

УДК 537.87+621.37

## Решение задачи рассеяния на протяженных цилиндрических телах различного сечения

Гиголо А. И.<sup>\*</sup>, Кузнецов Г. Ю.<sup>\*\*</sup>

*Московский авиационный институт (научно-исследовательский университет), МАИ,  
Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993. Россия*

*<sup>\*</sup>e-mail: gigolo\_ai@mail.ru*

*<sup>\*\*</sup>e-mail: gregz92@yandex.ru*

### Аннотация

В работе рассмотрено решение задачи рассеяния на протяженных цилиндрических металлических телах различного сечения. Результатом решения задачи является определение пространственно-временных выборок рассеянного телами электромагнитного поля, которые, в свою очередь, могут использоваться при восстановлении геометрических и электрофизических параметров в обратных задачах электродинамики, например, в таких приложениях как подповерхностная радиолокация, а также для определения эффективной площади рассеяния (ЭПР) объектов.

**Ключевые слова:** рассеянное поле, дифракция, пространственно-временные выборки, метод конечных разностей во временной области (КРВО), численное моделирование, диаграмма рассеяния

### Аналитическое решение задачи рассеяния

Задача рассеяния может быть решена аналитически только для ограниченного числа объектов правильной формы, таких как бесконечно протяженный металлический или диэлектрический цилиндр круглого сечения, сфера [1]. Для тел произвольной формы строгого аналитического решения не существует.

В данной работе рассматривается двумерный случай задачи дифракции, когда падение электромагнитной волны  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$  происходит на достаточно протяженный объект (бесконечный в направлении  $z$ , рисунок 1), которым может быть диэлектрическое или металлическое (идеально проводящее) тело. Внутри объектов появляется внутреннее поле дифракции  $\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+$ , снаружи – внешнее поле дифракции  $\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-$ , также называемое полем

рассеяния. Чтобы решить дифракционную задачу, необходимо найти внутреннее и внешнее поля при заданной падающей волне. Также решение должно удовлетворять граничным условиям на поверхности тела, т.е. чтобы решения уравнений Максвелла удовлетворяли условиям непрерывности касательных компонент поля, а также условию излучения:

$$[\dot{\mathbf{E}}_m^0 + \dot{\mathbf{E}}_m^-, \mathbf{v}_0] = [\dot{\mathbf{E}}_m^-, \mathbf{v}_0],$$

$$[\dot{\mathbf{H}}_m^0 + \dot{\mathbf{H}}_m^-, \mathbf{v}_0] = [\dot{\mathbf{H}}_m^+, \mathbf{v}_0],$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{F}}_m}{\partial r} + ik \dot{\mathbf{F}}_m \right) = 0,$$

где  $\dot{\mathbf{E}}_m^0$  ( $\dot{\mathbf{H}}_m^0$ ) – вектор комплексной амплитуды напряженности электрического (магнитного) поля падающей волны,  $\dot{\mathbf{E}}_m^-$  ( $\dot{\mathbf{H}}_m^-$ ) – вектор комплексной амплитуды напряженности электрического (магнитного) поля отраженной волны,  $\dot{\mathbf{E}}_m^+$  ( $\dot{\mathbf{H}}_m^+$ ) – вектор комплексной амплитуды напряженности электрического (магнитного) поля внутри тела,  $\mathbf{v}_0$  – вектор нормали к поверхности тела,  $r$  – расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения,  $\dot{\mathbf{F}}_m$  – вектор комплексной амплитуды напряженности (электрического или магнитного) рассеянного поля.

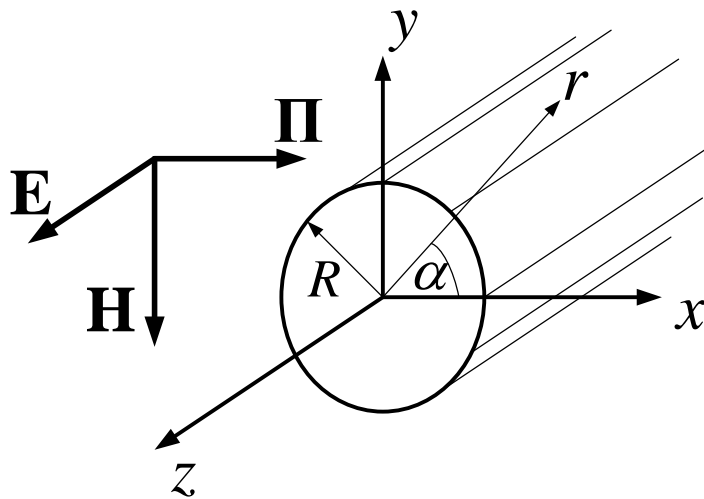


Рисунок 1. К постановке задачи рассеяния.

Первым модельным объектом исследований являлся идеально проводящий бесконечный цилиндр радиуса  $R$ , для которого внутреннее поле дифракции отсутствует, а условия непрерывности касательных компонент записываются следующим образом:

$$[\dot{\mathbf{E}}_m^0 + \dot{\mathbf{E}}_m^-, \mathbf{v}_0] = 0,$$

$$\left[ \dot{\mathbf{H}}_m^0 + \dot{\mathbf{H}}_m^-, \mathbf{v}_0 \right] = \dot{\eta}_m,$$

где  $\dot{\eta}_m$  – комплексная амплитуда тока на поверхности цилиндра.

Поляризация падающей электромагнитной волны выбиралась параллельной оси цилиндра (параллельная поляризация), т.е. вектор напряженности электрического поля был ориентирован вдоль оси цилиндра по оси  $z$  (см. рис.1).

В этом случае комплексную амплитуду каждой составляющей электромагнитного поля можно записать как:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^0 &= \mathbf{z}_0 \dot{A} \exp(-ik_1 x) \\ \dot{\mathbf{H}}_m^0 &= -\mathbf{y}_0 \frac{\dot{A}}{W_1} \exp(-ik_1 x), \end{aligned}$$

где  $k_1 = 2\pi/\lambda$  – волновое число падающей волны в свободном пространстве,  $\dot{A}$  – комплексная амплитуда напряженности электрического поля падающей волны,  $W_1$  – волновое сопротивление свободного пространства.

Чтобы решить поставленную задачу, требуется найти внутреннее и внешнее поле дифракции:  $\mathbf{E}^+$ ,  $\mathbf{H}^+$ ,  $\mathbf{E}^-$ ,  $\mathbf{H}^-$ .

Уравнения Максвелла для обеих сред приводят к уравнениям Гельмгольца. Важным является факт, что ожидаемое решение в двумерном случае не зависит от координаты  $z$  [1]:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_m + k_{1,2}^2 \dot{\mathbf{E}}_m &= 0 \\ \nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_m + k_{1,2}^2 \dot{\mathbf{H}}_m &= 0 \end{aligned}$$

Внешнее поле дифракции определяется бесконечным рядом с некоторыми неизвестными коэффициентами  $c_n$  [1]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^- &= \mathbf{z}_0 \dot{A} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-i)^n c_n H_n^{(2)}(k_2 r) \exp(in\alpha), \quad r > R, \\ \dot{\mathbf{H}}_m^- &= \frac{i\dot{A}}{\omega\mu_2\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-i)^n c_n \left[ \mathbf{r}_0 \frac{in}{r} H_n^{(2)}(k_1 r) - \alpha_0 k_1 H_n'^{(2)}(k_1 r) \right] \exp(in\alpha), \quad r > R, \end{aligned}$$

где  $H_n^{(2)}$ ,  $H_n'^{(2)}$  – функция Ханкеля 2-го рода  $n$ -го порядка и ее производная.

Для нахождения коэффициентов  $c_n$  необходимо использовать граничные условия:

$$\begin{aligned} \dot{E}_m^0 + \dot{E}_m^- &= \dot{E}_m^+ \\ \dot{H}_{m\alpha}^0 + \dot{H}_{m\alpha}^- &= \dot{H}_{m\alpha}^+, \quad \text{при } r = R. \end{aligned}$$

Подставляя имеющиеся выражения для электрического и магнитного полей в граничные условия и почленно приравнивая их, получаем:

$$-c_n H_n^{(2)}(k_1 R) = J_n(k_1 R).$$

Для идеально проводящего цилиндра находящегося в вакууме имеем:

$$c_n = -\frac{J_n(k_1 R)}{H_n^{(2)}(k_1 R)}.$$

Таким образом, комплексная амплитуда электрического рассеянного цилиндром поля равна

$$\dot{E}_m^- = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-i)^n \left( -\frac{J_n(k_1 R)}{H_n^{(2)}(k_1 R)} \right) H_n^{(2)}(k_1 R) \exp(in\alpha), r > R.$$

В дальней зоне напряженность магнитного поля связана с напряженностью электрического поля соотношением  $\dot{H}_m^- = \frac{\dot{E}_m^-}{W_1}$ .

В работе была оценена сходимость ряда для выражения рассеянного поля. На рис. 2 приведены графики зависимости коэффициентов  $c_n$  от  $n$  для разных значений  $k_1 R$ .

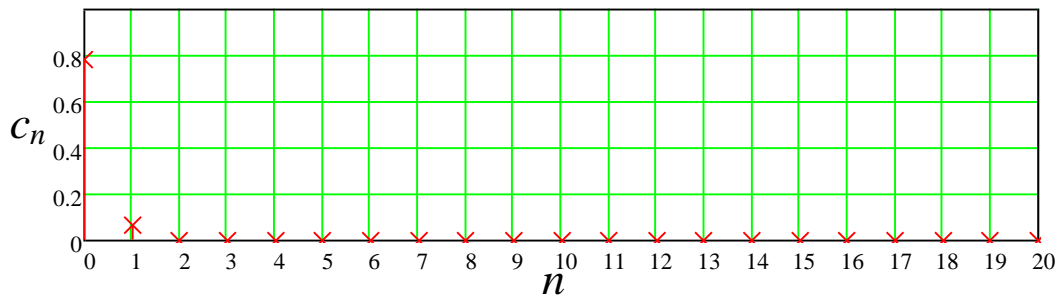


Рис. 2 а): Зависимость коэффициентов  $c_n$  от  $n$  для  $R/\lambda = 0,05$ .

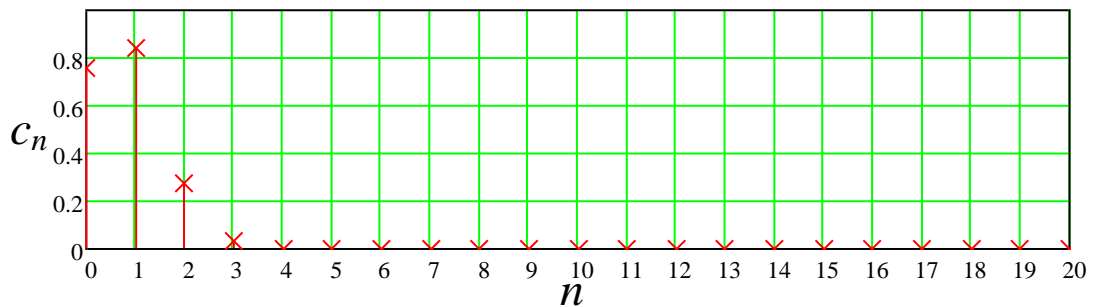


Рис. 2 б): Зависимость коэффициентов  $c_n$  от  $n$  для  $R/\lambda = 0,25$ .

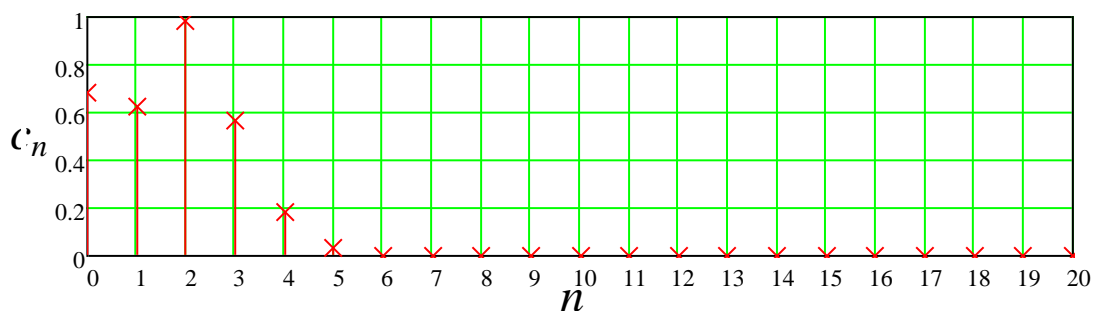


Рис. 2 а): Зависимость коэффициентов  $c_n$  от  $n$  для  $R/\lambda = 0,5$ .

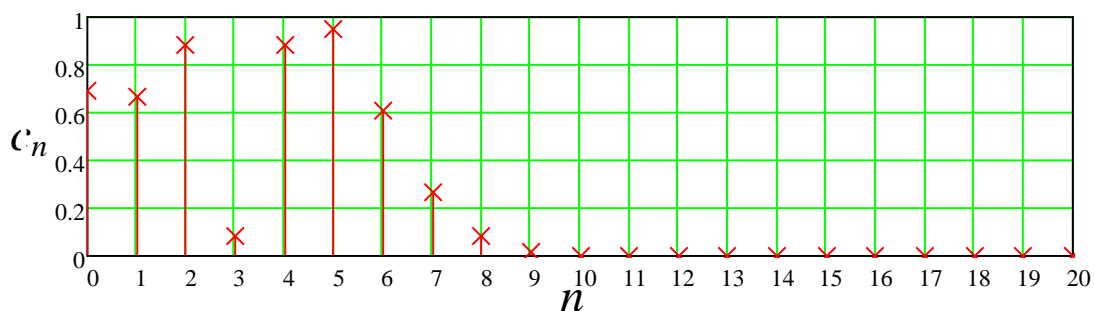


Рис. 2 б): Зависимость коэффициентов  $c_n$  от  $n$  для  $R/\lambda = 1$ .

Из графиков видно, что при увеличении относительного радиуса цилиндра (увеличении  $R/\lambda$ ) ряд сходится медленнее, и необходимо около  $2k_1R$  членов ряда для получения достаточной точности.

На рис. 3 построены нормированные к максимуму диаграммы рассеяния для различных значений  $R/\lambda$ , которые представляют собой нормированные к максимуму зависимости амплитуды напряженности электрического поля, рассеянного цилиндром, от угла наблюдения. Точка наблюдения расположена в дальней зоне, волна распространяется в направлении  $0^\circ$ .

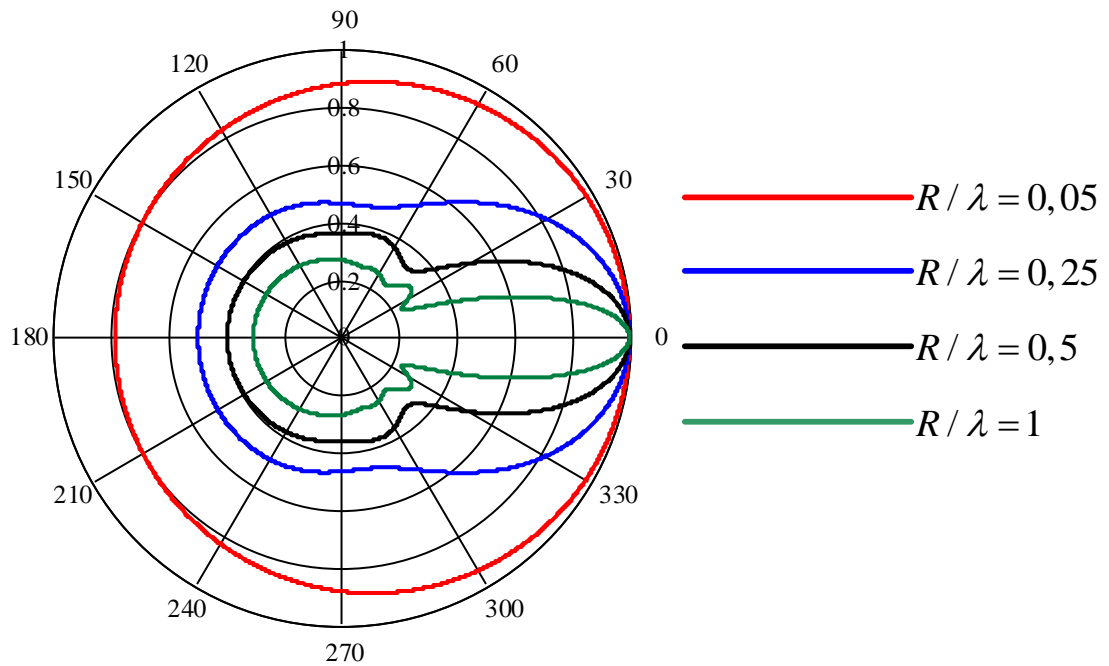


Рис 3. Диаграммы рассеяния идеально проводящего цилиндра для различных значений  $R/\lambda$ .

Из графиков можно видеть, что направление главного максимума рассеяния совпадает с направлением распространения падающей волны, при этом при увеличении электрического радиуса цилиндра главный максимум становится более ярко выраженным и сужается, а также появляются побочные максимумы рассеяния.

### **Численное решение задачи рассеяния методом конечных разностей во временной области**

Для решения задачи рассеяния на объектах с более сложным геометрическим профилем (например, цилиндр с квадратным или треугольным сечением) будем использовать метод конечных разностей во временной области (КРВО) [2,3]. Данный метод достаточно прост в реализации и может быть использован при решении самых разных задач электродинамики. С помощью преобразования Фурье из решения во временной области могут быть легко получены частотные характеристики модели. Также этот метод позволяет визуализировать распространение электромагнитных волн в структуре даже при сложных граничных условиях. При применении алгоритмов постобработки возможно получение информации о поле в дальней зоне по данным, полученным в ближней зоне.

Основой метода КРВО является дискретизация уравнений Максвелла в дифференциальной форме. Пространственные сетки для электрического и магнитного полей смещены по отношению друг к другу во времени и пространстве на половину шага

дискретизации по каждой из переменных. Конечно-разностные уравнения позволяют определить электрическое и магнитное поля в данный момент времени на основании известных значений полей в предыдущий момент времени, и при заданных начальных условиях вычислительная процедура разворачивает решение во времени от начала отсчета с заданным шагом.

Основная сложность в реализации данного метода заключается в учете граничных условий при переходе от моделируемой области к свободному пространству. Обычно эти граничные условия вводятся приближенно – либо на основе конечно-разностных формул, связывающих поля на границе моделируемой области, либо путем введения в модель слоев поглощающих материалов.

Тем не менее простота и универсальность метода КРВО требуют больших вычислительных мощностей. В данной работе данная проблема не существенна, поскольку задача двумерна и количество необходимых вычислений не критично для среднего персонального компьютера.

Численный алгоритм вычисления электромагнитного поля для двумерного случая может быть записан в виде [2]:

$$\begin{aligned} Hx_{i-1/2,j+1}^{t+1} &= Da|_{i-1/2,j+1} Hx_{i-1/2,j+1}^t + Db|_{i-1/2,j+1} [Ez_{i-1/2,j+1/2}^{t+1/2} - Ez_{i-1/2,j+3/2}^{t+1/2}] \\ Hy_{i,j+1/2}^{t+1} &= Da|_{i,j+1/2} Hy_{i,j+1/2}^t + Db|_{i,j+1/2} [Ez_{i+1/2,j+1/2}^{t+1/2} - Ez_{i-1/2,j+1/2}^{t+1/2}] \\ Ez_{i-1/2,j+1/2}^{t+1/2} &= Ca|_{i-1/2,j+1/2} Ez_{i-1/2,j+1/2}^{t-1/2} + \\ &Cb|_{i-1/2,j+1/2} [Hy_{i,j+1/2}^t - Hy_{i-1,j+1/2}^t + Hx_{i-1/2,j}^t - Hx_{i-1/2,j+1}^t] \end{aligned}$$

где  $Hx$ ,  $Hy$ ,  $Ez$  – проекции напряженностей магнитного и электрического поля на соответствующие оси,  $i, j, t$  – номера пространственно-временных шагов.  $Da, Db, Ca, Cb$  – коэффициенты обновления магнитного и электрического полей, определяемые как

$$\begin{aligned} Ca|_{i,j,k} &= \left(1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}\right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}\right), \\ Cb|_{i,j,k} &= \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k} \Delta}\right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}\right), \\ Da|_{i,j,k} &= \left(1 - \frac{\sigma_{i,j,k}^* \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}\right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k}^* \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}\right), \\ Db|_{i,j,k} &= \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k} \Delta}\right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k}^* \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}\right), \end{aligned}$$

где  $\sigma_{i,j,k}$ ,  $\mu_{ijk}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  – проводимость, магнитная и диэлектрическая проницаемости среды в точке  $i, j, k$  пространственно-временной сетки,  $\Delta$  – шаг дискретизации по пространству,  $\Delta t$  – шаг дискретизации по времени.

Для двумерного случая метод КРВО реализован в программе «Максвелл +» [4], с помощью которой были получены результаты численного решения задачи рассеяния.

### Результаты численного моделирования

Проведем сравнение результатов расчета рассеянного поля методом КРВО с аналитическим решением. На рис. 4 приведены диаграммы рассеяния для цилиндров различного электрического радиуса, полученные аналитически (сплошная линия) и с помощью метода КРВО (пунктир). Направление распространения падающей волны такое же, как и на предыдущем графике.

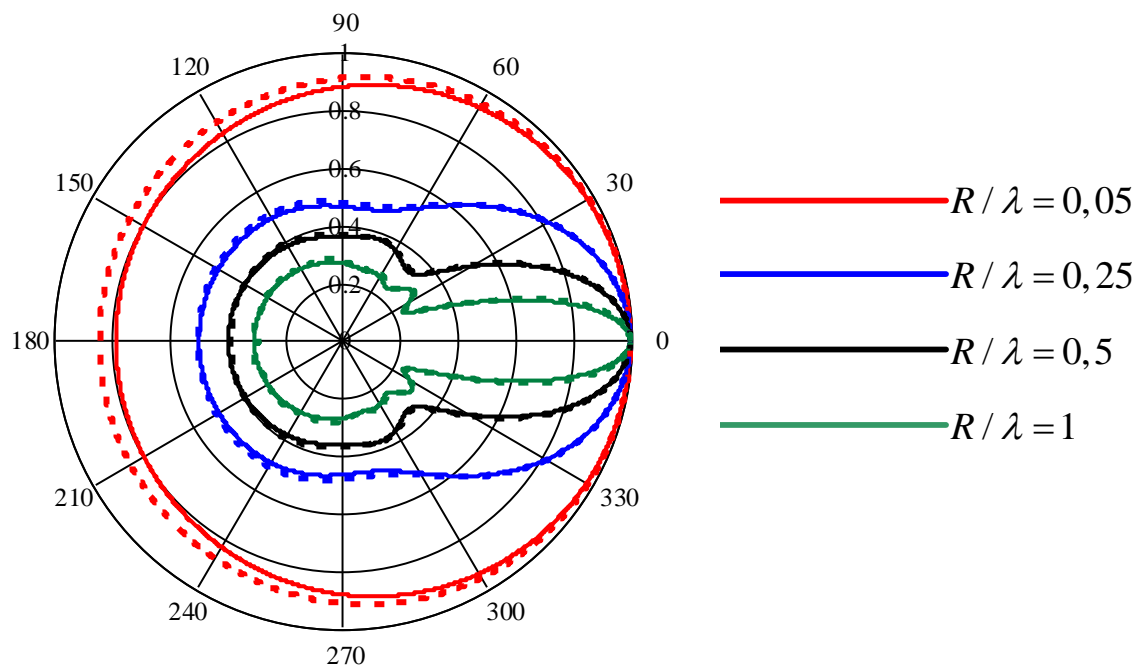


Рис. 4. Диаграммы рассеяния идеально проводящего цилиндра для различных значений  $R/\lambda$ , полученные различными способами (сплошная линия – аналитическое решение, пунктир – методом КРВО).



Видно, что различия между аналитическим и численным решением довольно малы. На рис. 5 приведен график зависимости относительной ошибки вычисления рассеянного поля методом КРВО ( $\frac{|E_m^- - E_{mКРВО}^-|}{|E_m^-|}$ ) от угла рассеяния:

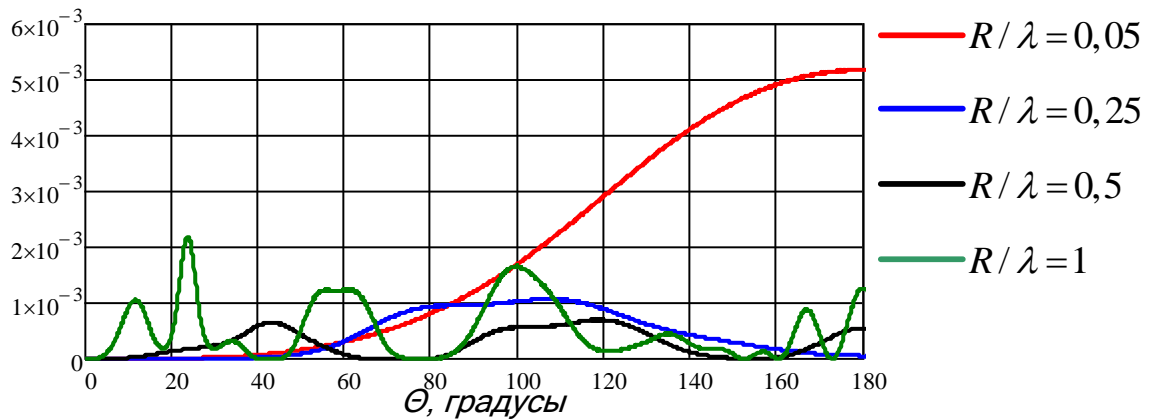


Рис. 5. Относительная ошибка вычисления рассеянного поля методом КРВО.

Из этого графика видно, что разница между численным и аналитическим решением не превышает 0,6%, что позволяет использовать метод КРВО для дальнейших расчетов рассеянного поля.

На рисунках 6–9 приведены диаграммы рассеяния для протяженных тел, имеющих в сечении треугольник и квадрат при различной ориентации относительно направления падающей волны. В терминологии данной задачи рассматриваются бесконечно протяженные цилиндры произвольного сечения. В случае треугольного или квадратного сечения рассматриваемое тело можно назвать треугольной или квадратной бесконечной призмой.

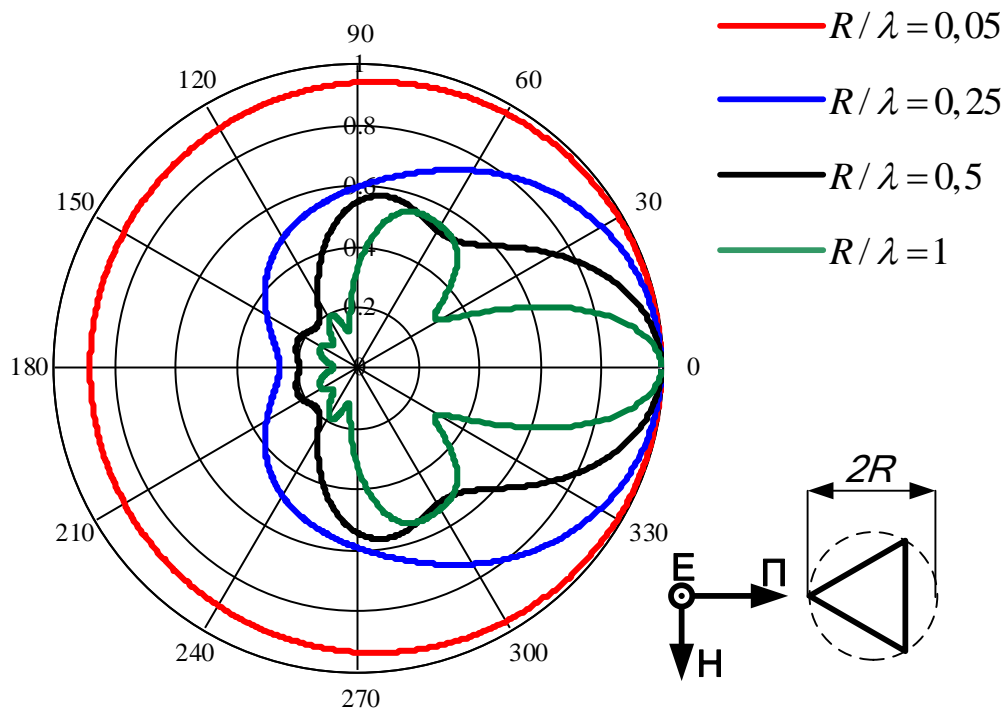


Рис. 6. Диаграммы рассеяния идеально проводящего цилиндра треугольного сечения при падении волны на ребро для различных значений  $R/\lambda$ , полученные методом КРВО.

Максимум рассеяния по-прежнему направлен в ту же сторону, что и направление распространения падающей волны. Основное отличие диаграммы рассеяния данного цилиндра треугольного сечения от круглого цилиндра заключается в сильном уменьшении уровня обратного отражения примерно в 3 раза (для  $R/\lambda = 1$ ).

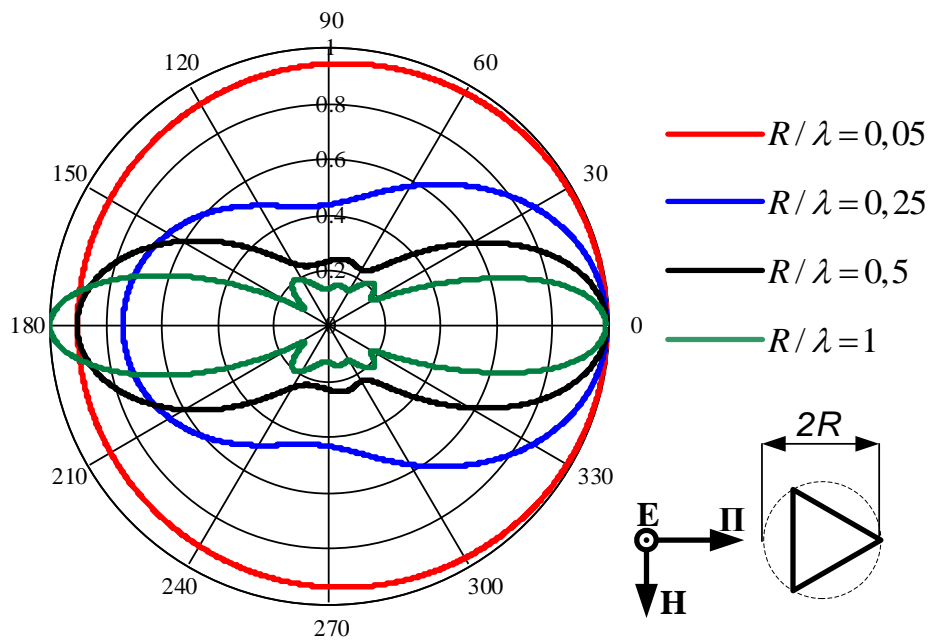


Рисунок 7. Диаграммы рассеяния идеально проводящего цилиндра треугольного сечения при падении волны на грань для различных значений  $R/\lambda$ , полученные методом КРВО.

Из диаграмм видно, что чем больше электрические размеры цилиндра, тем более ярко выражено отражение в обратную сторону. Для больших значений  $R/\lambda$  резко падает уровень бокового излучения по сравнению со случаем падения волны на ребро цилиндра треугольного сечения или на круглый цилиндр.

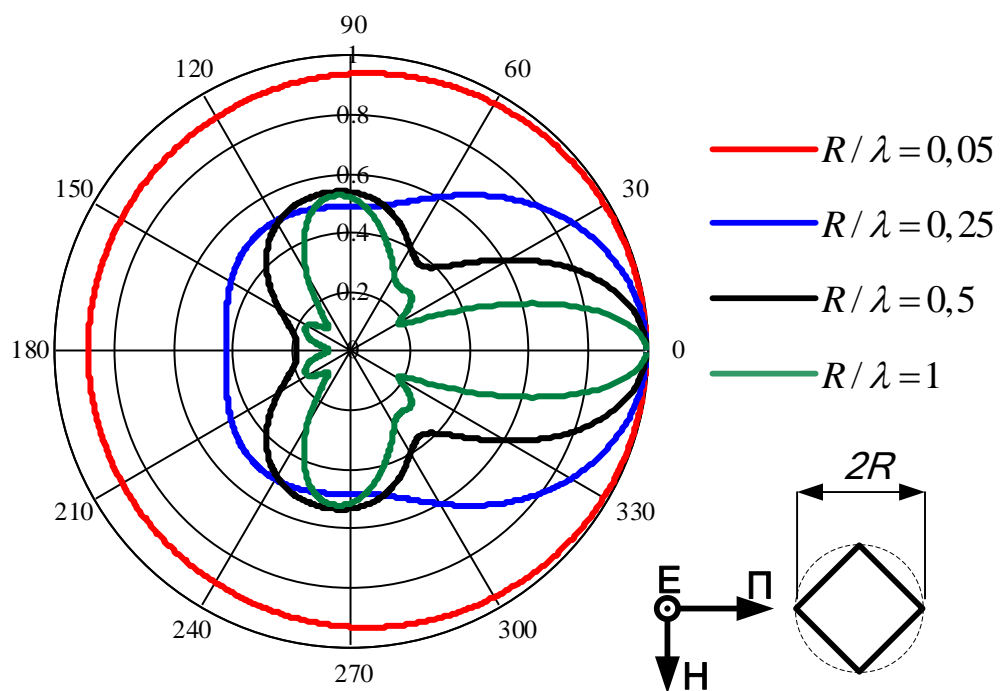


Рисунок 8. Диаграммы рассеяния идеально проводящего цилиндра квадратного сечения при падении волны на ребро для различных значений  $R/\lambda$ , полученные методом КРВО.

В этом случае, уровень обратного рассеяния заметно снижен по сравнению с круглым цилиндром, появляются побочные максимумы в направлении, перпендикулярном падающей волне.

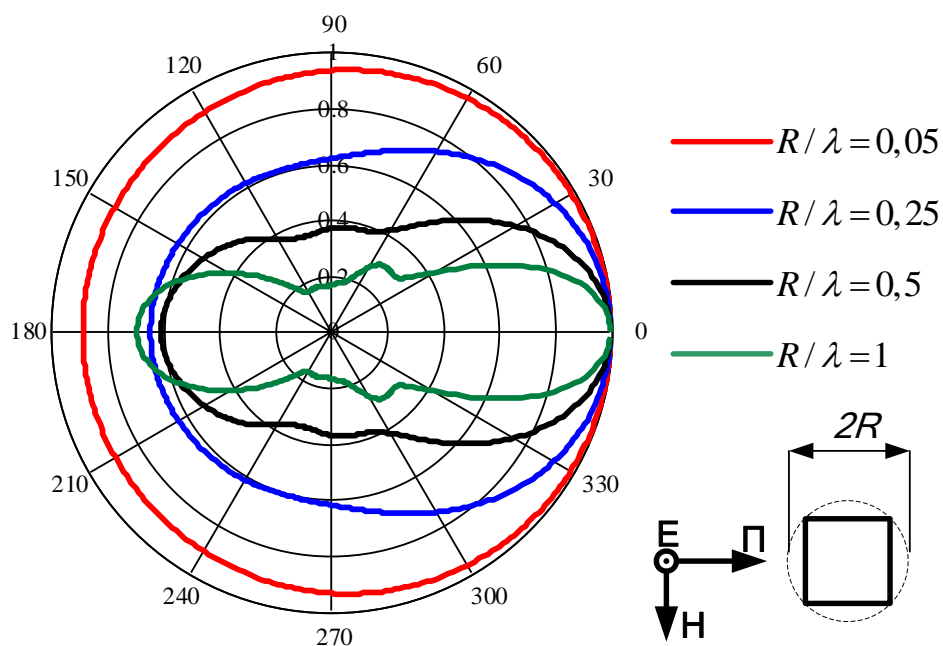


Рисунок 9. Диаграммы рассеяния идеально проводящего цилиндра квадратного сечения при падении волны на грань для различных значений  $R/\lambda$ , полученные методом КРВО.

В данном случае можно отметить, что уровень обратного отражения ниже, чем в аналогичном случае с цилиндром треугольного сечения, т.к. площадь грани квадратной призмы меньше площади грани треугольной.

### Заключение

В работе рассмотрено решение задачи рассеяния на протяженных цилиндрических металлических телах различного сечения для случая параллельной поляризации падающей электромагнитной волны. Результатом решения задачи стало определение пространственно-временных выборок рассеянного телами электромагнитного поля, которые, в свою очередь, в дальнейшем могут быть использованы при восстановлении геометрических и электрофизических параметров в обратных задачах электродинамики, например, в таких приложениях как подповерхностная радиолокация, а также для определения эффективной площади рассеяния (ЭПР) различных объектов.

В связи с тем, что аналитическое решение существует только для ограниченного числа объектов правильной формы, для определения рассеянного поля в работе был использован численный метод конечных разностей во временной области (КРВО). Проведено сравнение точности аналитического и численного решения на примере цилиндра

круглого сечения и показана целесообразность использования метода КРВО для решения поставленной задачи.

В работе был проведен ряд численных экспериментов, проведенных с цилиндрами различного сечения (квадратного, треугольного), при их различной ориентации относительно направления падающей волны и электрических размеров ( $0,05 < R/\lambda < 1$ , где  $R$  – поперечный размер цилиндра,  $\lambda$  – длина волны), позволил сделать выводы относительно некоторых закономерностей, возникающих при рассеянии. Так, например, направление главного максимума рассеяния в указанном диапазоне длин волн совпадает с направлением падения плоской волны (прямое рассеяние) и составляет порядка 3-7 дБ. Если грань цилиндра, сечение которого представляет собой многоугольник (треугольник или квадрат), расположена перпендикулярно направлению падения волны, возникает существенное обратное рассеяние: для цилиндра квадратного сечения – порядка 5 дБ с и соизмеримое с прямым рассеянием для цилиндра треугольного сечения – 4 дБ. В случае, когда волна падает на угол цилиндра, обратное рассеяние ослабевает и достигает своего минимума (порядка -20 дБ), при этом появляются рассеяния в направлении смежных углов – для цилиндра квадратного сечения порядка 2 дБ в направлении перпендикулярном направлению падения волны и порядка 1 дБ под углом 60 градусов к направлению падения волны для цилиндра треугольного сечения.

Данная работа была выполнена в рамках гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК – 3384.2012.8).

### **Библиографический список:**

1. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. Учебное пособие. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
2. Tavlov A., Hagness S. C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. – Boston, London, Artech House, 2000.
3. Гринев А.Ю. Численные методы решения прикладных задач электродинамики. Учебное пособие. – М.: Радиотехника, 2012. – 336с.
4. Гринев А.Ю., Гиголо А.И. Численное моделирование распространения электромагнитных волн в однородных средах. Учебное пособие. – М.: Вузовская книга, 2012 г. – 84 с.