}^i , ρ_{\wedge} . Изображение этих величин с помощью обычных полужирных букв не достаточно адекватно. Для их представления в действительности необходимы ковариантные и контравариантные индексы. Кроме того, мы используем знак wedge \wedge на уровне нижних или верхних индексов, чтобы отмечать плотности веса +1 или -1 вместо готического шрифта.

В отношении дифференциальных форм в электродинамике используется так называемое внешнее дифференцирование, которое при дифференцировании скаляра является обыкновенным частным дифференцированием, а в общем случае предполагает антисимметризацию:

$$E_i = \partial_i \varphi \Leftrightarrow \mathbf{E} = \text{grad } \varphi, \quad B_{ij} = 2\partial_{[i} A_{j]} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.1)$$

При дифференцировании же плотностей всегда предполагается свертка по (последнему) контравариантному индексу, то есть дивергенция:

$$J_{\wedge}^i = \partial_k B_{\wedge}^{ik} \Leftrightarrow \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad \rho_{\wedge} = \partial_i E_{\wedge}^i \Leftrightarrow \rho = \text{div } \mathbf{E}. \quad (4.2)$$

Ради краткости, мы будем иногда обозначать дифференцирование символом ∂ без индексов. Производную величину мы называем *границей*, а дифференцируемую величину называем *наполнением* этой границы, т.е. (граница) = ∂ (наполнение), например:

$$E_i = \partial \varphi, \quad B_{ij} = \partial A_j, \quad J_{\wedge}^i = \partial B_{\wedge}^{ik}, \quad \rho_{\wedge} = \partial E_{\wedge}^i. \quad (4.3)$$

Очевидно, что повторное дифференцирование дает ноль, $\partial \partial = 0$. Например, для E_i из (4.1) будет $\partial_{[k} E_{i]} = \partial_{[ki]}^2 \varphi = 0$. Мы говорим, что граница границы равна нулю или что граница *замкнута* и отмечаем границу кружком, что соответствует разделу 1, потому что соленоидальные векторные поля, которые там рассматривались, замкнуты. Например,

$$\overset{\circ}{E}_i = \partial_i \varphi, \quad \overset{\circ}{J}_{\wedge}^i = \partial_k B_{\wedge}^{ik}, \quad \overset{\circ}{B}_{ik} = 2\partial_{[i} A_{k]}. \quad (4.4)$$

Поднятие тензорных индексов обычно осуществляется метрическим тензором g^{ik} , однако в электромагнетизме оно связано с переходом от тензора к тензорной плотности и поэтому сопровождается умножением на квадратный корень из определителя метрического тензора $\sqrt{g_{\wedge}}$, так что вместо g^{ik} используется $g_{\wedge}^{ik} = g^{ik} \sqrt{g_{\wedge}}$. Операцию поднятия индексов в электродинамике, а также обратную операцию, которая сопровождается делением на $\sqrt{g_{\wedge}}$, мы называем *сопряжением* и обозначаем пяти-лучевой звездочкой *Courier* \star (в отличие от операции Ходжа \star):

$$E_i = \star E_{\wedge}^k \equiv g_{ik}^{\wedge} E_{\wedge}^k, \quad E_{\wedge}^k = \star E_i \equiv E_i g_{\wedge}^{ik}, \quad B_{ij} = \star B_{\wedge}^{mn} \equiv B_{\wedge}^{mn} g_{mi} g_{nj}^{\wedge}, \quad B_{\wedge}^{mn} = \star B_{ij} \equiv B_{ij} g_{\wedge}^{im} g_{\wedge}^{jn}. \quad (4.5)$$

Сопряжение очевидно инволютивно: $\star\star = \mathbf{1}$. Таким образом, если символ « $= \partial$ » выражает отношение между границей и наполнением, то символ « $= \star$ » выражает отношение сопряжения между величинами.

Замечательно, что после сопряжения замкнутые величины, как правило, перестают быть замкнутыми. Такие величины, замкнутые до сопряжения, т.е. *сопряженно-замкнутые* величины, мы будем отмечать крестиком \times . Это соответствует разделу 1, где безвихревое кулоновское контравариантное векторное поле \mathbf{E}_{\times} , для которого $\nabla_{\times} \mathbf{E} = \partial_i E^i = \rho$, после сопряжения оказывается замкнутым:

$$2\partial_{[k} (g_{j]i} E^i) = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\times} \mathbf{E} = 0. \quad (4.6)$$

Свойство сопряжения превращать замкнутые величины в не замкнутые величины приводит к существованию бесконечных или конечных цепочек величин. Приведем примеры.

$$\dots = \partial_{\times} \xi^{ij} = \star \xi_{\circ}^{ik} = \partial_{\times} E_k = \star E_{\circ}^i = \partial_{\times} \Pi^{ik} = \star \Pi_{\circ}^{ij} = \partial_{\times} Q_j = \star Q_{\circ}^i = \partial \dots \quad (4.7)$$

$$\dots = \partial \rho = \star \rho_{\wedge} = \partial_{\times} E^i = \star E_{\circ}^j = \partial \varphi = \star \varphi_{\wedge} = \partial_{\times} Q^i = \star Q_{\circ}^j = \partial \dots \quad (4.8)$$

$$\dots = \partial_{\times} C^{ij} = \star C_{\circ}^{ik} = \partial_{\times} j_k = \star j_{\circ}^i = \partial_{\times} B^{ik} = \star B_{\circ}^{ij} = \partial_{\times} A_j = \star A_{\circ}^i = \partial \dots \quad (4.9)$$

$$\dots = \partial_{\times} C_{ij} = \star C_{\circ}^{ij} = \partial_{\times} \varsigma^{ijk} = \star \varsigma_{\circ}^{ijk} = \partial_{\times} B_{jk} = \star B_{\circ}^{ij} = \partial_{\times} \pi_{\wedge}^{ijk} = \star \pi_{\circ}^{ijk} = \partial \dots \quad (4.10)$$

Здесь $\xi_{\times}^{ij} = \star \xi_{\circ}^{ik}$ обозначает магнитный ток, порождающий соленоидальное электрическое поле \mathbf{E}_{\circ} , а $\Pi_{\times}^{ik} = \star \Pi_{\circ}^{ij}$ обозначает электрический псевдовекторный потенциал этого поля, аналогичный магнитному векторному потенциалу $A_{\times}^j = \star A_{\circ}^i$. Через Q_{\times}^i в (4.8) обозначено гипотетическое поле, границей которого является плотность скалярного электрического потенциала φ_{\wedge} . Однако φ_{\wedge} , так же, как ρ_{\wedge} , не может считаться замкнутым, поскольку дифференцирование со сверткой не применимо к скалярным плотностям. Поэтому $\rho, \rho_{\wedge}, \varphi, \varphi_{\wedge}$ не снабжены крестиками или кружками. Гипотетическое тензорное поле C_{\circ}^{ik} из (4.9) получается дифференцированием сопряженно-замкнутого электрического тока j_{\times}^k , а поле C_{\circ}^{ij} из (4.10) получается дифференцированием плотности магнитного заряда. $\varsigma_{\wedge}^{ijk} = \star \varsigma_{\circ}^{ijk}$, которая порождает безвихревое магнитное поле \mathbf{B}_{\times} с псевдоскалярным магнитным потенциалом $\pi_{\wedge}^{ijk} = \star \pi_{\circ}^{ijk}$. Потенциал π_{\circ}^{ijk} и магнитный заряд ς_{\circ}^{ijk} не снабжены кружками, поскольку рассматриваемое дифференцирование к ним не применимо. В этом смысле они аналогичны $\rho_{\wedge}, \varphi_{\wedge}$.

При дифференцировании суммы замкнутой и сопряженно-замкнутой величин замкнутое слагаемое просто элиминируется:

$$\partial_j (B_{\wedge}^{ij} + B_{\times}^{ij}) = \partial_j B_{\times}^{ij}, \quad (4.11)$$

однако оператор второго порядка $\nabla^2 = g^{ij} \partial_i \partial_j$ обрабатывает оба слагаемых. Он сдвигает слагаемые на четыре позиции влево и там составляет их разность:

$$\nabla^2 \overset{p}{\omega} = (-1)^p (\star \partial \star \partial - \partial \star \partial \star) \overset{p}{\omega}, \quad \nabla^2 \overset{p}{\alpha}_{\wedge} = (-1)^{p+1} (\star \partial \star \partial - \partial \star \partial \star) \overset{p}{\alpha}_{\wedge}. \quad (4.12)$$

Здесь $\overset{p}{\omega}$ означает дифференциальную форму порядка P , а $\overset{p}{\alpha}_{\wedge}$ - контравариантную плотность валентности P .

Приведем простой пример в пространстве двух измерений. Пусть

$$p = 1, \quad i = 1, 2, \quad \omega_i = \omega_{\times i} + \omega_{\circ i}, \quad \omega_{\times i} = \{y^2, 0\}, \quad \omega_{\circ i} = \{x^2, 0\}. \quad (4.13)$$

Здесь компоненты тензоров записаны в фигурных скобках. Проверим, что

$\nabla^2 \omega_i = -(\star \partial \star \partial - \partial \star \partial \star) \omega_i$. Сдвиг слагаемых $\omega_{\times i}$ и $\omega_{\circ i}$ на четыре позиции влево дает:

$$\star \partial \star 2 \partial_{[k} \omega_{i]} = \star \partial \star \{-2y\}_{xy} = \star \partial_y \{-2y\}_{\wedge}^{xy} = \star \{-2, 0\}_{\wedge}^i = \{-2, 0\}_i, \quad (4.14)$$

$$\partial \star \partial \star \omega_{\circ i} = \partial \star \partial_i \{x^2, 0\}_{\wedge}^i = \partial \star \{2x\}_{\wedge} = \partial_i \{2x\} = \{2, 0\}_i. \quad (4.15)$$

$$\text{Таким образом,} \quad -(\star \partial \star \partial - \partial \star \partial \star) \omega_i = -(\{-2, 0\} - \{2, 0\}) = \{4, 0\}_i. \quad (4.16)$$

$$\text{С другой стороны,} \quad \nabla^2 \omega_i = (\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2) \{y^2 + x^2, 0\}_i = \{4, 0\}_i, \quad (4.17)$$

как и должно быть согласно первому равенству из (4.12).

Рассмотрим другой пример. По определению и согласно (4.9), $j_{\wedge}^i = \partial \star \partial \star A_{\wedge}^i$. Однако, как известно, $\mathbf{j} = -\nabla^2 \mathbf{A}$. Это согласуется со вторым равенством из (4.12).

Существенно, что формулы (4.12) справедливы при любой сигнатуре метрического тензора. В пространстве Минковского с сигнатурой $(+ - - -)$ $j_{\wedge}^{\alpha} = -\partial \star \partial \star A_{\wedge}^{\alpha}$, поскольку $j_{\wedge}^{\alpha} = -\partial_{\beta} F_{\wedge}^{\alpha\beta}$.

Однако, как известно, $j_{\wedge}^{\alpha} = \nabla_4^2 A_{\wedge}^{\alpha}$. Это согласуется со вторым равенством из (4.12). Здесь индекс 4

указывает, что оператор ∇_4^2 действует в 4-пространстве.

5. Порождения

Операцию, обратную дифференцированию ∂ , мы называем операцией *порождения*.

Обозначим ее кратко знаком интеграла \int и выпишем в явном виде в нескольких случаях:

$$E_{\wedge}^i = \int^i \rho_{\wedge} = \int \frac{\rho_{\wedge}(x') r_{\wedge}^i(x, x') dV^{\wedge}}{4\pi r^3}, \quad (\rho \text{ порождает } \mathbf{E}) \quad (5.1)$$

$$\varphi = \int^i E_i = \int \frac{E_i r_{\wedge}^i(x, x') dV^{\wedge}}{4\pi r^3}, \quad (\mathbf{E} \text{ порождает } \Phi) \quad (5.2)$$

$$A_k = \int^i B_{ik} = \int \frac{B_{ik} r_{\wedge}^i(x, x') dV^{\wedge}}{4\pi r^3}, \quad (\mathbf{B} \text{ порождает } \mathbf{A}) \quad (5.3)$$

Будем говорить, что порожденная величина, то есть *порождение*, порождается *источником*, то есть (порождение) $\equiv \int$ (источник).

В отличие от наполнения границы, которое должно быть дифференцируемым, но может расти на бесконечности как, например, (4.13), источник должен обеспечивать интегрируемость подынтегрального выражения, но может иметь разрывы как, например, плотность на краю шара.

Порождение обладает важными свойствами. Они были сформулированы в статье «Электromагнетизм в терминах источников и порождений полей», направленной в журнал «УФН» 13.06.95 и отклоненной редакцией.

1) Порождение порождения равно нулю, $\int \int = 0$. Другими словами, порождение *стерильно*.

Докажем это свойство для E_{\wedge}^i из (5.1), то есть докажем, что равно нулю выражение

$$\int^{[i} E_{\wedge}^{k]} \equiv \int \frac{E_{\wedge}^{[i}(x') r_{\wedge}^{k]}(x, x') dV^{\wedge}}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (5.4)$$

Действительно, выполнив подстановку E_{\wedge}^i из (5.1), получим

$$\int^{[i} E_{\wedge}^i \equiv \iint \frac{\rho_{\wedge}(x'') r_{1\wedge}^{[i}(x', x'') r_{\wedge}^{k]}(x, x') dV^{\wedge} dV^{\wedge}}{4\pi r_1^3(x', x'') \cdot 4\pi r^3(x, x')} = 0. \quad (5.5)$$

Для доказательства последнего равенства зафиксируем точки x'' и x . Тогда из-за симметрии пространства для каждой точки x' найдется точка \tilde{x}' такая, что векторное произведение $r_1^{[i} r^{k]}$ отличается в точках x' и \tilde{x}' только знаком. Поэтому при интегрировании выражения по dV^{\wedge} получится ноль. Стерильность порождений аналогична замкнутости границ.

2) Порождение сопряженно-замкнуто, $\partial \star \int = 0$. Покажем, например, что для E_{\wedge}^i из (5.1)

будет $\partial \star E_{\wedge}^i = 0$ или $E_{\wedge}^i = E_{\times}^i$, то есть

$$\partial_{[j} g_{k]i} \int \frac{\rho_{\wedge}(x') r_{\wedge}^i(x, x') dV_{\wedge}}{4\pi r^3} = 0. \quad (5.6)$$

Утверждение (5.6) вытекает из простого тождества

$$\partial_{[j} (g_{k]i} r^i / r^3) = 0. \quad (5.7)$$

Можно показать, что сопряженно-замкнутые величины стерильны. В качестве простого примера рассмотрим замкнутую функцию $\Psi = 1$. Покажем, что равно нулю порождение сопряженно-замкнутой плотности $\Psi_{\wedge} = 1$, то есть

$$\int \Psi_{\wedge} = \int \frac{r^i(x, x') dV'}{r^3} = 0. \quad (5.8)$$

Утверждение (5.8) очевидно в силу симметрии пространства. Таким образом, процесс порождения элиминирует сопряженно-замкнутую часть источника аналогично тому, как дифференцирование элиминирует замкнутую часть заполнения. Мы имеем, например,

$$\Pi_{\wedge}^{ik} = \int (E_{\wedge}^i + E_{\circ}^i) = \int E_{\circ}^i, \text{ и также } A_{\times k} = \int (B_{\times ik} + B_{\circ ik}) = \int B_{\circ ik} \quad (5.9)$$

Таким образом, отношение, например, $B_{\circ ik} = \partial A_{\times k}$ является одновременно отношением $A_{\times k} = \int B_{\circ ik}$.

Мы обозначим это двойное отношение стрелкой \mapsto , например:

$$E_{\circ}^i \mapsto \Pi_{\wedge}^{ik} \text{ означает: «} E_{\circ}^i \text{ порождает } \Pi_{\wedge}^{ik} \text{» и «} E_{\circ}^i \text{ есть граница } \Pi_{\wedge}^{ik} \text{»}. \quad (5.10)$$

$$B_{\circ ik} \mapsto A_{\times k} \text{ означает: «} B_{\circ ik} \text{ порождает } A_{\times k} \text{» и «} B_{\circ ik} \text{ ограничивает } A_{\times k} \text{»}. \quad (5.11)$$

Используя обозначения (5.10), (5.11), можно переписать цепочки (4.7) – (4.10) короче:

$$\dots \mapsto \xi_{\wedge}^{ij} \star \xi_{\circ ik} \mapsto E_{\times k} \star E_{\circ}^i \mapsto \Pi_{\wedge}^{ik} \star \Pi_{\circ ij} \mapsto Q_{\times j} \star Q_{\circ}^i \mapsto \dots \quad (5.12)$$

$$\dots \mapsto \rho \star \rho_{\wedge} \mapsto E_{\wedge}^i \star E_{\circ k} \mapsto \varphi \star \varphi_{\wedge} \mapsto Q_{\wedge}^i \star Q_{\circ j} \mapsto \dots \quad (5.13)$$

$$\dots \mapsto C_{\wedge}^{ij} \star C_{\circ ik} \mapsto j_k \star j_{\circ}^i \mapsto B_{\wedge}^{ik} \star B_{\circ ij} \mapsto A_{\times j} \star A_{\circ}^i \mapsto \dots \quad (5.14)$$

$$\dots \mapsto C_{\times ij} \star C_{\circ}^{ij} \mapsto \zeta_{\wedge}^{ijk} \star \zeta_{\circ ik} \mapsto B_{\times jk} \star B_{\circ}^{ij} \mapsto \pi_{\wedge}^{ijk} \star \pi_{\circ ik} \mapsto \dots \quad (5.15)$$

Мы обозначим через \int^2 операцию второго порядка, обратную к $\nabla^2 = g^{ij} \partial_i \partial_j$:

$$\int^2 = - \int \frac{dV_{\wedge}}{4\pi r(x, x')}, \quad \int^2 \nabla^2 = \nabla^2 \int^2 = 1. \quad (5.16)$$

Условие (5.16) и формулы (4.12) позволяют выразить оператор \int через оператор порождения

\int :

$$\int \omega = (-1)^{p+1} (* \int * \int - \int * \int *) \omega, \quad \int \alpha_{\wedge} = (-1)^p (* \int * \int - \int * \int *) \alpha_{\wedge}. \quad (5.17)$$

Таким образом, оператор \int сдвигает замкнутую и сопряженно-замкнутую часть величины вправо на четыре позиции и после этого образует их разность. Мы готовы теперь обсуждать

6. Различные варианты разложения Гельмгольца

Вернемся к формуле (1.1) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\times} + \mathbf{E}_{\circ}$. Простейшее разложение Гельмгольца выглядит так

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\times} + \mathbf{E}_{\circ} = (\int \partial + \partial \int) \mathbf{E}, \quad \text{то есть} \quad \mathbf{E}_{\times} = \int \partial \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}_{\circ} = \partial \int \mathbf{E}. \quad (6.1)$$

Однако конкретный вид этой формулы зависит от того, является \mathbf{E} векторной плотностью, или ковектором. Если \mathbf{E} является векторной плотностью, т.е. $\mathbf{E} = E_{\wedge}^i$, то

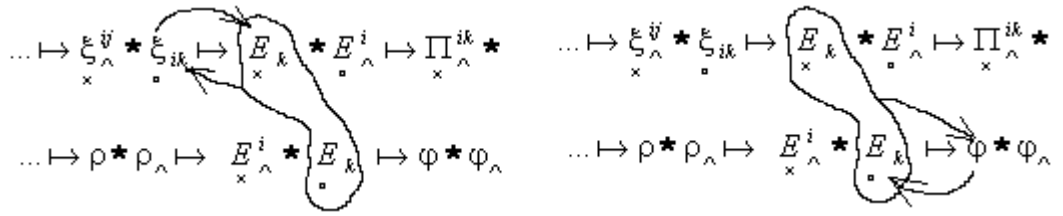
$$\mathbf{E}_{\times} = E_{\wedge}^i = \int \partial E_{\wedge}^i = \int \frac{\partial_{k'} E_{\wedge}^{k'} r_{\wedge}^i dV^{\wedge'}}{4\pi r^3} = \int \frac{(\nabla' \mathbf{E}') \mathbf{r} dV'}{4\pi r^3}, \quad \mathbf{E}_{\circ} = E_{\circ}^i = 2\partial \int \frac{E_{\wedge}^{[i} r_{\wedge}^{k]} dV^{\wedge'}}{4\pi r^3} = \nabla \times \int \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{r} dV'}{4\pi r^3}.$$

$$\begin{array}{l} \xi_{\wedge}^{\psi} * \xi_{ik} \mapsto E_k * E_{\wedge}^i \mapsto \Pi_{\wedge}^{ik} * \Pi_{\psi} \\ \rightarrow \rho * \rho_{\wedge} \mapsto (E_{\wedge}^i * E_k) \mapsto \varphi * \varphi_{\wedge} \mapsto \end{array} \quad \begin{array}{l} \xi_{\wedge}^{\psi} * \xi_{ik} \mapsto E_k * E_{\wedge}^i \mapsto \Pi_{\wedge}^{ik} * \Pi_{\psi} \\ \rightarrow \rho * \rho_{\wedge} \mapsto (E_{\wedge}^i * E_k) \mapsto \varphi * \varphi_{\wedge} \mapsto \end{array} \quad (6.2)$$

Слева: дифференцирование превращает суммарное \mathbf{E} в ρ_{\wedge} , и затем интегрирование превращает ρ_{\wedge} в \mathbf{E}_{\times} . Справа: интегрирование превращает суммарное \mathbf{E} в Π_{\wedge}^{ik} , и затем дифференцирование превращает Π_{\wedge}^{ik} в \mathbf{E}_{\circ} . Формула (6.2) использует первые варианты из (2.1), (2.2).

Если $\mathbf{E} = E_i$, то

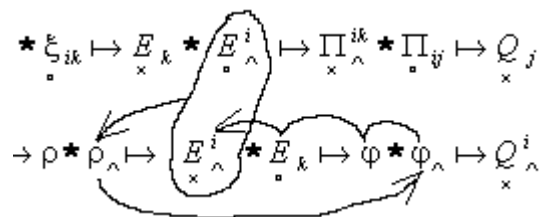
$$\begin{aligned} E_{\times i} &= \int \partial E_i = 2 \int \frac{\partial_{[k'} E_{i]} r_{\wedge}^{k'} dV^{\wedge'}}{4\pi r^3} = \int \frac{(\nabla' \times \mathbf{E}') \times \mathbf{r} dV'}{4\pi r^3}, \\ E_{\circ i} &= \partial \int E_i = \partial_i \int \frac{E_{k'} r_{\wedge}^{k'} dV^{\wedge'}}{4\pi r^3} = \nabla \int \frac{(\mathbf{E} \mathbf{r}) dV'}{4\pi r^3}. \end{aligned} \quad (6.3)$$



Дифференцирование превращает суммарное \mathbf{E} в ξ_{ik} , и затем интегрирование превращает ξ_{ik} в \mathbf{E} .
 Интегрирование превращает суммарное \mathbf{E} в Φ , и затем дифференцирование превращает Φ в \mathbf{E} .
 Формула (6.3) использует вторые варианты из (2.1), (2.2).

Займемся теперь формулами (1.2) – (1.4), которые используют оператор второго порядка \int .
 Мы называем их разложением второго порядка, а формулы (2.1), (2.2), (6.1) – (6.3) – разложением первого порядка. Формула (1.2) для безвихревой части E_x^i векторной плотности E_\wedge^i выглядит так

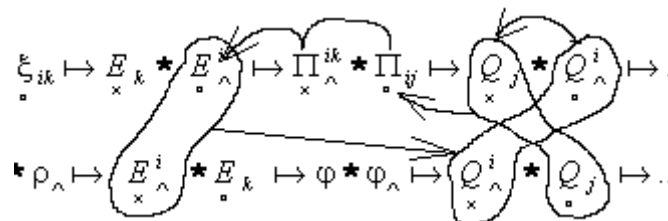
$$E_x^i = \star \partial \star \int \partial E_\wedge^i = -\nabla \int \frac{\nabla' \mathbf{E}(x') dV'}{4\pi r(x, x')} \quad (6.4)$$



Эта формула содержит пять операций. Сначала дифференцирование превращает суммарное поле E_\wedge^i в ρ_\wedge , элиминируя E_x^i . Потом оператор \int превращает ρ_\wedge в плотность Φ_\wedge , которая после сопряжения, дифференцирования и нового сопряжения, наконец, превращается в желанное E_x^i .

Формула (1.3) для соленоидальной части E_\wedge^i векторной плотности E_\wedge^i выглядит так

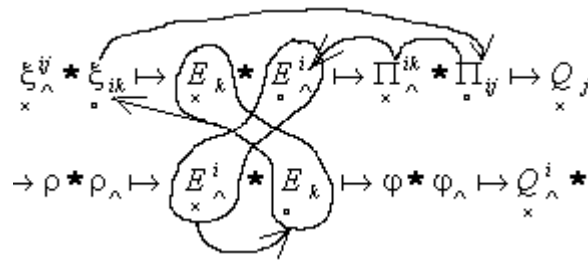
$$E_\wedge^i = -\partial \star \partial \star \int E_\wedge^i = \nabla \times \left(\nabla \times \int \frac{\mathbf{E}(x') dV'}{4\pi r(x, x')} \right) \quad (6.5)$$



Эта формула тоже содержит пять операций. Сначала оператор \int^2 превращает суммарное поле E_{\wedge}^i в разность $Q_{\wedge}^i - Q_{\times}^i$ в соответствии с (5.17). Затем сопряжение \star превращает разность $Q_{\wedge}^i - Q_{\times}^i$ в разность $Q_{\times}^j - Q_{\wedge}^j$. Последующее дифференцирование элиминирует Q_{\wedge}^j , а затем новое сопряжение и новое дифференцирование приводят, наконец, к желанному E_{\wedge}^i .

Формула (1.4) для соленоидальной части E_{\wedge}^i векторной плотности E_{\wedge}^i отличается от (1.3)

тем, что оператор \int^2 переставлен на две операции влево:



$$E_{\wedge}^i = -\partial \star \int^2 \partial \star E_{\wedge}^i = \nabla \times \int \frac{\nabla' \times \mathbf{E}(x') dV'}{4\pi r(x, x')} \quad (6.6)$$

Здесь сначала суммарное поле векторной плотности $E_{\wedge}^i = E_{\wedge}^i + E_{\times}^i$ сопряжением превращается в ковекторное поле $E_k = E_{\times}^k + E_{\wedge}^k$. Последующее дифференцирование элиминирует E_{\wedge}^k , а применение оператора \int^2 превращает получившийся магнитный ток ξ_{\times}^{ik} в электрический псевдовекторный потенциал Π_{\times}^{ij} в соответствии с (5.17). Последующие сопряжение и дифференцирование приводят к желанному E_{\wedge}^i .

7. Тандемно замкнутые величины

Кроме замкнутых и сопряженно-замкнутых величин существуют величины, являющиеся одновременно замкнутыми и сопряженно-замкнутыми. Мы отмечаем такие величины парой значков $\times \circ$. В этом случае замкнуты обе составляющие, входящие в тандем $E_{\times \circ}^i \star E_{\times \circ}^j$, например,

$\{y, x\}_{\lambda}^i \star \{y, x\}_{\lambda}^j$. Мы называем такие величины тандемно-замкнутыми, а сами тандемы – концевыми

тандемами, потому что пара цепочек величин заканчивается на таких тандемах, например,

$$\begin{aligned}
 Q_{\lambda}^i &= \{y, x\}_{\lambda}^i \star \{y, x\}_{\lambda}^i = \{y, x\}_{\lambda}^i \star \{y, x\}_{\lambda}^i = \{y, x\}_{\lambda}^i = \{x^2 y / 4 + y^3 / 12, y^2 x / 4 + x^3 / 12\}_{\lambda}^i \\
 Q_{\lambda}^j &= \{y, x\}_{\lambda}^j \star \{y, x\}_{\lambda}^j = \{y, x\}_{\lambda}^j = \{x^2 y / 4 + y^3 / 12, y^2 x / 4 + x^3 / 12\}_{\lambda}^j \\
 Q_{\lambda}^i \star Q_{\lambda}^j &= \{y, x\}_{\lambda}^i \star \{y, x\}_{\lambda}^j = \{y, x\}_{\lambda}^i \star \{y, x\}_{\lambda}^j = \{y, x\}_{\lambda}^i \star \{y, x\}_{\lambda}^j = \{y, x\}_{\lambda}^i \star \{y, x\}_{\lambda}^j = \{y, x\}_{\lambda}^i \star \{y, x\}_{\lambda}^j = \dots
 \end{aligned}$$

Отметим очевидный факт. Если сложить однородные величины тандемов, которые расположены на две тандемные позиции правее концевых тандемов, мы получим гармоническую величину:

$$\begin{aligned}
 Q_{\lambda}^i &= Q_{\lambda}^i + Q_{\lambda}^i = \{x^2 y / 4 + y^3 / 12, y^2 x / 4 + x^3 / 12\}_{\lambda}^i + \{y^3 / 6, -x^3 / 6\}_{\lambda}^i = \\
 &= \{x^2 y / 4 - y^3 / 12, y^2 x / 4 - x^3 / 12\}_{\lambda}^i,
 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 Q_{\lambda}^i = \nabla^2 \{x^2 y / 4 - y^3 / 12, y^2 x / 4 - x^3 / 12\}_{\lambda}^i = \{0, 0\}.$$

Так получается потому, что оператор ∇^2 сдвигает замкнутую и сопряженно-замкнутую составляющие некоторой величины на две тандемные позиции влево и там создает их разность. Эта разность равна нулю, если составляющие оказываются в концевом тандеме.

8. Заключение

В статье показана полезность представления о дифференциальных формах и тензорных плотностях и введены такие понятия, как граница и ее наполнение, источник и его порождение. Эти понятия углубляют понимание электродинамики, поскольку разъясняют взаимные отношения полей в теории электромагнетизма.

Список литературы

1. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. – John Wiley & Sons, Inc., 1999.- 808 p.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1984.- 831 с.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том 3, часть 1. – М.: Наука, 1996.- 320 с.
4. Ohanian H. C. Physics. – N.Y.: W.W.Norton, 1985.- 1012 p.
5. Jackson J. D. From Lorenz to Coulomb and other explicit gauge transformations.// American J. Physics. – 2002, v. 70.-p.917-928.
6. Stewart A. M. Vector potential of the Coulomb gauge.// European J. Physics. – 2003, v. 24.- p.519-524.
7. Hnzido V. Comment on ‘Vector potential of the Coulomb gauge’.// European J. Physics. – 2004, v. 25.- p.L21-L22.
8. Miller B. P. Interpretations from Helmholtz’ theorem in classical electromagnetism.// American J. Physics. – 1984, v. 52.-p.948-950.
9. Kobe D. H. Helmholtz’s theorem revisited.// American J. Physics. – 1986, v. 54.-p.552-554.
10. Rohrlich F. Causality, the Coulomb field, and Newton's law of gravitation.// American J. Physics. – 2002, v. 70.-p.411-414
11. Rohrlich F. The validity of the Helmholtz theorem.// American J. Physics. – 2004, v. 72.-p.412-413.
12. R.I. Khrapko. Violation of the gauge equivalence. - <http://arXiv.org/abs/physics/0105031> (11.12.2001)
13. Р.И. Храпко. Силовые трубки и биповерхности в электромагнетизме http://www.mai.ru/projects/mai_works/articles/num4/article7/author.htm (18.05.2001)
14. Brill O. L., Goodman B. Causality in the Coulomb Gauge.// American J. Physics. – 1967, v. 35.- p.832-837.
15. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. – М.: Наука, 1965.-456 с.