

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Старченко Александр Евгеньевич

**Траектории многовитковых перелётов космических аппаратов
с минимальной радиационной нагрузкой**

Специальность 05.07.09 —

«Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов»

Диссертация

на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор технических наук, член-корреспондент РАН

Петухов Вячеслав Георгиевич

Москва — 2019

Оглавление

Введение	3
1 Методический подход к оптимизации многовитковых перелётов КА	16
1.1 Математическая модель движения КА с ЭРДУ	16
1.2 Оптимальное движение КА	19
1.3 Метод осреднения	23
1.4 Краевая задача	24
1.5 Метод продолжения по параметру	25
1.6 Случай околосферического движения КА	28
2 Оценка воздействия космической радиации на бортовые системы КА	33
2.1 Расчёт поглощенной дозы радиации	33
2.2 Расчёт эквивалентного флюенса электронов 1 МэВ	41
2.3 Расчёт относительной мощности СБ	47
3 Траектории выведения на ГСО с минимальной радиационной нагрузкой	52
3.1 Оптимизация многовитковых перелётов межорбитального буксира с ЯЭРДУ	52
3.1.1 Минимизация дозы в случае околосферического движения	53
3.1.2 Оптимальное быстроедействие с фиксированной дозой	59
3.2 Оптимизация траектории выведения КА с солнечной ЭРДУ	70
3.2.1 Минимизация эквивалентного флюенса для кремниевых ФЭП	71
3.2.2 Максимизация мощности трехкаскадных ФЭП на конец САС	82
Заключение	97
Список сокращений и условных обозначений	99
Список литературы	102

Введение

Идея использования электрической энергии для приведения в движение ракет и космических аппаратов (КА) появилась в начале XX столетия и активно стала развиваться на заре практической космонавтики, в 1960-х годах. У истоков этой идеи и первых её реализаций стояли известные ученые и деятели такие как К. Э. Циолковский, Р. Х. Годдард, Г. Ю. Оберт, В. П. Глушко, Ю. В. Кондратюк и другие. Преимущество использования электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) по сравнению с химическими ракетными двигателями состоит в существенно более высоком удельном импульсе и, следовательно, меньшем расходе топлива для набора той же характеристической скорости. Но при этом характерной чертой, присущей ЭРДУ, является существенно меньшая величина тяги по сравнению остальными типами ракетных двигателей. Эти факторы определили основную область применения ЭРДУ — транспортные операции КА на орбитальном участке движения.

Возможность существенно увеличить массу доставляемой полезной нагрузки долгие годы привлекает внимание разработчиков КА к использованию ЭРДУ в транспортных операциях. В первую очередь предполагалось использовать ЭРДУ для управления угловым движением, приведения КА на целевую орбиту и поддержания этой орбиты. Первым КА, на котором удалось успешно применить ЭРДУ в космосе является советская автоматическая межпланетная станция «Зонд-2» [1] (1964–1965), для управления движением вокруг центра масс которой применялись импульсные плазменные двигатели. В последующие годы было запущено множество КА, использующих ЭРДУ для управления угловым движением и коррекции орбиты. Среди них можно отметить советский метеорологический КА «Метеор 1-10» (запущен 29 декабря 1971), на котором впервые были запущены и испытаны в полёте стационарные плазменные двигатели [2] (СПД), использовавшиеся для коррекции орбиты. Также можно отметить серию отечественных ретрансляционных спутников «Поток» (1982–2000 гг.), функционировавших на геостационарной орбите (ГСО), на которых впервые были применены СПД для коррекции дрейфа по долготе, а также российский геостационарный КА «Галс-1» (запущен в 1994), на котором впервые использовались СПД для коррекции дрейфа не только по долготе, но и по широте [1]. Другой

яркий пример использования ЭРДУ для коррекции орбиты — миссия GOCE (2009–2013) европейского космического агентства, в которой для поддержания низкой орбиты высотой ~ 250 км использовалась ЭРДУ. При этом для поддержания параметров рабочей орбиты была необходима практически непрерывная работа ЭРДУ в течении всей миссии. В качестве примера использования ЭРДУ для межорбитальных перелётов с ЭРДУ на относительно небольших высотах можно привести группировку из 60 спутников Starlink (запущены 24 мая 2019) для обеспечения глобального покрытия сети интернет. На каждом из спутников массой 227 кг установлена маршевая ЭРДУ, которая должна поднять высоту орбиты с 440 км до 550 км [3].

Другой привлекательной для применения ЭРДУ областью являются межпланетные перелёты КА, требующие больших затрат характеристической скорости для выполнения целевой задачи. Следовательно, для межпланетных перелётов эффект от увеличения удельного импульса при применении ЭРДУ вместо химических ракетных двигателей будет большой. Первой миссией, использующей ЭРДУ в качестве маршевой двигательной установки, была Deep Space 1 (1998–2001), в рамках которой был совершен последовательный пролет астероида и двух комет. Также в качестве примеров использования ЭРДУ в межпланетных миссиях можно привести миссию Hayabusa (2003–2007) по доставке образцов грунта с астероида Итокава, миссию Dawn (2007–2018), в рамках которой КА совершил перелёт к астероидам Веста и Церера, и миссию SMART-1 (2003–2006), в которой КА совершил многоразовый перелёт с геопереходной орбиты на окололунную орбиту с помощью ЭРДУ. Кроме того, ЭРДУ используется в миссии BepiColombo (запущена 20 октября 2018) по комплексному изучению Меркурия, которая прибудет к целевой планете в 2025 году [4].

Наконец, ещё одной важной областью применения ЭРДУ являются выведение КА на ГСО. Применение ЭРДУ в этой транспортной операции в последнее время привлекает большое внимание коммерческих фирм, предоставляющих услуги связи. Поскольку при выведении связного КА на ГСО с применением ЭРДУ либо при фиксированной стартовой массе КА можно доставить на ГСО бóльшую полезную массу, либо снизить стартовую массу КА и тем самым снизить затраты на выведение КА на орбиту за счёт использования ракеты-носителя (РН) более лёгкого класса или привлечения попутной нагрузки. Бóльшая же масса полезной нагрузки на ГСО для операторов связи означает возможность развертывания большего количества приёмопередатчиков (транспондеров) и пропорциональное увеличение годовых доходов от предоставления услуг связи. Применение ЭРДУ совместно с химическими ракетными двигателями для выведения на ГСО началось в конце 1990-х годов [5, 6]. Первыми КА, для выведения на ГСО которых применялась ЭРДУ, были аппараты на платформе Boeing 702HP (HS-702), использовавшие электроракетные ионные двигатели XIPS 25 (Xenon Ion Propulsion System) как для конечного

этапа выведения на ГСО с практически экваториальной промежуточной орбиты с относительно небольшим эксцентриситетом (высота перигея ~ 33000 км, апогея ~ 38000 км), так и для поддержания целевой орбиты. Первым космическим аппаратом на данной платформе является связной аппарат Galaxy XI (запущен 22 декабря 1999). Среди отечественных аппаратов можно отметить КА «Экспресс-АМ5» (запущен 26 декабря 2013) и «Экспресс-АМ6» (21 октября 2014), при выведении которых на ГСО использовалась ЭРДУ. Также существуют примеры нештатного выведения на ГСО с помощью ЭРДУ. При выведении КА Artemis (2001–2017) в результате отказа верхней ступени РН Ariane 5 бортовая ЭРДУ, предназначенная изначально для поддержания точки стояния на ГСО, использовалась для перелёта с экваториальной круговой орбиты высотой ~ 31000 км на геостационарную. При выведении на ГСО военного спутника США «АЕНФ SV-1» в 2010 году апогейная гидразиновая двигательная установка отказала, и КА оказался на высокоэллиптической орбите (высота перигея — 260 км, апогея — 57400 км). Благодаря применению вспомогательной гидразиновой двигательной установки и ЭРДУ через 14 месяцев всё же удалось вывести КА на целевую орбиту [7]. Со временем доля участия ЭРДУ при выведении на ГСО увеличивалась и, наконец, появились КА с ЭРДУ без апогейной химической двигательной установки. Первыми из них были КА на платформе Boeing 702SP, использовавшие для выведения на ГСО с промежуточной высокоэллиптической орбиты, на которую их выводила РН, только ЭРДУ на основе ионных двигателей XIPS 25. В частности, 2 марта 2015 года были запущены одним пуском первые два КА на базе данной платформы — ABS-3A и Eutelsat 115 West B. Третьим аппаратом из этой серии был SES 15, запущенный 18 мая 2017. Количество КА, выводимых на ГСО с использованием ЭРДУ, в настоящее время возрастает большими темпами. Одними из последних запущенных КА данного типа являются КА на платформе Eurostar-3000EOR: Eutelsat 172B (запущен 1 июня 2017), SES 14/GOLD (25 января 2018), SES 12 (4 июня 2018), а также на платформе SSL-1300 all electric: Eutelsat 7C (20 июня 2019).

Таким образом, приведенные выше примеры использования ЭРДУ показывают, что тематика применения электроракетной тяги в космических транспортных операциях, в частности при выведении КА на ГСО, в настоящее время является актуальной, также, как и различные научно-технические исследования, связанные с этой темой. Важной областью данных исследований является проблема проектирования траекторий перелётов КА с ЭРДУ. В отличие от методов проектирования траекторий КА с химическими ракетными двигательными установками в данной области неприменимо импульсное приближение [8–10], и необходим учёт действия тяги не в конечном числе точек, а на протяжении всего времени работы ЭРДУ, сравнимого с продолжительностью всего перелёта. Методы проектирования траекторий перелётов КА с ЭРДУ развивались с 1960-х годов и выделились по сути в отдельную область знания. Кроме вопро-

сов поиска терминальных программ управления тягой ЭРДУ для достижения определённых орбит [11] важной задачей в этой области является задача оптимизации траекторий перелётов с ЭРДУ. Традиционно оптимизируется либо время перелёта, либо величина конечной массы КА.

Условно все методы оптимизации траекторий можно разделить на две большие группы: прямые и непрямые. В прямых методах, в которых не используются необходимые и достаточные условия оптимальности, производится дискретизация траектории перелёта по времени и/или множества допустимых управлений (метод транскрипции и коллокации [12–14], метод псевдоимпульсов [15]), и задача оптимизации сводится к задачам математического программирования с высокой размерностью вектора искомых параметров [16]. Получаемые задачи математического программирования решаются численно, с помощью широкого спектра методов, начиная от квазиньютоновских методов, методов последовательного квадратичного программирования, методов внутренней точки и заканчивая методами генетического программирования, роя частиц и другими.

В непрямых методах используются необходимые и иногда достаточные условия оптимальности траекторий в различных формах. Часто в качестве необходимых условий оптимальности используется принцип максимума Л. С. Понтрягина [17], в результате применения которого возникает краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получаемая краевая задача решается различными методами, включая метод стрельбы [18, 19], метод квазилинеаризации, метод Ньютона-Рафсона и его модификации, метод продолжения по параметру [20–23], метод минимизации взвешенной суммы квадратов невязок на правом конце. Также для повышения численной устойчивости методов решения краевой задачи принципа максимума и снижения её вычислительной сложности в случае многовитковых перелётов может применяться метод осреднения движения [22, 24]. Также к группе непрямых методов можно отнести методы линеаризации вокруг опорной орбиты («метод транспортирующей траектории» и его аналоги), в которых задача оптимизации для полученной линейной системы решается с помощью принципа максимума [25].

Также стоит отметить, что существует класс гибридных методов [26, 27] оптимизации траекторий перелётов КА с ЭРДУ, которые сочетают в себе черты прямых и непрямых методов. В гибридных методах необходимые условия оптимальности используются для параметризации управления с помощью сопряженных переменных и затем, в отличие от непрямых методов, решается задача математического программирования с прямой оптимизацией целевого функционала. Среди неизвестных параметров в таком случае будут краевые значения сопряженных переменных.

При проектно-баллистическом анализе многовитковых перелётов КА на ГСО важным является вопрос учёта и парирования воздействия космической радиации на бортовые системы. Одной из проблем, возникающих во время электроракетной фазы выведения КА на ГСО, является накопление радиационных повреждений в фотоэлектрических преобразователях (ФЭП) солнечных батарей (СБ). Радиационные повреждения ФЭП приводят к существенной деградации его основных характеристик [28–30], в том числе и к снижению выходной электрической мощности, необходимой для функционирования бортовых систем, включая ЭРДУ во время этапа выведения на целевую орбиту. Ситуация осложняется неблагоприятными радиационными условиями на ГСО и длительными сроками активного существования (САС) на целевой орбите, характерными для связных КА, являющихся большинством среди выводимых на ГСО аппаратов. Все эти факторы приводят к необходимости учёта радиационной деградации электрической мощности СБ при проектировании КА. Для парирования падения мощности СБ и получения гарантированной выходной мощности на конец САС необходимо при проектировании либо закладывать избыточную мощность СБ, что приводит к увеличению площади СБ, либо увеличивать толщину защитного стекла СБ. Оба варианта приводят к увеличению массы системы электропитания, усложнению конструкции и повышению стоимости КА.

Другая группа проблем, возникающая при длительном пребывании КА в околоземном пространстве это накопление бортовой электроникой большой дозы ионизирующего излучения, приводящей к интегральным эффектам деградации характеристик электронной компонентной базы бортовой аппаратуры (БА). В частности, большая поглощенная доза радиации приводит к накоплению заряда в диэлектрических слоях структур «металл-окисел-полупроводник» (МОП) и комплементарных МОП-структур (КМОП), присутствующих в широко используемых в БА полевых транзисторах. Излишний заряд в диэлектрическом слое приводит к изменению порогового напряжения открытия транзистора, увеличению тока утечки в закрытом состоянии, образованию паразитных токов между различными компонентами на одном кристалле микросхемы, содержащей МОП- и КМОП-структуры [31]. В конечном счёте при определённой накопленной дозе радиации входной ток микросхемы из-за утечек возрастает настолько, что в некоторой точке цепи питания может возникнуть перегрев и выход из строя микросхемы или всего прибора, в котором используется микросхема. Также может происходить накопление большого статического заряда в диэлектрических частях корпусов приборов и корпуса КА в целом. Большой накопленный статический заряд при разряде на проводящие части или в плазму собственной атмосферы КА может вывести из строя жизненно важные электронные системы КА, отказ которых в конечном счёте может привести к снижению САС или даже потере КА в целом.

Следует отметить, что проблема накопления больших доз космической радиации при выведении на ГСО актуальна не только для КА с солнечной электроракетной двигательной установкой (СЭРДУ), но и для класса так называемых многоразовых электроракетных буксиров (МЭРБ) с ядерной электроракетной двигательной установкой (ЯЭРДУ). Проекты по разработке КА такого класса и отдельных технологий для них появляются с самого начала эры практической космонавтики, с 1960-х годов [32]. Одним из назначений МЭРБ может быть многократная доставка тяжелых грузов на ГСО с низких орбит с помощью ЭРДУ и бортовой ядерной энергетической установки (ЯЭУ). При этом, соответственно, радиационная нагрузка на БА увеличивается в количество раз, равное числу рейсов между низкой орбитой и ГСО, что делает вопросы защиты БА от космической радиации ещё более актуальным для МЭРБ.

Для парирования воздействия космической радиации необходимо знать состав и пространственно-энергетическое распределение частиц, воздействующих на системы КА. Околоземное пространство насыщено заряженными частицами субатомного размера различного типа и энергии. На сегодняшний день известен ряд источников заряженных частиц в околоземном пространстве, основными среди которых являются следующие:

- галактические космические лучи (ГКЛ),
- солнечные космические лучи (СКЛ),
- радиационные пояса Земли (РПЗ).

Основным источником космической радиации вне магнитосферы Земли являются ГКЛ и СКЛ. Галактические космические лучи — это поток заряженных релятивистских частиц, начиная от протонов и ядер гелия и заканчивая ядрами тяжелых элементов вплоть до урана. Диапазон энергий частиц ГКЛ очень широк — от 10^9 эВ до $\sim 3 \cdot 10^{20}$ эВ [30, 33]. Частицы ГКЛ прибывают в околоземное пространство извне Солнечной системы, то есть имеют галактическое или даже внегалактическое происхождение [30, 33]. Солнечная компонента космических лучей, то есть СКЛ, является потоком энергичных электронов, протонов и ионов химических элементов, прибывших от Солнца во время различных происходящих на нём событий. Поэтому величины потоков и спектр частиц СКЛ имеют случайный характер в зависимости от типа событий, происходящих на Солнце. Энергии частиц СКЛ заключены в интервале от 10^4 эВ до 10^9 эВ [30, 33]. Проникновению частиц ГКЛ и СКЛ на низкие орбиты препятствует магнитное поле Земли, но, тем не менее, эти частицы также могут оказывать существенное влияние на бортовые системы КА, находящиеся и внутри магнитосферы.

Но всё же основным фактором космической радиации, влияющим на работу БА внутри магнитосферы, являются частицы радиационных поясов Земли, то есть захваченные геомагнитным полем электроны, протоны и ионы различных атомов. Основными источниками частиц РПЗ являются: постоянный (в отличие от СКЛ) поток низкоэнергетических частиц приходящих от Солнца, называемый солнечным ветром, ионизированные частицы из верхней атмосферы Земли, а также частицы вторичной радиации, возникающие при взаимодействии ГКЛ и СКЛ с нейтральными атомами верхних слоёв атмосферы. Энергия захваченных протонов составляет от 100 кэВ до ~ 600 МэВ, электронов — от 10 кэВ до 40 МэВ [30, 34, 35]. Распределение захваченных протонов и электронов РПЗ в околоземном пространстве изучено довольно хорошо [30, 31, 33]. Условно в околоземном пространстве выделяют два основных радиационных пояса — внутренний и внешний. Внутренний пояс, состоящий из электронов, протонов и ионов, имеет максимальные значения потоков частиц на высоте порядка 3000 км. Внешний пояс в основном состоит из электронов и имеет максимум потока частиц на высоте 15000–20000 км. Геометрически радиационные пояса Земли представляют собой два коаксиальных тороида, ось тороидов отклонена от оси вращения Земли примерно на 10° [36] в связи с тем, что вектор магнитного момента внутренних токов не совпадает осью вращения Земли.

Для повышения радиационной стойкости бортовых систем и КА в целом часто используется целый ряд методов [31], которые условно можно назвать проектными. Среди них прежде всего метод выбора более радиационно-стойкой элементной базы. Стоимость компонентов такой элементной базы (категории «space», «military»), как правило, очень высока, и часто из-за различных организационных проблем эти компоненты доступны в ограниченном количестве или не доступны совсем. Также среди проектных методов известен метод отбраковки компонентов элементной базы по критерию радиационной стойкости, который состоит в проведении дополнительных радиационных испытаний более дешёвых компонент категорий «industrial» и «commercial» и отбора среди них наиболее радиостойких с возможным последующим «отжигом» (термической обработкой для восстановления параметров после облучения радиацией). Этот метод зачастую дешевле метода выбора более радиостойких компонентов, но тоже требует много времени и больших финансовых затрат на радиационные испытания. Также существует класс алгоритмических методов защиты от воздействия космической радиации, которые состоят в применении различных схем резервирования: дублирование, троирование, мажоритарное резервирование, в том числе с «холодным» резервом и циклической сменой «горячих» и «холодных» каналов. Ещё одной важной группой методов радиационной защиты БА являются конструкционные методы [37–39], использующие ослабляющие свойства материалов конструкции КА для снижения радиационной нагрузки на чувствительные компоненты бортовых систем. К конструкционным методам

относятся: метод утолщения стенок, метод перекомпоновки, в котором более уязвимые приборы помещаются вглубь КА, за более радиостойкими приборами, метод вторичного корпусирования, в котором наиболее уязвимые компоненты БА помещаются в дополнительный корпус из материалов с высокими поглощающими свойствами. По сравнению с утолщением стенок элементов конструкции КА, как правило, вторичное корпусирование приводит к существенно меньшему увеличению массы КА. Также для защиты БА от воздействия тяжелых заряженных частиц, способных при проникновении в компоненты элементной базы вызвать переключение логического состояния или даже пробой диэлектрического слоя, используется ряд схемотехнических и системотехнических методов [31]. В целом все проектные методы защиты БА от космической радиации приводят к усложнению конструкции, увеличению массы и стоимости КА.

Степень разработанности темы исследования. Существует ряд методов защиты БА от космической радиации, принципиально отличающихся от проектных, которые будем условно называть баллистическими. Разработке методов, принадлежащей данной группе, как раз и посвящена данная работа. В основе баллистических методов снижения радиационной нагрузки лежит тот факт, что потоки частиц РПЗ распределены неоднородно в околоземном пространстве и образуют некоторую сложную структуру. Таким образом, суммарное количество частиц, упавших на единицу площади поверхности КА за время выведения на ГСО зависит не только от продолжительности выведения, но и от того как траектория перелёта расположена в околоземном пространстве. Следовательно, варьируя траекторию можно подобрать вариант выведения на ГСО с минимальной радиационной нагрузкой на БА. Литература по данным методам появилась в начале 1980-х годов. Большинство работ рассматривали задачу минимизации времени комбинированного перелёта с помощью разгонного блока (РБ) и ЭРДУ или максимизации конечной массы КА. При этом либо учитывалась деградация в РПЗ доступной для ЭРДУ мощности СБ [40–48], либо ограничивалось время пребывания КА в РПЗ [49], либо ограничивался максимальный уровень деградации СБ [50]. Также известен ряд работ [51–56], в которых оценивалась радиационное воздействие на КА на рассматриваемом множестве траекторий и описывалась связь между значениями целевых функционалов и радиационной нагрузкой. Радиационная нагрузка напрямую в качестве целевого функционала долгое время не рассматривалась. Лишь в последнее время появились работы [55, 57–59], в которых появилась постановка задачи на минимум радиационного воздействия на бортовые системы КА. При этом в указанных работах для решения этих задач используются в основном только прямые методы оптимизации траекторий КА с ЭРДУ. В работах [55, 57] приведен пример использования принципа максимума для решения задачи на минимум суммарного количества поглощенных КА частиц РПЗ, но полученная

краевая задача не решена. Вместо этого применен метод коллокаций для прямой оптимизации суммарного количества частиц РПЗ, поглощенных КА.

Следует отметить, что работ по оптимизации траекторий КА с ЭРДУ, где в качестве целевого функционала используется величина радиационного воздействия на бортовые системы КА, мало. Ещё меньше работ, где для решения этой задачи используются непрямые методы оптимизации. Не изучены до конца пределы возможности снижения радиационного воздействия на БА путём вариации траектории, в частности нет достаточно точных оценок снизу величин минимального возможного радиационного воздействия на БА при выведении КА на ГСО. Решение задачи оптимизации траектории выведения КА с ЭРДУ в подобной постановке помимо того, что само по себе имеет интерес, позволило бы оценить возможности снижения радиационного воздействия на БА с помощью варьирования траектории выведения и предоставить, в случае необходимости, способ расчёта траекторий с пониженной радиационной нагрузкой при проектно-баллистическом анализе космических миссий. Поэтому данная работа посвящена применению непрямых методов для решения задач оптимизации траектории выведения КА на ГСО с целевым функционалом — величиной радиационного воздействия на бортовые системы КА. В работе исследуются возможности снижения поглощенной дозы радиации и величины радиационной деградации мощности СБ при вариации траектории выведения КА на ГСО при помощи РБ и ЭРДУ.

Таким образом, актуальность темы исследования данной работы обусловлена следующими факторами:

- возрастающим интересом к использованию ЭРДУ в транспортных операциях в космосе, в частности при выведении КА на ГСО;
- высокой чувствительностью некоторых компонентов бортовой электроники КА к космической радиации в околоземном пространстве;
- высокой стоимостью радиационно-стойкой элементной базы, необходимой для разработки бортовой аппаратуры КА, выводимых с помощью ЭРДУ на ГСО по многовитковым траекториям, пересекающим радиационные пояса Земли;
- снижением массы полезной нагрузки КА при использовании методов утолщения стенок и вторичного корпусирования для защиты бортовой аппаратуры;
- необходимостью разработки эффективных методов защиты бортовой аппаратуры КА от воздействия космической радиации, в том числе и методов оптимизации траекторий

многовитковых перелётов КА с ЭРДУ с целью снижения радиационной нагрузки на бортовые системы;

- недостаточностью разработанности теории и методов оптимизации траекторий многовитковых перелётов КА с ЭРДУ с целью снижения радиационной нагрузки на бортовые системы.

Целью диссертационной работы является исследование возможностей снижения радиационной нагрузки на бортовые системы КА при выведении на геостационарную орбиту с использованием ЭРДУ путём оптимизации траектории многовиткового перелёта. Для достижения поставленной цели в работе были поставлены и решены следующие задачи.

Задачи диссертационной работы:

1. разработка методики оптимизации траекторий многовитковых перелётов КА с ЭРДУ с целью снижения воздействия космической радиации на бортовые системы на основе непрямых методов;
2. разработка методики сглаживания радиационных функционалов для применения при численной оптимизации траекторий перелётов КА с ЭРДУ непрямыми методами;
3. исследование с помощью разработанной методики возможностей снижения поглощенной дозы радиации при оптимизации траекторий перелёта КА с ядерной энергетической установкой и ЭРДУ с низкой круговой орбиты на ГСО;
4. исследование с помощью разработанной методики возможностей снижения радиационной деградации мощности СБ при оптимизации траекторий перелёта КА с солнечной ЭРДУ с геопереходной орбиты на ГСО.

Объектом исследования в данной работе являются траектории многовитковых межорбитальных перелётов КА с ЭРДУ, в частности, траектории перелёта на геостационарную орбиту.

Предметом исследования данной работы является математические модели движения КА с ЭРДУ с минимальной радиационной нагрузкой на бортовые системы.

Методология и методы исследования. В работе используются расчётно-теоретические методы исследования. В качестве основного метода решения задач оптимизации траекторий межорбитальных перелётов КА с ЭРДУ используется принцип максимума Л. С. Понтрягина [17]. Для численного решения краевых задач, возникающих из принципа максимума, в работе используется метод продолжения по параметру [20, 22, 23], метод Левенберга-Марквардта [60, 61] и модифицированный метод Ньютона. Для повышения численной устойчивости применяемых

методов решения краевых задач принципа максимума в работе применяется метод осреднения [22, 24]. Численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений движения КА с ЭРДУ проводилось методом Дорманда-Принса 7(8) порядка [62, 63] (алгоритм DOP853 из [62]), неявным методом Рунге-Кутты 5-го порядка (алгоритм RADAU5 из [64]), многошаговым методом Адамса-Башфорта-Мультона переменного порядка (функция ode113 в среде MATLAB [65, 66]).

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в разработке эффективной методики расчёта траекторий выведения КА на ГСО с использованием ЭРДУ с радиационной нагрузкой на бортовую аппаратуру меньшей, чем на траекториях оптимального быстрогодействия. При использовании разработанной методики в задачах снижения поглощенной дозы и радиационной деградации мощности СБ были получены новые качественные результаты. Разработанная методика весьма универсальна и позволяет рассмотреть различные типы радиационных нагрузок на КА, различные типы ЭРДУ и источников электроэнергии, а также практически произвольные начальные и конечные орбиты многовиткового перелёта. Разработанный комплекс программ, реализующий данную методику, может быть использован при проектировании межорбитальных перелётов КА с ЭРДУ.

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность обеспечивается строгой математической постановкой задач, использованием обоснованных фундаментальных подходов к решению оптимизационных задач, таких как принцип максимума Понтрягина и метод продолжения по параметру. Численные результаты подвергались неоднократной прямой проверке. Многие результаты, полученные в диссертации, сравнивались с результатами, опубликованными другими авторами.

Научная новизна работы состоит в:

1. разработке нового подхода к решению задач оптимизации траекторий многовитковых перелётов КА с ЭРДУ с целью снижения радиационной нагрузки на бортовые системы на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина;
2. разработке методики осреднения радиационных функционалов по круговым орбитам и построения их гладких аппроксимаций с помощью сплайнов высокого порядка;
3. обнаружении эффекта немонотонного изменения максимального эксцентриситета при снижении конечной дозы радиации в задаче перелёта КА с ядерной энергетической установкой и ЭРДУ с низкой круговой орбиты на ГСО;

4. постановке и решении задачи на максимум относительной мощности СБ на конец САС КА.

Все результаты, представленные в работе, получены лично автором. Основные результаты по теме диссертации изложены в 35 печатных изданиях [67–101], 5 из которых опубликованы в научных журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК [67–71], 28 — в тезисах докладов на конференциях. Статьи [69, 70] переведены на английский язык и опубликованы в журнале Cosmic Research [72, 73], входящем в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- семинаре механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Механика космического полета им. В. А. Егорова», Москва, декабрь 2014, май 2016;
- семинаре кафедры 601 «Космические системы и ракетостроение» МАИ, Москва, июнь 2019;
- 36-ой международной конференции по электроракетным двигателям (IEPC-2019), Вена, Австрия, сентябрь 2019;
- XII всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, август 2019;
- академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых-пионеров освоения космического пространства. Москва, январь, ежегодно с 2013 по 2016;
- международной конференции «Авиация и космонавтика», Москва, МАИ, ноябрь, ежегодно с 2012 по 2016;
- научной конференции МФТИ, секция аэрофизика и космические исследования, Королёв, осень, ежегодно с 2011 по 2017;
- научно-технической конференции молодых учёных и специалистов РКК «Энергия» им. С. П. Королёва», Королёв, ноябрь 2011, ноябрь 2014;

Основные положения, выносимые на защиту:

1. формулировка и обобщенная методика решения задач оптимизации траекторий многовитковых межорбитальных перелётов КА с ЭРДУ с помощью принципа максимума

Л. С. Понтрягина с целью снижения воздействия космической радиации на бортовые системы;

2. методика осреднения по круговым орбитам и построения гладких аппроксимаций мощности поглощенной дозы и эквивалентного потока электронов 1 МэВ с помощью сплайнов высокого порядка;
3. результаты анализа полученных оптимальных решений задачи минимизации поглощенной дозой радиации при многовитковом перелёте КА с ядерной энергетической установкой и ЭРДУ с низкой круговой орбиты на ГСО;
4. результаты анализа полученных оптимальных решений задачи максимизации остаточной мощности СБ при многовитковом перелёте КА с солнечной ЭРДУ с геопереходной орбиты на ГСО.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, а также списка литературы. Полный объем диссертации составляет 114 страниц, включая 42 рисунка и 4 таблицы. Список литературы содержит 135 наименований.

Глава 1

Методический подход к оптимизации многовитковых перелётов КА

В разделах 1.1–1.5 приводится методический подход, обобщающий изложенные автором в работах [68–72] методики решения различных задач по снижению радиационной нагрузки на КА при перелётах с помощью ЭРДУ в околоземном пространстве. Раздел 1.6 содержит опубликованное автором в работе [67] описание упрощенного подхода к снижению поглощенной дозы для случая околосреднего движения КА.

1.1 Математическая модель движения КА с ЭРДУ

Будем рассматривать движение космического аппарата (КА) по орбите предполагая, что его центр масс движется только под действием силы притяжения Земли и силы тяги ЭРДУ. При этом будем считать, что ограничений на ориентацию вектора тяги не накладывается, и вектор тяги может разворачиваться с неограниченной угловой скоростью. Расходами рабочего тела и электроэнергии на ориентацию вектора тяги ЭРДУ будем пренебрегать.

Описание движения центра масс КА будем проводить с помощью уравнений движения в оскулирующих элементах [22, 102–104]. Будем использовать равноденственные орбитальные элементы, которые позволяют избежать особенностей в окрестности нулевых эксцентриситета и наклона. Связь равноденственных с кеплеровыми орбитальными элементами задаётся

следующими уравнениями

$$\begin{aligned}
 h &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \\
 e_x &= e \cos(\Omega + \omega), \\
 e_y &= e \sin(\Omega + \omega), \\
 i_x &= \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega, \\
 i_y &= \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega, \\
 F &= \nu + \Omega + \omega,
 \end{aligned}$$

где p — фокальный параметр орбиты КА, e — эксцентриситет, Ω — долгота восходящего узла, ω — аргумент перицентра, i — наклонение орбиты, ν — истинная аномалия, F — истинная долгота и $\mu = 3.98600436 \times 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ — гравитационный параметр Земли.

Введем орбитальную систему координат $OXYZ$ следующим образом. Начало координат O расположено в центре масс КА. Радиальная ось OX направлена из начала координат O в радиальном направлении, от Земли, бинормальная ось OZ сонаправлена с вектором орбитального кинетического момента КА. Трансверсальная ось OY лежит в плоскости оскулирующей орбиты, перпендикулярна оси OX и направлена в сторону движения КА по орбите. Пусть a_X , a_Y , a_Z — проекции на оси орбитальной системы координат вектора суммы управляющего и возмущающего ускорений, действующих на КА на орбите.

Перейдем к безразмерным переменным. Единицей измерения длины будем считать величину большой полуоси a_0 начальной орбиты КА, единицей измерения скорости — величину $\sqrt{\mu/a_0}$, единицей измерения массы будет масса КА на начальной орбите. Далее, если не оговорено иного, все величины и уравнения будем считать записанными в безразмерном виде.

Тогда уравнения движения КА на орбите в равноденственных элементах запишутся следующим образом [22, 102–104]:

$$\frac{dh}{dt} = a_Y \frac{h^2}{\xi}, \quad (1.1)$$

$$\frac{de_x}{dt} = \frac{h}{\xi} \left\{ a_X \xi \sin F + a_Y [(\xi + 1) \cos F + e_x] - a_Z e_y \eta \right\}, \quad (1.2)$$

$$\frac{de_y}{dt} = \frac{h}{\xi} \left\{ -a_X \xi \cos F + a_Y [(\xi + 1) \sin F + e_y] + a_Z e_x \eta \right\}, \quad (1.3)$$

$$\frac{di_x}{dt} = a_Z \frac{h}{\xi} \frac{\tilde{\varphi}}{2} \cos F, \quad (1.4)$$

$$\frac{di_y}{dt} = a_Z \frac{h}{\xi} \frac{\tilde{\varphi}}{2} \sin F, \quad (1.5)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\xi^2}{h^3} + a_Z \frac{h}{\xi} \eta, \quad (1.6)$$

где введены обозначения

$$\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F, \quad \tilde{\varphi} = 1 + i_x^2 + i_y^2, \quad \eta = i_x \sin F - i_y \cos F$$

В разложении гравитационного потенциала притяжения Земли будем учитывать только главный член и вторую зональную гармонику. Другие возмущающие ускорения не рассматриваются. Максимальную величину тяги и удельный импульс ЭРДУ в течении всего перелёта будем считать постоянными.

Будем задавать направление вектора реактивного ускорения, создаваемого ЭРДУ, с помощью угла тангажа и угла рысканья. Углом тангажа ϑ будем называть угол между проекцией вектора тяги на плоскость OXY оскулирующей орбиты КА и трансверсальным направлением OX . Углом рысканья ψ будем называть угол между вектором тяги и плоскостью OXY оскулирующей орбиты КА. Тогда проекции вектора тяги ЭРДУ и возмущающего ускорения от второй зональной гармоники разложения гравитационного потенциала Земли [103, 104] на оси орбитальной системы координат будут иметь следующий вид:

$$a_X = \delta \frac{P}{m} \sin \vartheta \cos \psi - K g_r, \quad (1.7)$$

$$a_Y = \delta \frac{P}{m} \cos \vartheta \cos \psi - K g_\tau, \quad (1.8)$$

$$a_Z = \delta \frac{P}{m} \sin \psi - K g_n, \quad (1.9)$$

где δ — функция включения ЭРДУ (при $\delta = 1$ ЭРДУ включена, при $\delta = 0$ — выключена), P — максимальная тяга двигательной установки, m — текущая масса КА и введены следующие обозначения

$$K = \frac{6J_2 R_3^2 \xi^4}{\tilde{\varphi}^2 h^8}, \quad (1.10)$$

$$g_r = \frac{\tilde{\varphi}^2}{4} - 3\eta^2, \quad (1.11)$$

$$g_\tau = (i_x^2 - i_y^2) \sin 2F - 2i_x i_y \cos 2F, \quad (1.12)$$

$$g_n = \eta (2 - \tilde{\varphi}), \quad (1.13)$$

а также $J_2 = 1.08263 \times 10^{-3}$ — коэффициент второй зональной гармоники и $R_3 = 6378.14$ км — экваториальный радиус Земли. Для замыкания системы уравнений (1.1)–(1.13) необходимо добавить уравнение для массы КА, которое запишется следующим образом:

$$\frac{dm}{dt} = -\delta \frac{P}{w}, \quad (1.14)$$

где $w = I_{sp} g_0$ — скорость истечения рабочего тела ЭРДУ, $g_0 = 9.80665$ м/с² — стандартное значение ускорения свободного падения на поверхности Земли. При необходимости далее будем рас-

смаатривать уравнения движения КА без учёта несферичности Земли, тогда в уравнении (1.10) достаточно положить $J_2 = 0$.

1.2 Оптимальное движение КА

Для количественного описания воздействия космической радиации на бортовые системы КА на траектории перелёта введём некоторый критерий качества, который будем обобщенно обозначать Q_k . Для определённости будем считать, что меньшие значения Q_k более предпочтительны, и будем рассматривать задачу минимизации данного критерия качества. Для вычисления значений всех рассматриваемых в данной работе критериев качества необходимо рассмотреть некоторую дополнительную фазовую переменную $Q(t)$, которая удовлетворяет обобщенному дифференциальному уравнению следующего вида:

$$\frac{dQ}{dt} = f_Q(t, \vec{r}(t), Q(t)), \quad (1.15)$$

при этом $t \in [0; T]$, T — продолжительность перелёта и $Q(0) = Q_0$, Q_0 — заданная известная величина, f_Q — некоторая непрерывно дифференцируемая функция времени t , положения КА $\vec{r}(t)$ в околоземном пространстве на траектории перелёта и фазовой переменной $Q(t)$. Критерий качества тогда будет выражаться как $Q_k = Q(T)$.

При проектировании траекторий межорбитальных перелётов КА с ЭРДУ зачастую существуют ограничения на максимальную продолжительность перелёта, обусловленные, например, ресурсом ЭРДУ или другими факторами. Поэтому с практической точки зрения имеет смысл рассмотреть задачу минимизации критерия качества Q_k при фиксированном времени перелёта T . При этом будем варьировать программу управления тягой ЭРДУ при фиксированных начальных условиях движения КА таким образом, чтобы удовлетворить краевым условиям на правом конце. В результате будет изменяться и траектория перелёта, влияющая на величину радиационной нагрузки на бортовые системы КА. Решая данную задачу при различных длительностях перелёта T можно получить представление об эффективности и пределах возможностей предлагаемого метода снижения радиационной нагрузки на системы КА.

Заметим, что задачу минимизации Q_k при фиксированных различных длительностях перелёта T можно рассматривать как двухкритериальную задачу оптимизации с частными критериями качества T и Q_k . Для получения представления о возможных оптимальных решениях данной задачи необходимо найти её границу Парето [105, 106]. При этом, если предположить, что граница Парето в данной задаче непрерывна, то любая точка этой границы (T^*, Q^*) является решением бесконечного числа однокритериальных оптимизационных задач с дополнительным непрерыв-

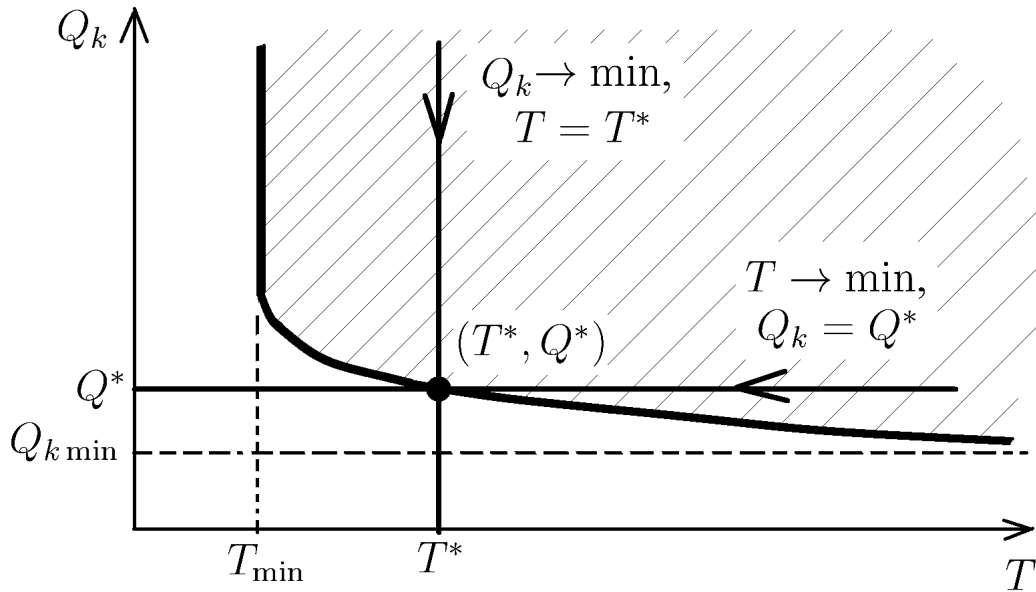


Рисунок 1.1 – Два способа расчёта точек множества Парето рассматриваемой задачи. Область допустимых решений задачи показана штриховкой.

ным ограничением вида $f_b(T, Q) = 0$, таким, что $f_b(T^*, Q^*) = 0$. В частности точка (T^*, Q^*) является решением следующих двух задач: $Q_k \rightarrow \min$ при $T = T^*$ и $T \rightarrow \min$ при $Q_k = Q^*$. Проиллюстрировать это утверждение можно Рисунком 1.1, где показана гипотетическая структура границы Парето и области допустимых решений данного типа двухкритериальных задач. Таким образом, для получения всех точек множества Парето достаточно решить одну из двух описанных выше однокритериальных задач при всех допустимых значениях констант T^* или Q^* . С методической точки зрения удобнее решать задачу оптимального быстрогодействия с ограничением на радиационную нагрузку, так как в качестве начального приближения для её решения можно взять решение задачи оптимального быстрогодействия без ограничений на радиационную нагрузку. Последняя задача достаточно хорошо изучена, и существуют методы практически гарантирующие её решение для широкого класса начальных и конечных орбит [22].

Поэтому далее рассмотрим серию задач оптимального быстрогодействия с дополнительной фазовой переменной $Q(t)$, удовлетворяющей уравнению (1.15), при фиксированном на конец перелёта значении радиационного функционала:

$$Q(T) = Q_T, \quad (1.16)$$

где в каждой задаче Q_T постоянно. Аналогично работе [22] воспользуемся принципом максимума Понтрягина [17] для получения оптимального в смысле времени перелёта управления системой (1.1)–(1.15). Функция Понтрягина для данной системы будет иметь вид:

$$H = -1 - \delta \frac{P}{w} p_m + \delta \frac{P h}{m \xi} (A_r \cos \vartheta \cos \psi + A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_n \sin \psi) + H_F + H_{J_2} + H_Q \quad (1.17)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
A_\tau &= hp_h + [(\xi + 1) \cos F + e_x] p_{ex} + [(\xi + 1) \sin F + e_y] p_{ey}, \\
A_r &= \xi (p_{ex} \sin F - p_{ey} \cos F), \\
A_n &= \eta (e_x p_{ey} - e_y p_{ex}) + \frac{\tilde{\varphi}}{2} (p_{ix} \cos F + p_{iy} \sin F) + \eta p_F \\
H_F &= p_F \frac{\xi^2}{h^3}, \quad H_Q = p_Q f_Q(t, \vec{r}(t), Q(t)), \quad H_{J_2} = -K \frac{h}{\xi} (\vec{g}, \vec{A}), \\
\vec{g} &= (g_\tau \quad g_r \quad g_n)^T, \quad \vec{A} = (A_\tau \quad A_r \quad A_n)^T,
\end{aligned}$$

и $p_h, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_F, p_m, p_Q$ — сопряженные переменные к $h, e_x, e_y, i_x, i_y, F, m$ и Q , соответственно. Знак T в верхнем индексе после вектора-строочки здесь и далее будет означать операцию транспонирования. Запись (\vec{g}, \vec{A}) означает скалярное произведение векторов \vec{g} и \vec{A} .

Найдем программу управления тягой ЭРДУ $\delta(t), \vartheta(t), \psi(t)$, удовлетворяющую условию максимума функции Понтрягина. Заметим, что выражение (1.17) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
H &= -1 - \delta \frac{P}{w} p_m + \delta P k(\vec{A}, \vec{u}) + H_F + H_{J_2} + H_Q, \\
k &= \frac{h}{m\xi}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \sin \psi & \sin \psi \end{pmatrix}^T,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

где \vec{u} — единичный вектор в направлении тяги ЭРДУ. Рассмотрим сначала случай, когда $A = \|\vec{A}\| = \sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2} > 0$. Тогда поскольку $\delta P k \geq 0$, максимальное значение функции H при фиксированных значениях всех переменных кроме \vec{u} будет достигаться, когда вектор тяги ЭРДУ сонаправлен с вектором \vec{A} , то есть когда $\vec{u} = \vec{A}/A$. Тогда выражение (1.18) примет вид:

$$H = -1 + \delta P \psi_s + H_F + H_{J_2} + H_Q, \tag{1.19}$$

где $\psi_s = kA - p_m/w$ — функция переключения. Покажем, что $\psi_s > 0$ и оптимальным значением функции включения ЭРДУ является $\delta = 1$ на всей траектории перелёта. Рассмотрим сопряженное к массе уравнение, используя в качестве функции Понтрягина выражение (1.19):

$$\frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m} = \delta \frac{P}{m^2} \frac{h}{\xi} A. \tag{1.20}$$

Поскольку $\delta \geq 0$ и величины P, m, h, ξ, A строго больше нуля, то из (1.20) следует, что $dp_m/dt \geq 0$, и функция $p_m(t)$ является возрастающей. Поскольку значение массы на правом конце не фиксируется в данной задаче, то $p_m(T) = 0$. Значение возрастающей функции на правом конце всегда будет её максимальным значением на всем перелёте, следовательно, $p_m(t) \leq 0, \forall t \in [0; T]$. Из этого факта, а также из неравенства $w > 0$ и определения функции переключения следует, что функция переключения $\psi_s(t) > 0, t \in [0; T]$. В таком случае функция включения ЭРДУ $\delta(t)$ на всем перелёте должна принимать своё максимальное значение, то есть $\delta \equiv 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $A = 0$. В таком случае функция Понтрягина имеет вид:

$$H = -1 - \delta \frac{P}{w} p_m + H_F + H_{J_2} + H_Q, \quad (1.21)$$

Видно, что программы управления углом тангажа и рысканья не входят в функцию Понтрягина, следовательно, ограничений на их значения нет, и любые их значения будут оптимальными. Из выражения (1.20) и условия трансверсальности на правом конце $p_m(T) = 0$ следует, что $p_m \equiv 0$. В этом случае функция Понтрягина вырождается до вида $H = -1 + H_F + H_{J_2} + H_Q$, куда не входит также и функция δ . Следовательно, при $A = 0$ оптимальным управлением является любое управление, в том числе и $\delta = 1$ и, например, $\vartheta = 0$, $\psi = 0$.

Таким образом, за исключением редких случаев, когда $A = 0$, для данной задачи управление, удовлетворяющее условию максимума функции Понтрягина, имеет следующий вид:

$$\delta \equiv 1, \quad (1.22)$$

$$\cos \vartheta = \frac{A_r}{\sqrt{A_r^2 + A_\tau^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{A_r}{\sqrt{A_r^2 + A_\tau^2}}, \quad (1.23)$$

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{A_r^2 + A_\tau^2}}{\sqrt{A_r^2 + A_\tau^2 + A_n^2}}, \quad \sin \psi = \frac{A_n}{\sqrt{A_r^2 + A_\tau^2 + A_n^2}}, \quad (1.24)$$

В таком случае можно исключить из рассмотрения уравнения для массы КА m и для сопряженной к ней переменной p_m , используя в уравнениях движения явную зависимость массы от времени $m = m_0 - (P/w)t$, где m_0 — начальная масса КА. Подставим выражения для оптимального управления (1.22)–(1.24) в функцию Понтрягина (1.17) и получим выражение для гамильтониана

$$H_{\text{opt}} = -1 + PkA + H_F + H_{J_2} + H_Q. \quad (1.25)$$

Тогда, если ввести векторные обозначения $\vec{x} = (h, e_x, e_y, i_x, i_y)^T$ и $\vec{p} = (p_h, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{i_x}, p_{i_y})^T$, уравнения оптимального движения запишутся в следующей форме:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = P \frac{k}{A} \left(A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial \vec{p}} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial \vec{p}} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial \vec{p}} \right) + \frac{\partial H_{J_2}}{\partial \vec{p}}, \quad (1.26)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial H_F}{\partial p_F} + Pk \frac{A_n}{A} \frac{\partial A_n}{\partial p_F}, \quad (1.27)$$

$$\frac{dQ}{dt} = f_Q, \quad (1.28)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -P \left[\frac{\partial k}{\partial \vec{x}} A + \frac{k}{A} \left(A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial \vec{x}} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial \vec{x}} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial \vec{x}} \right) \right] - \frac{\partial H_F}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial H_Q}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial H_{J_2}}{\partial \vec{x}}, \quad (1.29)$$

$$\frac{dp_F}{dt} = -P \left[\frac{\partial k}{\partial F} A + \frac{k}{A} \left(A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial F} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial F} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial F} \right) \right] - \frac{\partial H_F}{\partial F} - \frac{\partial H_Q}{\partial F} - \frac{\partial H_{J_2}}{\partial F}, \quad (1.30)$$

$$\frac{dp_Q}{dt} = -p_Q \frac{\partial f_Q}{\partial Q} \quad (1.31)$$

Как будет показано ниже к системе уравнений (1.26)–(1.31) применяется метод осреднения [22]. Для осредненной системы уравнений гамильтониан не будет зависеть от истинной долготы F , поэтому $p_F = const$. А поскольку из условий трансверсальности на правом конце $p_F(T) = 0$, то $p_F \equiv 0$ на всей траектории перелёта КА. В таком случае уравнение для p_F выпадает из рассмотрения. Также во всех случаях в данной работе удаётся получить решение уравнения (1.31) следующего вида:

$$p_Q(t) = p_Q(0) R_Q(Q(0), Q(t)), \quad (1.32)$$

где R_Q — некоторая явная бесконечно-дифференцируемая функция начального и текущего значений фазовой переменной Q . Подставляя выражение (1.32) в остальные уравнения оптимального движения (1.26)–(1.31) и гамильтониан (1.25), можно также исключить уравнение (1.31) и получить систему уравнений оптимального движения КА следующего вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = P \frac{k}{A} \left(A_r \frac{\partial A_r}{\partial \vec{p}} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial \vec{p}} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial \vec{p}} \right) + \frac{\partial H_{J2}}{\partial \vec{p}}, \quad (1.33)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\xi^2}{h^3} + Pk\eta \frac{A_n}{A}, \quad (1.34)$$

$$\frac{dQ}{dt} = f_Q, \quad (1.35)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -P \left[\frac{\partial k}{\partial \vec{x}} A + \frac{k}{A} \left(A_r \frac{\partial A_r}{\partial \vec{x}} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial \vec{x}} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial \vec{x}} \right) \right] - p_Q(0) R_Q \frac{\partial f_Q}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial H_{J2}}{\partial \vec{x}}, \quad (1.36)$$

Также упростится выражение для гамильтониана, который примет вид

$$H_{\text{opt}} = -1 + PkA + K \frac{h}{\xi} (\vec{g}, \vec{A}) + p_Q(0) R_Q f_Q, \quad (1.37)$$

1.3 Метод осреднения

Следует отметить, что система уравнений оптимального движения (1.33)–(1.36) содержит одну быструю переменную F , а все остальные переменные — медленные. Поэтому для повышения численной устойчивости и снижения вычислительной сложности краевой задачи принципа максимума [22] к системе (1.33)–(1.36) можно применить метод осреднения. Осреднение дифференциальных уравнений оптимального движения по времени за один виток проводится по следующей формуле:

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \frac{1}{T_c} \int_t^{t+T_c} \vec{f}_e(\vec{y}, F, s) ds = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{f}_e(\vec{y}, F, s) \frac{ds}{dF} dF, \quad (1.38)$$

где t — текущее время, T_c — оскулирующий период орбиты КА, $\vec{f}_e(\vec{y}, F, t)$ — правые части уравнений оптимального движения, $\vec{y} = (\vec{x}^T, Q, \vec{p}^T)^T$, $n = \mu^{-1} h^{-3} (1 - e_x^2 - e_y^2)^{3/2}$ — среднее движение

КА и $ds/dF \equiv dt/dF = h^3/\xi^2$. Следует отметить, что при дальнейшей работе с осредненными уравнениями оптимального движения уравнение для истинной долготы (1.34) исключалось из системы, поскольку правые части медленных уравнений после осреднения не зависят от истинной долготы F . И, напротив, как будет видно в следующих разделах, при необходимости интегрировать неосредненные уравнения движения уравнение для истинной долготы (1.34) вновь добавлялось в систему.

1.4 Краевая задача

Для удовлетворения условий принципа максимума необходимо решить краевую задачу для системы осредненных уравнений оптимального движения (1.33), (1.35), (1.36) со следующими краевыми условиями на левом и правом концах:

$$h(0) = h_0, e_x(0) = e_{x0}, e_y(0) = e_{y0}, i_x(0) = i_{x0}, i_y(0) = i_{y0}, Q(0) = Q_0, \quad (1.39)$$

$$h(T) = h_T, e_x(T) = 0, e_y(T) = 0, i_x(T) = 0, i_y(T) = 0, Q(T) = Q_T, \quad (1.40)$$

$$\bar{H}_{opt}(T) = 0, \quad (1.41)$$

где граничные равноденственные элементы выражаются через высоту геостационарной орбиты (ГСО) $h_{ГСО}$ и параметры промежуточной орбиты следующим образом:

$$\begin{aligned} h_0 &= \sqrt{\frac{a_0(1-e_0^2)}{\mu}}, & a_0 &= R_E + \frac{h_{\pi 0} + h_{\alpha 0}}{2}, & h_T &= \sqrt{\frac{R_E + h_{ГСО}}{\mu}} \\ e_0 &= \frac{h_{\alpha 0} - h_{\pi 0}}{h_{\pi 0} + h_{\alpha 0} + 2R_E}, & e_{x0} &= e_0 \cos(\Omega_0 + \omega_0), & e_{y0} &= e_0 \sin(\Omega_0 + \omega_0), \\ & & i_{x0} &= \operatorname{tg} \frac{i_0}{2} \cos \Omega_0, & i_{y0} &= \operatorname{tg} \frac{i_0}{2} \sin \Omega_0 \end{aligned}$$

и $R_E = 6371$ км — средний радиус Земли. При этом будем считать заданными высоту перигея $h_{\pi 0}$, высоту апогея $h_{\alpha 0}$, наклонение i_0 , аргумент перицентра ω_0 и долготу восходящего узла Ω_0 промежуточной орбиты. Начальное значение фазовой переменной Q_0 также будем считать известным. В (1.41) под величиной $\bar{H}_{opt}(T)$ имеется в виду выражение для гамильтониана (1.37), осредненное по схеме (1.38) на момент конца перелёта с помощью ЭРДУ. Условия из (1.40) и (1.41) содержат значения равноденственных элементов, дополнительной фазовой переменной Q и гамильтониана на правом конце. Для их расчёта необходимо проинтегрировать систему уравнений оптимального движения (1.33), (1.35), (1.36) на промежутке от $t = 0$ до $t = T$ с начальными значениями из (1.39) и применением схемы осреднения (1.38). Для этого необходимо знать время перелёта T и недостающие начальные значения сопряженных переменных $\vec{p}(0)$ и $p_Q(0)$, которые

запишем в виде вектора неизвестных параметров

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \vec{p}(0) \\ p_Q(0) \\ T \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Таким образом, для решения краевой задачи принципа максимума необходимо подобрать такие значения \vec{z} , что при интегрировании осредненной системы уравнений оптимального движения КА удовлетворились условия (1.39)– (1.41). Тогда краевая задача принципа максимума сводится к задаче решения нелинейной системы уравнений следующего вида:

$$\vec{f}(\vec{z}) = \begin{pmatrix} h(T) - h_T \\ e_x(T) \\ e_y(T) \\ i_x(T) \\ i_y(T) \\ Q(T) - Q_T \\ \bar{H}_{opt}(T) \end{pmatrix} = 0 \quad (1.43)$$

с неизвестными параметрами \vec{z} из (1.42).

1.5 Метод продолжения по параметру

Для решения нелинейных систем уравнений, возникающих из принципа максимума, в данной работе применяется метод продолжения решения по параметру. Используемый вариант этого метода подробно описан в работах [20, 22, 23]. Далее в этом разделе коротко описана суть данного метода.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений вида $\vec{f}(\vec{z}) = 0$. Пусть задано некоторое \vec{z}_0 , такое, что $\vec{f}(\vec{z}_0) = \vec{b}$. Тогда рассмотрим параметрическое семейство систем нелинейных уравнений, зависящее от скалярного параметра τ и имеющее вид:

$$\vec{F}(\vec{z}, \tau) = \vec{f}(\vec{z}) - (1 - \tau)\vec{b} = 0. \quad (1.44)$$

Начальное приближение \vec{z}_0 является решением системы уравнений (1.44) при $\tau = 0$ по построению: $\vec{F}(\vec{z}_0, 0) = 0$. Заметим, что исходная система уравнений содержится в семействе (1.44) при $\tau = 1$: $\vec{F}(\vec{z}, 1) = \vec{f}(\vec{z}) = 0$. Для нахождения семейства решений (1.44) $\vec{z} = \vec{z}(\tau)$, зависящего от τ , продифференцируем по параметру τ систему уравнений (1.44) и, разрешив полученную

систему относительно производной по параметру, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\vec{z}}{d\tau} = - \left[\frac{\partial \vec{f}(\vec{z}, \tau)}{\partial \vec{z}} \right]^{-1} \vec{b} \quad (1.45)$$

с начальными условиями

$$\vec{z}(0) = \vec{z}_0. \quad (1.46)$$

В некоторых случаях удобно ввести параметр продолжения в исходную нелинейную систему уравнений: $\vec{f}(\vec{z}, \tau) = 0$. В таком случае получаемая система дифференциальных уравнений примет вид

$$\frac{d\vec{z}}{d\tau} = - \left[\frac{\partial \vec{f}(\vec{z}, \tau)}{\partial \vec{z}} \right]^{-1} \left(\vec{b} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{z}, \tau)}{\partial \tau} \right) \quad (1.47)$$

Решая полученную систему дифференциальных уравнений каким-либо методом, получаем решение исходной системы нелинейных уравнений (1.43) как $\vec{z}^* = \vec{z}(1)$. Таким образом, решение исходной системы нелинейных уравнений сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.47), (1.46).

Следует отметить, что часто удобным выбором начального приближения \vec{z}_0 является решение задачи оптимального быстродействия, поскольку известны эффективные методы решения этой задачи [22]. Описанная выше задача оптимального быстродействия с дополнительным ограничением (1.16) на фазовую переменную Q содержит в себе задачу оптимального быстродействия. Для этого достаточно положить $Q_T = Q_{\min T}$, где $Q_{\min T}$ — значение критерия качества на траектории оптимального быстродействия, и $p_Q(0) = 0$. Поэтому в качестве начального приближения удобно использовать следующие значения

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \vec{p}^*(0) \\ 0 \\ T^* \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

где $\vec{p}^*(0)$ и T^* получены из решения задачи оптимального быстродействия для перелёта КА между промежуточной орбитой и ГСО.

Для вычисления невязок на правом конце траектории перелёта КА, входящих в (1.43), при численном интегрировании осредненной системы оптимального движения используется метод Дорманда-Принса 7(8) порядка [62, 63]. Осреднение правых частей уравнений оптимального движения проводилось согласно (1.38) с помощью метода трапеций на равномерной сетке из 128 точек. Для вычисления частных производных от функции \vec{f} по каждому из неизвестных параметров в (1.45), (1.47) используется метод конечных разностей первого порядка. При этом

возникает численная ошибка [62], связанная с тем, что при различных интегрированиях одной и той же системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА с близкими начальными условиями алгоритм автоматического выбора шага будет выбирать различные значения независимой переменной вдоль траектории. Рассматривались варианты с игнорированием этой ошибки и отдельным интегрированием систем уравнений оптимального движения и вариант с парированием этой ошибки путём одновременного интегрирования шести копий системы уравнений (1.33), (1.35), (1.36) с различными начальными условиями. Разрешение относительно производной по параметру продолжения τ в (1.47) производилось путём численного решения системы линейных уравнений методом гауссова исключения.

Поскольку наибольшая эффективность использования метода продолжения решения по параметру достигается при использовании методов численного интегрирования высокого порядка [22] для интегрирования (1.45), (1.47) также использовался метод Дорманда-Принса 7(8) порядка. Однако для ещё большего увеличения длины шага по параметру продолжения и для снижения количества отброшенных шагов в данной работе после каждого принятого шага запускалась процедура коррекции полученного значения вектора неизвестных параметров. Процедура коррекции состояла в решении при фиксированном τ^* следующей системы уравнений

$$\vec{f}(\vec{z}(\tau^*)) = (1 - \tau^*)\vec{b} \quad (1.49)$$

относительно вектора $\vec{z}(\tau^*)$. В качестве алгоритмов для решения нелинейной системы уравнений (1.49) рассматривались метод Ньютона и метод Левенберга-Марквардта [60, 61]. В качестве начального приближения неизвестного $\vec{z}(\tau^*)$ использовалось значение вектора неизвестных параметров, полученное после принятого шага численного интегрирования. Применение метода Левенберга-Марквардта выглядит более привлекательным поскольку при больших невязках возникающих при численном интегрировании (1.45), (1.47) позволяет за меньшее число итераций сойтись к решению (1.49) и повысить точность решения краевой задачи принципа максимума.

Кроме всего прочего для всех задач рассматриваемых в работе для проверки насколько отличается полученное управление от оптимального вследствие применения метода осреднения после каждого принятого шага и проведенной процедуры коррекции проводилось интегрирование неосредненных уравнений движения (1.33)–(1.36). При этом начальные значения сопряженных переменных и время перелёта брались из $\vec{z}(\tau^*)$, сопряженная переменная к истинной долготе полагалась равной нулю в течение всего перелёта $p_F(t) \equiv 0$, а начальное значение истинной долготы полагалось нулевым $F(0) = 0$. Численное интегрирование неосредненных траекторий оптимального движения также проводилось методом Дорманда-Принса 7(8) порядка. Разность невязок на конец перелёта на осредненной и неосредненной траекториях можно рассматривать

как показатель применимости метода осреднения в рассматриваемых задачах оптимизации траекторий перелёта КА. Также именно для полученных неосредненных траекторий рассчитывался критерий качества Q_k , значения которого приведены в главе 3 для всех рассматриваемых постановок задач.

Стоит отметить одну методическую сложность, связанную с выбором значения константы Q_T в (1.16). В предлагаемой методике это значение выбирается заведомо недостижимо малым (из физических соображений). При этом при некотором значении параметра продолжения $\tau = \tau_f$ происходит ожидаемый отказ метода продолжения по различным причинам (слишком большие и возрастающие невязки на правом конце, слишком малая минимальная высота перигея, максимальная высота апогея выше орбиты Луны или необратимость матрицы $\partial \vec{f} / \partial \vec{z}$). Прерывание интегрирования при $\tau = \tau_f$ может происходить не только из-за отсутствия решения краевой задачи, но и из-за несовершенства применённых численных методов. Но данная работа ограничивается использованием полученных при $\tau = \tau_f$ траекторий в качестве оценки максимального возможного снижения радиационной нагрузки на системы КА. Одним из возможных путей дальнейшего улучшения рассматриваемой методике является применение методов решения системы нелинейных уравнений (1.43), использующих наилучший параметр продолжения [20]. В методах данной группы в качестве параметра продолжения используется длина дуги кривой $\vec{z}(\tau)$, что позволяет справиться с ситуациями когда наблюдаются большая или даже бесконечная чувствительность производных $\partial \vec{f} / \partial \vec{z}$ к изменению значений вектора неизвестных параметров \vec{z} .

1.6 Случай околокругового движения КА

Отдельно рассмотрим методический подход к оптимизации радиационной нагрузки на КА во время перелётов на ГСО для случая околокругового движения КА по траектории перелёта [11, 107, 108]. В этом случае предполагается, что эксцентриситет оскулирующей орбиты близок к нулю на всей траектории перелёта. Для рассмотрения такого класса перелётов достаточно положить равной нулю радиальную составляющую тяги. В этом случае угол тангажа $\vartheta \equiv 0$ в течении всего перелёта, и направление вектора тяги будет задаваться только одним углом рысканья ψ . В качестве закона управления углом рысканья будем использовать релейный закон [11, 107]:

$$\psi = \psi_0 \operatorname{sign}(\cos u),$$

где $\psi_0 \in (-\pi; \pi]$ — амплитуда отклонений вектора тяги при релейном управлении, $u = \omega + \nu$ — текущее значение аргумента широты. Причина такого выбора управления состоит в простоте этого

закона и его близости к локально-оптимальной программе управления [107]. При этом считается, что ЭРДУ работает непрерывно в течение всего перелёта $\delta \equiv 1$. В этих предположениях осредненные уравнения движения КА согласно [11, 107] будут иметь вид:

$$\frac{da}{dv} = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cos \psi_0, \quad (1.50)$$

$$\frac{di}{dv} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sin \psi_0, \quad (1.51)$$

где a — текущая большая полуось орбиты, в качестве независимой переменной взята фактически затраченная характеристическая скорость $v = -I_{sp} \ln(1 - Pt/(I_{sp}m_0))$, t — время прошедшее от начала перелёта. Долгота восходящего узла при релейном управлении остаётся постоянной и равной начальному значению. Поэтому далее будем считать, что $\Omega(t) \equiv 0$.

При рассмотрении случая околокругового движения КА будем считать, что дополнительная фазовая переменная $Q(t)$ описывается в отличие от (1.15) упрощённым уравнением

$$\frac{dQ}{dt} = f_Q(a(t), i(t)). \quad (1.52)$$

При этом, переходя к независимой переменной v , можно записать рассматриваемый критерий качества в следующем виде

$$Q_k = \int_0^{v_f} f_Q(a(v), i(v)) \frac{m_0}{P} \exp\left(-\frac{v}{I_{sp}}\right) dv, \quad (1.53)$$

где v_f — затраты характеристической скорости на весь перелёт. Рассмотрим задачу минимизации функционала (1.53) при перелёте КА с ЭРДУ с низкой круговой орбиты на ГСО в случае околокругового движения. Применяя принцип максимума к этой задаче запишем функцию Понтрягина для данной системы:

$$H = -f_Q(a, i)q + 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \left(a\lambda_a \cos \psi_0 + \frac{\lambda_i}{\pi} \sin \psi_0 \right), \quad (1.54)$$

где $q = dt/dv = (m_0/P) \exp(-v/I_{sp})$, λ_a и λ_i — сопряженные переменные к большой полуоси и наклонению, соответственно. Оптимальное управление амплитудой угла рысканья находится из необходимых условий оптимальности и имеет следующий вид:

$$\cos \psi_0 = \frac{a\lambda_a}{S}, \quad \sin \psi_0 = \frac{\lambda_i}{\pi S}, \quad S = \sqrt{a^2\lambda_a^2 + \frac{\lambda_i^2}{\pi^2}} \quad (1.55)$$

Подставляя оптимальное управление (1.55) в (1.54) получим выражение для гамильтониана

$$H_{opt} = -f_Q(a, i)q + 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} S. \quad (1.56)$$

Тогда полная система уравнений оптимального околокругового движения КА будет иметь вид

$$\frac{da}{dv} = \frac{2\lambda_a a^2}{S} \sqrt{\frac{a}{\mu}}, \quad (1.57)$$

$$\frac{di}{dv} = \frac{2\lambda_i}{\pi^2 S} \sqrt{\frac{a}{\mu}}, \quad (1.58)$$

$$\frac{d\lambda_a}{dv} = \frac{\partial f_Q}{\partial a} q - \frac{2\lambda_a^2 a^2 + S^2}{S\sqrt{\mu a}}, \quad (1.59)$$

$$\frac{d\lambda_i}{dv} = \frac{\partial f_Q}{\partial i} q. \quad (1.60)$$

Для удовлетворения условий принципа максимума необходимо решить краевую задачу для системы уравнений оптимального движения КА со следующими краевыми условиями:

$$a(0) = a_0, \quad i(0) = i_0, \quad (1.61)$$

$$a(v_f) = a_f, \quad i(v_f) = 0, \quad H_{opt}(v_f) = 0, \quad (1.62)$$

где a_0 и i_0 — радиус и наклонение начальной круговой орбиты, соответственно, $i_0 > 0$, $a_f = R_E + h_{ГСО}$ — радиус ГСО, $a_0 < a_f$, $H_{opt}(v_f)$ — значение гамильтониана на конец перелёта. Неизвестными параметрами краевой задачи являются начальные значения сопряженных переменных и суммарные затраты характеристической скорости на перелёт:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \lambda_{a0} \\ \lambda_{i0} \\ v_f \end{pmatrix},$$

где \vec{z} — вектор неизвестных параметров. Для удовлетворения краевых условий (1.61)–(1.62) и нахождения \vec{z} будем решать следующую систему нелинейных уравнений:

$$\vec{f}(\vec{z}) = \begin{pmatrix} a(v_f)/a_f - 1 \\ i(v_f) \\ H_{opt}(v_f) \end{pmatrix} = 0, \quad (1.63)$$

где $a(v_f)$, $i(v_f)$ и $H_{opt}(v_f)$ — большая полуось, наклонение и гамильтониан на правом конце, соответственно, полученные в результате интегрирования системы уравнений оптимального движения (1.57)–(1.60) с начальными условиями (1.61), начальными значениями сопряженных переменных λ_{a0} , λ_{i0} и затратами характеристической скорости на перелёт v_f . При этом начальные значения сопряженных переменных всегда выбирались таким образом, что $\lambda_{i0} \leq 0$ и $\lambda_{a0} > 0$, что соответствуют увеличению большой полуоси и уменьшению наклонения. Использование выражения $a(v_f)/a_f - 1$ для расчёта невязки по большой полуоси вместо эквивалентного выражения $a(v_f) - a_f$ позволяет обеспечить один порядок величин невязок в векторе \vec{f} и улучшить сходимость численных методов решения краевых задач.

Для решения нелинейной системы уравнений (1.63) в данной работе применялся алгоритм мультистарта, который состоит в многократном применении метода Левенберга-Марквардта [60, 61] для решения (1.63) при различных значениях начального приближения. Для расчёта невязок \vec{f} и якобиана $d\vec{f}/d\vec{z}$, необходимых для работы метода Левенберга-Марквардта, в свою очередь необходимо многократное численное интегрирование уравнений оптимального движения. Для этого использовался многошаговый метод Адамса-Башфорта-Мультона переменного порядка [66] и его реализация в среде MATLAB в виде функции `ode113`. Для работы алгоритма мультистарта применялась реализация метода Левенберга-Марквардта в среде MATLAB в виде функции `lsqnonlin`, в которой реализован автоматический расчёт якобиана методом конечных разностей.

Будем обозначать входное значение начального приближения решения для функции `lsqnonlin` как \vec{z}_{in} . На выходе эта функция возвращает некоторое решение, которое будем обозначать \vec{z}_{out} . Предлагаемый алгоритм мультистарта на первом шаге предполагает решение задачи оптимального быстродействия, которая решается с помощью функции `lsqnonlin`. Начальное приближение решения этой задачи \vec{z}_0^* подбирается вручную. Сделать это достаточно просто, поскольку область притяжения решения задачи оптимального быстродействия очень большая. Тогда используемый алгоритм мультистарта можно записать следующим образом:

1. Решить с помощью функции `lsqnonlin` задачу оптимального быстродействия, которая соответствует случаю $f_Q = 1$ подбирая начальную точку $\vec{z}_{in} = \vec{z}_0^*$ вручную;
2. Построить вокруг полученного решения \vec{z}_{out} параллелепипед, внутри которого выбрать случайно k точек, которые будем обозначать $\vec{z}_i, i = 1 \dots k$;
3. Для каждого $\vec{z}_i, i = 1 \dots k$ выполнить следующие шаги:
 - (a) Запустить функцию `lsqnonlin` для случая, когда f_Q соответствует рассматриваемому радиационному функционалу; начальная точка $\vec{z}_{in} = \vec{z}_i$;
 - (b) Запомнить результирующую точку \vec{z}_{out} в вектор \vec{y}_i ;
4. Отбросить из полученного набора точек $\vec{y}_j, j = 1 \dots k$ решения с большими невязками. Количество оставшихся в наборе точек будем обозначать k_t .

Стоит отметить, что согласно результатам расчётов из раздела 3.1.1 при каждом запуске предлагаемого алгоритма мультистарта в результирующем наборе решений $\vec{y}_s, s = 1 \dots k_t$ будут присутствовать траектории с различными значениями длительности перелёта и критерия качества Q_k при фиксированных начальной и конечной орбитах. Этот факт доказывает, что рассмат-

риваемая задача минимизация критерия качества Q_k при свободном времени перелёта является многоэкстремальной.

Глава 2

Оценка воздействия космической радиации на бортовые системы КА

2.1 Расчёт поглощенной дозы радиации

Одним из рассматриваемых в данной работе индикаторов интегральных эффектов деградации бортовой электроники является суммарная за перелёт КА поглощенная доза ионизирующего излучения космической радиации. Численно доза радиации равна количеству энергии, которое передали единице массы вещества мишени тормозящие в ней заряженные частицы космической радиации. Часто используемая единица измерения дозы — рад, равная 10^{-2} Дж/кг.

Наибольший вклад в суммарную поглощенную бортовыми системами КА дозу радиации при выведении на ГСО дают энергичные протоны и электроны РПЗ, а также протоны и ионы СКЛ [34]. Воздействие на бортовую аппаратуру частиц СКЛ в данной работе не рассматривается. Поэтому для оценки радиационной нагрузки на бортовые системы КА будем рассчитывать дозу космического ионизирующего излучения, поглощенную некоторым расположенным внутри КА чувствительным элементом (ЧЭ), который поглощает только электроны и протоны РПЗ. Суммарную дозу, поглощенную ЧЭ за весь перелёт, можно записать следующим образом:

$$D_1 = \int_0^T N_{D1}(t, \vec{r}(t)) dt \quad (2.1)$$

где T — время перелёта КА с начальной орбиты на ГСО, $N_{D1}(t, \vec{r}(t))$ — мощность дозы, поглощаемая ЧЭ в зависимости от текущего времени t и положения $\vec{r}(t)$ КА в околоземном пространстве.

Расчёт поглощенной ЧЭ дозы D_1 условно можно разделить на два этапа. На первом этапе рассчитываются спектры интегральных всенаправленных потоков электронов и протонов, поглощенных КА в каждой точке некоторой траектории $\vec{r}(t)$, $t \in [0; T]$ КА в околоземном про-

странстве. Отметим, что далее говоря о «потоке» как о физической величине будем иметь в виду количество частиц, упавшее на единицу площади какой-либо поверхности в единицу времени. Для расчёта потоков электронов и протонов РПЗ использовались модели AE8/AP8 MIN, AE8/AP8 MAX [109–111] и AE9/AP9 [35]. Согласно рекомендациям работ [112, 113] для расчёта магнитных координат необходимых при использовании моделей AE8 MIN, AE8 MAX, AP8 MIN в качестве моделей магнитного поля внутренних источников Земли использовалась модель Jensen и Cain [114]. Для модели AP8 MAX использовалась экстраполированная на эпоху 1970 модель магнитного поля внутренних источников GSFC 12/66 [115]. Магнитное поле внешних токов магнитосферы Земли при использовании всех моделей типа AE8/AP8 не учитывалось. При расчёте потоков частиц РПЗ при помощи модели AE9/AP9 для вычисления магнитных координат использовалась связка модели внутренних источников IGRF-12 [36] с моделью внешних токов Olson-Pfitzer Quiet (OPQ77) [116]. После расчёта потоков частиц РПЗ подсчитывается суммарное количество (флюенс) протонов и электронов, упавших на КА.

На втором этапе на основе рассчитанных флюенсов протонов и электронов РПЗ производится расчёт поглощенной ЧЭ дозы радиации. Процесс торможения заряженных частиц в веществе является сложным, включающим в себя упругие и неупругие столкновения, ионизацию, генерацию вторичного излучения и взаимодействие с ядрами атомов [30, 31]. Поэтому при расчёте поглощенной дозы радиации за некоторой защитой необходимо учитывать множество механизмов потери энергии падающих частиц, и это является отдельной сложной проблемой. В данной работе для расчёта поглощенной дозы радиации используется программа Shieldose2 [117]. Данная программа основана на результатах работ по моделированию методом Монте-Карло взаимодействия энергичных заряженных частиц с веществом и рассчитывает дозу, поглощенную ЧЭ при облучении всенаправленным потоком электронов и протонов произвольного спектра. При расчётах можно задать материал, из которого изготовлен ЧЭ, толщину и геометрию защиты, за которой находится ЧЭ. В данной работе для моделирования расположения ЧЭ внутри корпуса КА все дозы рассчитывались, предполагая, что ЧЭ находится за бесконечной однородной алюминиевой стенкой толщиной $\lambda_0 = 4$ мм (или примерно 1 г/см^2). Для моделирования воздействия на бортовую электронику предполагалось, что ЧЭ состоит из кремния.

Выражение (2.1) можно представить в форме дифференциального уравнения

$$\frac{dD_1}{dt} = N_{D_1}(t, \vec{r}(t)) \quad (2.2)$$

с начальным условием $D_1(0) = 0$. Тогда если рассматривать в качестве критерия качества Q_k дозу поглощенную ЧЭ за перелёт D_1 , то уравнение (2.2) является конкретным видом обобщенного уравнения (1.15).

Расчёт функции мощности дозы N_{D1} производился с помощью программных комплексов SPENVIS [118] и IRENE [119]. Следует отметить, что использование этих программных комплексов напрямую при численном интегрировании системы (1.33)–(1.36) осложняется различными факторами. В случае SPENVIS проблемы вызывает доступ к комплексу только через веб-интерфейс. Помимо необходимости доступа в интернет эта схема доступа существенно замедляет численное интегрирование. В случае IRENE возможность оффлайн расчётов присутствует, но при этом функция N_{D1} имеет разрывы частных производных различных порядков и области резкого изменения, что сильно увеличивает количество шагов численного интегрирования и повышает жесткость рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Для эффективного численного интегрирования расширенной системы уравнений движения КА в данной работе предлагается метод осреднения мощности дозы и методика построения аппроксимационной зависимости мощности дозы на основе расчётных данных, полученных из SPENVIS и IRENE.

Как будет показано в главе 3, далее можно рассматривать упрощённую зависимость мощности дозы от времени и положения КА в околоземном пространстве, и применить метод осреднения мощности дозы. Рассмотрим следующую функцию осреднённой мощности дозы

$$\tilde{N}_D(r, i) = \frac{1}{n_a T_r} \int_{t_0}^{t_0 + n_a T_r} N_{D1}(s, \vec{r}_d(s)) ds, \quad (2.3)$$

где T_r — период кеплеровского движения КА по круговой орбите с радиусом r , n_a — число витков осреднения, t_0 — фиксированная дата, $\vec{r}_d(t)$ — вектор-функция, описывающая положения КА в околоземном пространстве при движении в течении n_a витков по круговой орбите радиусом r , наклонением i и нулевой долготой восходящего узла. Рассматриваемая функция (2.3) помимо снижения жесткости расширенной системы уравнений движения КА полезна тем, что обладает малой размерностью входных параметров: два (радиус и наклонение) вместо четырёх (время и радиус-вектор). Этот факт сильно упрощает задачу построения гладкой аппроксимации мощности дозы.

Осреднённая мощность дозы \tilde{N}_D обладает более плавным характером изменения в отличие от функции N_{D1} , но по-прежнему не обладает достаточной степенью гладкости для эффективного численного интегрирования в составе расширенных уравнений движения. Для построения гладкой аппроксимирующей зависимости будем рассчитывать значения функции \tilde{N}_D на некоторой сетке по радиусу и наклонению по формуле (2.3). Далее эту сетку будем называть опорной. По полученным значениям строятся двумерные сплайны, которые уже используются при численном интегрировании расширенных уравнений движения. Далее рассмотрим несколько различных способов построения результирующего сплайна, который будем обозначать N_D .

Получающиеся модели зависимости осредненной мощности дозы от радиуса и наклона будем обозначать аббревиатурами по следующей схеме: $D[\text{программный комплекс}][\text{модель потоков РПЗ}]$. Буква «D» в начале означает модель мощности дозы. Две следующие буквы означают используемый в модели программный комплекс: «SP» в случае SPENVIS и «IR» в случае IRENE. Два последних знака означают используемые модели потоков частиц РПЗ: «8N» обозначает, что при расчёте по (2.3) использовались модели РПЗ AE8 MIN/AP8 MIN, «8X» — модели AE8 MAX/AP8 MAX, «9M» — модели AP9/AE9 в режиме расчёта средних значений потоков, «95» — модели AP9/AE9 в режиме расчёта 95-го перцентиля потоков заряженных частиц РПЗ. В этих обозначениях, например, аббревиатура DSP8N будет обозначать модель зависимости осредненной мощности дозы от радиуса и наклона, полученную на основе расчётных данных из программного комплекса SPENVIS в случае использования моделей потоков частиц РПЗ AE8 MIN/AP8 MIN.

Модель DSP8N. Рассматривалась неравномерная сетка из 400 (16 точек по оси наклона, 25 точек по оси радиусов) невозмущенных кеплеровых круговых орбит, на которых рассчитывалась осредненная мощность дозы согласно (2.3) с помощью программного комплекса SPENVIS и моделей потоков частиц РПЗ AP8 MIN/AE8 MIN. Для модели потоков электронов РПЗ в качестве исходных данных использовались данные из обновления ESA-SEE1, которое содержит дополнительные измерения со спутника CRRES [120] для уточнения значений потоков электронов во внешнем РПЗ. При этом расчёт для каждой орбиты проводился вручную через веб-интерфейс SPENVIS. Диапазон опорной сетки по наклону — от 0 до 90 градусов, по радиусу — от 7371 км до 42371 км. Конкретные значения радиусов и наклона выбирались по принципу «расчётных точек больше там, где быстрее изменяется накопленная доза с изменением радиуса и наклона». Число витков осреднения выбиралось таким образом, что $n_a T_r = 2$ суток для каждой орбиты опорной сетки. При таком выборе времени осреднения КА даже на самых высоких орбитах опорной сетки успеет совершить как минимум один оборот вокруг Земли. Дата и время на момент осреднения t_0 соответствуют 00:00:00 1 января 2017 года.

По полученным расчётным значениям осредненной мощности дозы строилась аппроксимация двумерным кубическим сглаживающим базисным сплайном (по определению порядок кубического сплайна равен 4 [121]) с помощью функции `sparcs` [122, 123] в среде MATLAB. Использование именно сглаживающего сплайна продиктовано наличием в расчётных данных шумовой составляющей, которая при использовании интерполяции обычными базисными сплайнами особенно сильно проявляется в частных производных $\partial N_D / \partial i$ и $\partial N_D / \partial r$. Полученный сглаживающий сплайн уже использовался при интегрировании расширенных уравнений движе-

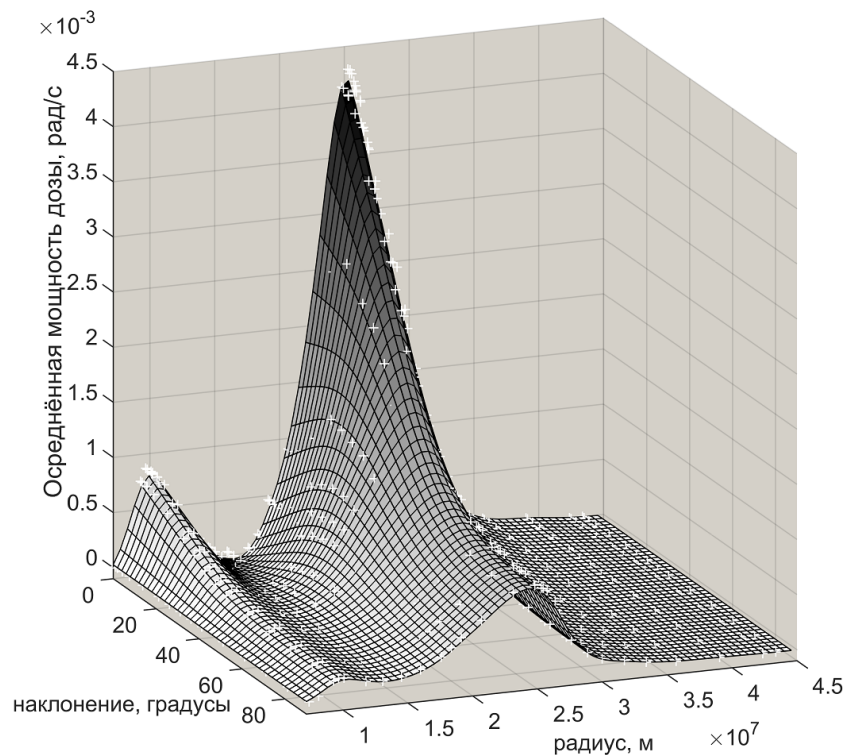


Рисунок 2.1 – Зависимость осредненной мощности дозы РПЗ N_D от радиуса и наклона орбиты в аппроксимационной модели DSP8N. Белыми крестами отмечены расчетные точки SPENVIS.

ния. Таким образом, была получена возможность работы с программным комплексом SPENVIS оффлайн и без ручного вмешательства при расчёте мощности дозы. Полученная трёхмерная поверхность $N_D = N_D(r, i)$ изображена на Рисунке 2.1, где белыми крестами показаны расчетные точки SPENVIS.

Вычисление частных производных $N_D(r, i)$ по радиусу и наклонению, фигурирующих в расширенных уравнениях оптимального движения, производилось с помощью формул вычисления производных от сплайна и функции `finder` [124] в среде MATLAB.

Модель DIR8N. Опорная расчётная сетка состояла из 500 (20 точек по оси наклонений, 25 точек по оси радиусов) невозмущенных кеплеровых круговых орбит, на которых рассчитывалась осредненная мощность дозы согласно (2.3) с использованием программного комплекса IRENE и моделей потоков частиц РПЗ AP8 MIN/AE8 MIN. В отличие от модели DSP8N исходные данные модели AE8 MIN использовались без каких-либо изменений. Диапазон опорной сетки по наклонению — от 0 до 90 градусов, по радиусу — от 7371 км до 43371 км. По наклонению использовалась равномерная сетка, по радиусу использовалась сетка, состоящая из двух участков, на которых точки распределены равномерно. Первый участок содержит 12 точек в диапазоне от

7371 км до 14371 км, второй — 13 точек в диапазоне от 15371 км до 43371 км. Для всех орбит опорной сетки использовалось фиксированное число витков осреднения $n_a = 10$. Дата и время на момент осреднения t_0 соответствуют 00:00:00 1 января 2020 года.

По полученным значениям осредненной мощности дозы аналогично модели DSP8N строился двумерный кубический сглаживающий сплайн. Но поскольку модель DIR8N и все последующие модели мощности дозы, как будет показано в последующих разделах, используются при численном интегрировании системы уравнений оптимального движения с помощью метода 8 порядка точности, то для предотвращения потери точности при прохождении узлов сплайна необходимо чтобы порядок сплайна был достаточно высок. Кубический сплайн не удовлетворяет этим требованиям. Следовательно, дополнительно в данной модели и всех последующих моделях мощности дозы необходимо на основе кубического сплайна построить сплайн более высокого порядка.

Покажем, что результирующий сплайн должен иметь как минимум 11 порядок. Для эффективного численного интегрирования расширенных уравнений оптимального движения методами типа Рунге-Кутты необходима непрерывность частных производных правых частей вплоть до порядка, равного порядку точности используемого метода численного интегрирования, включительно. В данной работе широко используется метод Дорманда-Принса 7(8) порядка, поэтому для его использования необходима непрерывность частных всех производных от правых частей вплоть до 8-го порядка включительно. В уравнениях (1.36) входят частные производные от $f_Q = N_D$ первого порядка, следовательно, необходимо чтобы все частные производные результирующего сплайна вплоть до 9 порядка были непрерывными. Напомним, что сплайн имеет непрерывные производные вплоть до $n - 1$ порядка, где n — наибольшая степень полиномов, входящих в сплайн. Также по определению сплайн имеет порядок $n + 1$, следовательно, наименьший порядок, который должен иметь результирующий сплайн N_D равен $9 + 2 = 11$.

Таким образом в данной модели для увеличения степени гладкости результирующего сплайна строилась новая сетка на основе экстремумов полиномов Чебышева с помощью функции `chbpnt` [125] в среде MATLAB, и рассчитывались значения кубического сплайна на ней. Далее по значениям кубического сплайна на новой сетке был построен обыкновенный базисный сплайн 11-го порядка при помощи функции `spari` [126] в среде MATLAB. Именно этот сплайн был использован при численном интегрировании расширенных уравнений движения КА.

Модель DIR8X. Аналогична во всём модели DIR8N, кроме того, что используются модели потоков частиц РПЗ AP8 MAX/AE8 MAX.

Модель DIR9M. Аналогична во всём моделям DIR8N и DIR8X, кроме того, что используются модели потоков частиц РПЗ AP9/AE9. Эти модели потоков содержат помимо информации о средних значениях потоков частиц РПЗ за некоторый долгий период наблюдений ещё и информацию о степени вариативности потоков из-за погрешности и отсутствия измерений в некоторых областях околоземного пространства, а также из-за влияния динамики магнитосферы и факторов космической погоды. Величины потоков частиц РПЗ в модели AE9/AP9 рассматриваются как случайные поля с дисперсией, зависящей от положения в околоземном пространстве и текущего времени. Отсутствие измерений потоков частиц некоторых энергий в некоторых областях пространства моделируется увеличением дисперсии в этой области. При расчёте осредненной мощности дозы в модели DIR9M на сетке опорных орбит модель AE9/AP9 использовалась в режиме расчёта средних значений потоков протонов и электронов РПЗ (режим «mean»).

Модель DIR95. Аналогична во всём модели DIR9M, кроме того, что использует модели потоков частиц РПЗ AP9/AE9 в режиме расчёта 95-го перцентиля потоков заряженных частиц РПЗ (режим «montecarlo»). В этом режиме программный комплекс IRENE генерирует заданное количество реализаций случайного поля потоков частиц РПЗ вдоль заданной траектории полёта КА и затем рассчитывает 95-й перцентиль потоков на полученной выборке реализаций. Полученную величину потоков и, соответственно, осредненной мощности дозы можно интерпретировать как оценку в «худшем случае»: если число реализаций стремится к бесконечности, то в 95% случаев потоки и мощность дозы не будут превышать полученную оценку. При построении модели DIR95 использовалось по 40 реализаций случайного поля потоков частиц РПЗ на каждую из 500 орбит опорной сетки.

Параметры всех рассматриваемых моделей мощности дозы собраны в Таблице 2.1. Модели осредненной мощности дозы DIR8N, DIR8X, DIR9M, DIR95 представлены на Рисунке 2.2, где значения мощности дозы для каждой полученной функции N_D показаны оттенками серого. Подробно модель DIR95 показана в виде трёхмерной поверхности на Рисунке 2.3, где отмечены области, соответствующие внутреннему и внешнему радиационным поясам Земли.

Таким образом можно ввести понятие осредненной дозы, которое в дальнейшем может использоваться как упрощённая версия целевого функционала дозы и непосредственно использоваться при оптимизации траекторий. Пусть осредненная доза задаётся следующим выражением:

$$D = \int_0^T N_D(r(s), i(s)) ds. \quad (2.4)$$

Таблица 2.1 – Параметры аппроксимационных моделей осредненной мощности дозы.

Модель мощности дозы	Число точек опорной сетки	Диапазон по высоте, км	Число непрерывн. производн.	t_0	Число витков
DSP8N	$16 \times 25 = 400$	1000–36000	2	01.01.2017	$n_a T_r = 2$ суток
DIR8N	$20 \times 25 = 500$	1000–37000	9	01.01.2020	$n_a = 10$
DIR8X	$20 \times 25 = 500$	1000–37000	9	01.01.2020	$n_a = 10$
DIR9M	$20 \times 25 = 500$	1000–37000	9	01.01.2020	$n_a = 10$
DIR95	$20 \times 25 = 500$	1000–37000	9	01.01.2020	$n_a = 10$

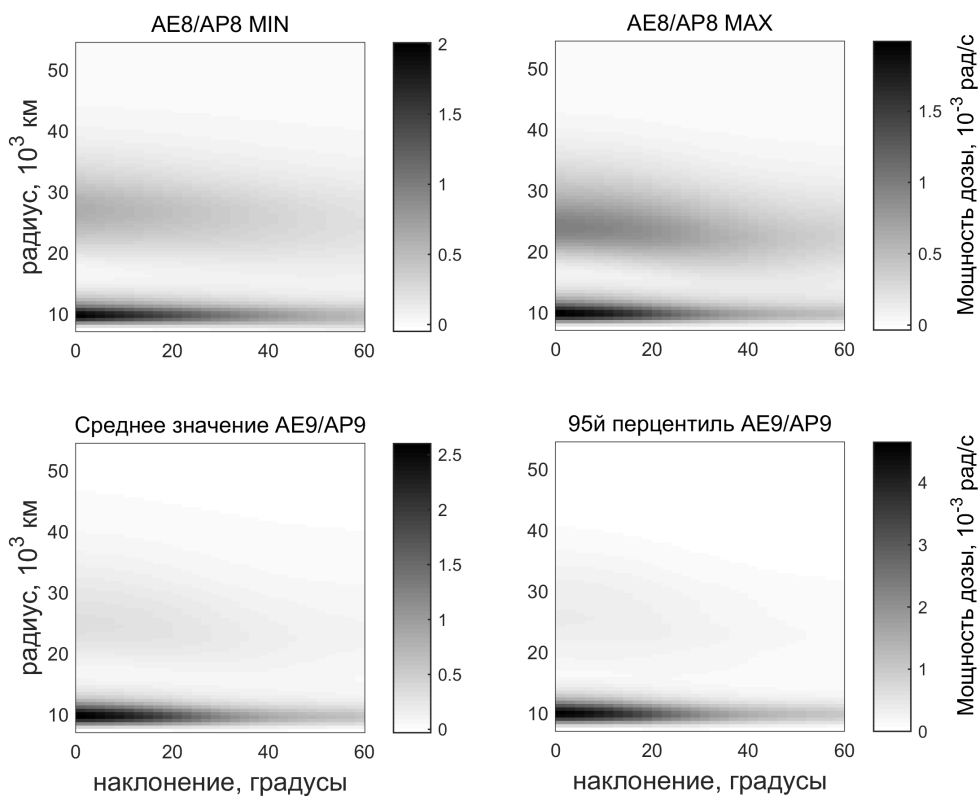


Рисунок 2.2 – Зависимость мощности дозы от расстояния до центра Земли и наклона орбиты для моделей DIR8N, DIR8X, DIR9M и DIR95. Мощность дозы показана оттенками серого.



Рисунок 2.3 – Зависимость мощности дозы от расстояния до центра Земли и наклонения орбиты в модели DIR95.

Тогда в качестве минимизируемого целевого функционала можно рассматривать выражение (2.4), а в качестве дополнительного уравнения движения (1.15) можно рассматривать следующее уравнение:

$$\frac{dD}{dt} = N_D(r, i), \quad D(0) = 0, \quad (2.5)$$

где расстояние от центра Земли до КА и наклонение оскулирующей орбиты КА выражаются как $r = h^2/\xi$ и $i = \arccos(2/\tilde{\varphi} - 1)$, соответственно.

2.2 Расчёт эквивалентного флюенса электронов 1 МэВ

Помимо поглощенной дозы, являющейся общим индикатором радиационной нагрузки на бортовую электронику КА, будем рассматривать и функционалы, описывающие радиационную деградацию конкретных типов бортовой электроники. Одной из важных частей бортового комплекса аппаратуры являются солнечные батареи (СБ), основной частью которых являются полупроводниковые фотоэлектрические преобразователи (ФЭП).

На радиационную деградацию электрической мощности ФЭП на орбите влияют различные факторы космического полёта. Основными из них являются: суммарное количество, спектральное и угловое распределение заряженных частиц космической радиации, упавших на единицу

площади чувствительной поверхности ФЭП за время от начала перелёта до текущего момента. Также на деградацию ФЭП влияют толщина лицевого защитного стекла, расположение СБ в конструкции КА и эквивалентная толщина защиты с тыльной стороны СБ. Основную роль в деградации характеристик ФЭП несут структурные повреждения, связанные с упругими столкновениями падающих частиц с ядрами атомов полупроводниковых структур входящих в состав ФЭП. При этом возникают дефекты кристаллической решетки, которые уменьшают время жизни неосновных носителей тока и тем самым снижают мощность, генерируемую ФЭП. Не смотря на то, что при торможении частиц в веществе потери энергии на ионизацию больше на 3–4 порядка [31], чем на создание дефектов кристаллической решетки, именно структурные повреждения несут основную роль в деградации ФЭП.

Поэтому вместо использования поглощенной дозы радиации для количественного описания деградации ФЭП под действием космической радиации необходимо использовать специализированный функционал. В качестве такого функционала можно рассматривать эквивалентный флюенс нормально падающих на поверхность ФЭП электронов с энергией 1 МэВ, который возникает при использовании метода эквивалентных потоков [28–30, 127]. Под «флюенсом», как правило, имеется в виду интеграл по времени от потока за всё рассматриваемое время, то есть суммарное количество частиц, упавших на единицу площади рассматриваемой поверхности за определённое время.

Понятие эквивалентного флюенса возникает из необходимости оценки радиационной деградации характеристик ФЭП в условиях космического полёта по результатам наземных испытаний по облучению ФЭП моноэнергетическим нормально падающим пучком заряженных частиц. Вкратце суть метода эквивалентных потоков состоит в пересчёте всенаправленных потоков протонов и электронов через набор коэффициентов в моноэнергетический нормально падающий поток электронов с энергией 1 МэВ, создающий то же самое количество однотипных повреждений ФЭП в единицу времени, что и исходные потоки. Таким образом, уровень повреждений, нанесённых космической радиацией ФЭП, можно измерять в эквивалентном флюенсе нормально падающих на ФЭП электронов с энергией 1 МэВ. В качестве единицы измерения эквивалентного флюенса как правило используется $1/\text{см}^2$. Эквивалентный флюенс Φ_1 , накопленный ФЭП за весь перелёт КА, можно записать следующим образом

$$\Phi_1 = \int_0^T U_1(t, \vec{r}(t)) dt, \quad (2.6)$$

где T — время перелёта, $U_1(t, \vec{r}(t))$ — зависимость эквивалентного потока электронов 1 МэВ от времени t и положения КА $\vec{r}(t)$ в околоземном пространстве на траектории перелёта. Зная ве-

личину эквивалентного флюенса можно по экспериментальным данным оценить величину деградации различных электрических характеристик ФЭП, в том числе и снижение максимальной выходной электрической мощности ФЭП.

Расчёт эквивалентного флюенса, накопленного ФЭП за перелёт, можно условно разделить на два этапа. Первый этап аналогично расчёту поглощенной дозы состоит в расчёте спектров интегральных всенаправленных потоков электронов и протонов, поглощенных КА на некоторой траектории в околоземном пространстве. Методика расчёта этих спектров полностью аналогична разделу 2.1, за исключением того, что в качестве моделей потоков РПЗ используются только модели AE8 MAX и AP8 MAX.

На втором этапе по полученным спектрам суммарного количества протонов и электронов РПЗ, упавших на поверхность ФЭП рассчитывается непосредственно эквивалентный флюенс электронов с энергией 1 МэВ. Величина эквивалентного флюенса зависит от типа ФЭП. В данной работе рассматривались ФЭП на основе кристаллического кремния и трехкаскадные ФЭП на основе GaInP₂/GaAs/Ge [128, 129]. Расчёт эквивалентного флюенса проводился с помощью модифицированной программы EQGAFLUX [29]. Модификация состояла в том, что в программу была добавлена возможность использовать произвольные переводные коэффициенты, загружаемые из файла. При расчётах учитывалось, что фоточувствительные элементы СБ находятся за слоем защитного стекла, которое частично ослабляет поток энергичных частиц на фотоэлектронные преобразователи СБ. При этом переводные коэффициенты для расчёта эквивалентного флюенса также зависят и от толщины защитного покрытия. В данной работе для всех расчётов принималось, что фоточувствительные элементы СБ находятся за слоем кварцевого стекла толщиной $\delta_n = 150$ мкм плотностью $2,2 \text{ г/см}^3$ (как в работе [28]). Защита задней поверхности ФЭП принималась эквивалентной кварцевому стеклу толщиной $\delta_s = 500$ мкм. Для учёта повреждений ФЭП, нанесённых потоком частиц падающих с задней поверхности, согласно [28, 29] рассчитывались отдельно эквивалентные флюенсы для частиц падающих на переднюю и заднюю поверхности СБ, а затем складывались.

Выражение (2.6) можно представить в форме дифференциального уравнения

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = U_1(t, \vec{r}(t)), \quad (2.7)$$

для функции $\Phi_1(t)$, $t \in [0; T]$ с начальным условием $\Phi_1(0) = 0$. Тогда если рассматривать в качестве критерия качества Q_k эквивалентный флюенс Φ_1 , то уравнение (2.7) является конкретным видом обобщенного уравнения (1.15).

Расчёт функции эквивалентного потока U_1 производился с помощью программных комплексов IRBEM [130] и IRENE [119]. Использование этих программных комплексов приводит к

аналогичным проблемам, как и при расчёте мощности дозы в разделе 2.1. Поэтому аналогично методу осредненной мощности дозы предлагается метод осреднения эквивалентного потока. Рассмотрим следующую функцию осредненного эквивалентного потока электронов 1 МэВ:

$$\tilde{U}(r, i) = \frac{1}{n_a T_r} \int_{t_0}^{t_0 + n_a T_r} U_1(s, \vec{r}_d(s)) ds, \quad (2.8)$$

где T_r — период кеплеровского движения КА по круговой орбите с радиусом r , n_a — число витков осреднения, t_0 — фиксированная дата, $\vec{r}_d(t)$ — вектор-функция, описывающая положения КА в околоземном пространстве при движении в течении n_a витков по круговой орбите радиусом r , наклонением i и нулевой долготой восходящего узла. Также аналогично разделу 2.1 ниже описываются методики построения аппроксимационной зависимости мощности дозы на основе расчётных данных, полученных из IRBEM и IRENE.

Для построения гладкой аппроксимирующей зависимости будем рассчитывать по формуле (2.8) значения функции \tilde{U} на некоторой сетке по радиусу и наклонению, которую далее будем называть опорной. По полученным значениям строятся двумерные сплайны, которые уже используются при численном интегрировании расширенных уравнений движения. Далее рассмотрим несколько различных способов построения результирующего сплайна, который будем обозначать $U(r, i)$. Также получающиеся модели зависимости эквивалентного потока от радиуса и наклонения будем обозначать аббревиатурами по следующей схеме: E[программный комплекс][тип ФЭП]. Буква «E» в начале означает модель эквивалентного потока. Две следующие буквы означают используемый в модели программный комплекс: «RB» в случае IRBEM и «IR» в случае IRENE. Последний символ означает тип ФЭП, для которого производился расчёт: «S» обозначает ФЭП на основе кристаллического кремния, «3» — трёхкаскадный ФЭП.

Модель ERBS. Расчёт в данной модели проводился для ФЭП на основе кристаллического кремния. При этом переводные коэффициенты для расчёта эквивалентного потока были взяты из программы EQFRUX [28]. Опорная сетка в этой модели состояла из $17 \times 36 = 612$ круговых орбит (17 точек по наклонению и 36 точек по радиусу). Расчёт осредненного эквивалентного потока электронов 1 МэВ проводился согласно (2.8) с помощью комплекса IRBEM. Диапазон опорной сетки по наклонению — от 0 до 90 градусов, по радиусу — от 7371 км до 63371 км. Значения наклонений и радиусов опорной сетки распределены неравномерно, и в целом опорная сетка похожа на сетку из модели мощности дозы DSP8N. Число витков осреднения выбиралось таким образом, что $n_a T_r = 1$ сутки для каждой орбиты опорной сетки. Дата и время на момент осреднения t_0 соответствуют 00:00:00 1 января 2017 года. Методика построения аппроксимирующего сплайна в данной модели полностью аналогична методикам из моделей осредненной

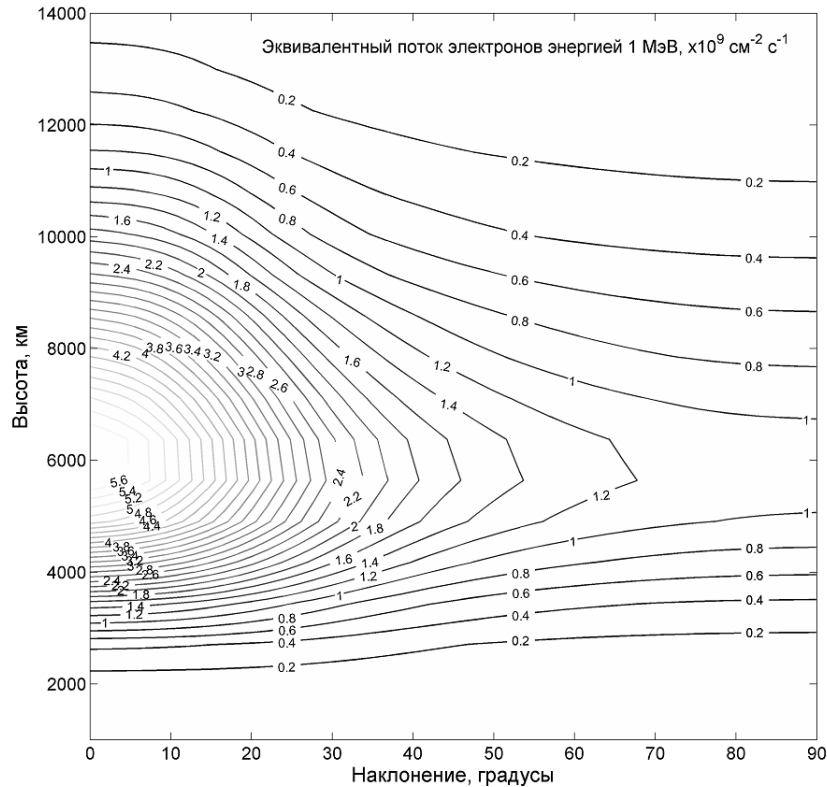


Рисунок 2.4 – Зависимость осредненного эквивалентного потока нормально падающих на СБ электронов с энергией 1 МэВ от высоты и наклонения круговой орбиты в модели ERBS.

мощности дозы DIR8N, DIR8X, DIR9M и DIR95. Линии уровня эквивалентного потока полученного сплайна $U(r, i)$ 11-го порядка на плоскости (i, r) приведены на Рисунке 2.4. На данном рисунке показана только область внутреннего РПЗ, так как вне её значения эквивалентного потока меньше $0.2 \times 10^9 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ и почти не меняются до края расчётной сетки.

Модель EIR3. Расчёт осредненного эквивалентного потока в данной модели проводился для трёхкаскадного ФЭП производства компании Spectrolab [129]. Переводные коэффициенты были взяты из программы General EQFlux [131]. Опорная сетка в этой модели состояла из $30 \times 40 = 1200$ круговых орбит. Расчёт осредненного эквивалентного потока электронов 1 МэВ проводился согласно (2.8) с помощью комплекса IRENE в области от 0 до 90 градусов по наклонению и от 7071 км до 63371 км по радиусу. Число витков осреднения выбиралось таким образом, чтобы оно было целым и время движения по круговой орбите осреднения составляло не менее 3 суток. Таким выбором времени осреднения учитывалось суточная вариация потоков частиц РПЗ на низких высотах, связанная с отклонением оси магнитного диполя от оси вращения Земли. Сетка по наклонению выбиралась равномерная, по радиусу ниже 12371 км — логарифмическая, 10 точек, выше 12371 км — равномерная, 30 точек. Дата и время на момент осреднения t_0

соответствуют 00:00:00 1 января 2020 года. Кроме того, после расчёта значений осредненного эквивалентного потока на опорной сетке к полученному набору точек $\tilde{U}_{j,k} = \tilde{U}(r_j, i_k)$, $j = 1 \dots 30$, $k = 1 \dots 40$ применялось преобразование следующего вида

$$\tilde{W}(x(r), y(i)) = \frac{\ln \tilde{U}(r, i)}{U_s}, \quad x(r) = \frac{\ln(r/R_e - 1) - r_b}{r_s}, \quad y(i) = \frac{i}{i_s} \quad (2.9)$$

где $R_e = 6371.2$ км — средний радиус Земли, $U_s = 21.148417617915$, $r_b = -2.2087485339362$, $r_s = 4.400008458105$, $i_s = 90^\circ$ — константы преобразования, которые выбирались таким образом, чтобы построенный по полученным после преобразования точкам сплайн $\tilde{W} = \tilde{W}(x, y)$ вписывался в единичный куб $[0;1]^3$. Преобразование (2.9) позволило сделать более плавным изменение эквивалентного потока на границах внутреннего РПЗ и уменьшить погрешность аппроксимации расчётных значений осредненного эквивалентного потока. Методика построения аппроксимирующей зависимости по набору точек $\tilde{W}_{j,k}$ аналогична методике, применённой в модели ERBS. Единственное отличие в применённой методике состоит в том, что точки промежуточной сетки выбирались в более широком по радиусу диапазоне, чем на опорной сетке. Для расчёта значений кубического сплайна вне диапазона опорной сетки использовалась гладкая экстраполяция сплайнов с помощью функции `fnxtr` [132] в среде MATLAB. Полученный сплайн 11-го порядка будем обозначать как $W(x, y)$. Тогда результирующий сплайн, который был использован при интегрировании расширенных уравнений движения, выразится следующим образом:

$$U(r, i) = \exp \left(U_s W \left(\frac{\ln(r/R_e - 1) - r_b}{r_s}, \frac{i}{i_s} \right) \right), \quad (2.10)$$

Вид этого сплайна представлен на Рисунке 2.5. Масштаб по оси эквивалентного потока — логарифмический. Применение функции `fnxtr` позволило расширить область определения результирующего сплайна $U(r, i)$ по оси радиуса до 6372 км – 219558 км, что может быть полезным для избежания пересечения разрывов частных производных правых частей расширенных уравнений движения при пересечении КА границы области определения сплайна. Разрыв частных производных U на границе области определения возникают потому, что функция $U(r, i)$ продолжается по радиусу за границы области определения константой, зависящей от наклона и равной значению функции U на границе.

Стоит отметить, что из Рисунков 2.4–2.5 видно, что для обоих типов рассматриваемых ФЭП вклад внешнего электронного радиационного пояса в суммарный эквивалентный поток на несколько порядков меньше, чем вклад протонов внутреннего радиационного пояса. Таким образом, задача пересечения РПЗ с наименьшими потерями мощности СБ сводится к задаче оптимального пересечения области внутреннего радиационного пояса.

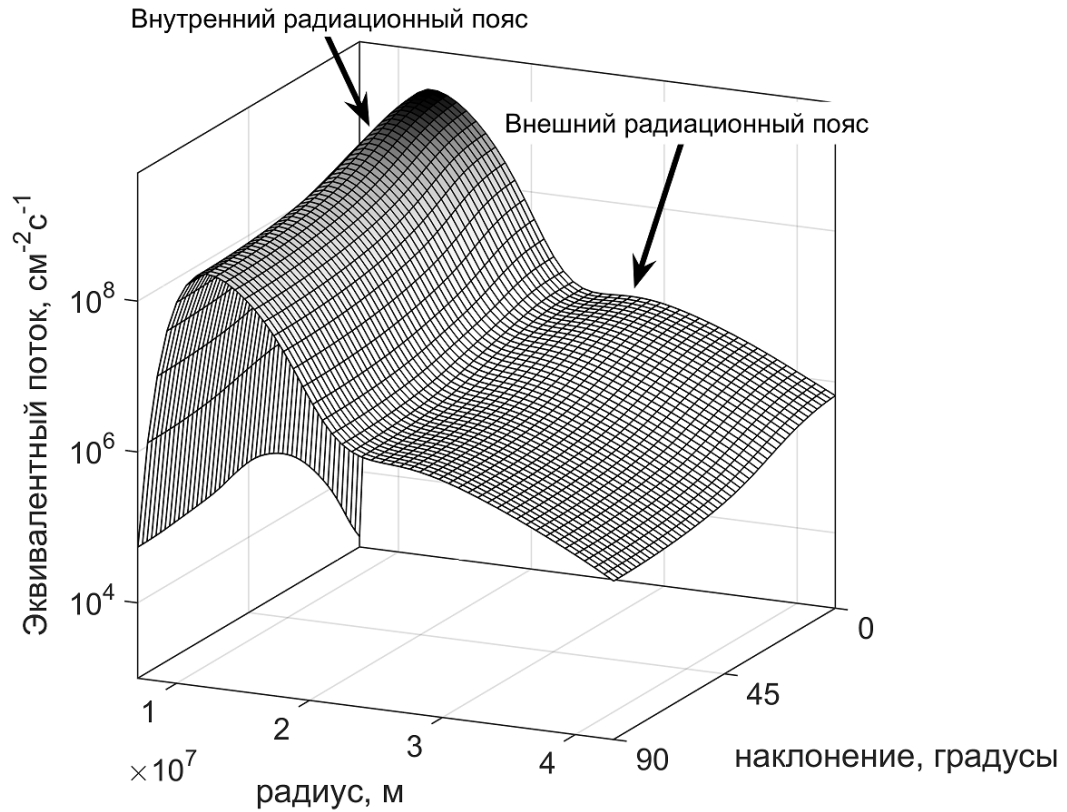


Рисунок 2.5 – Зависимость осредненного эквивалентного потока нормально падающих на СБ электронов с энергией 1 МэВ от высоты и наклона круговой орбиты в модели EIR3.

Итак, после введения понятия осредненного эквивалентного потока электронов энергии 1 МэВ можно ввести понятие осредненного эквивалентного флюенса Φ электронов с энергией 1 МэВ:

$$\Phi = \int_0^T U(r(s), i(s)) ds, \quad (2.11)$$

Тогда в качестве минимизируемого целевого функционала можно рассматривать выражение (2.11), а в качестве дополнительного уравнения движения (1.15) можно рассматривать следующее уравнение для функции $\Phi(t)$, $t \in [0; T]$:

$$\frac{d\Phi}{dt} = U(r, i), \quad \Phi(0) = 0, \quad (2.12)$$

где расстояние от центра Земли до КА и наклонение оскулирующей орбиты КА выражаются как $r = h^2/\xi$ и $i = \arccos(2/\tilde{\varphi} - 1)$, соответственно.

2.3 Расчёт относительной мощности СБ

В задаче минимизации радиационной деградации СБ в качестве целевого функционала удобно рассматривать величину, которую будем называть относительной мощностью СБ. Она

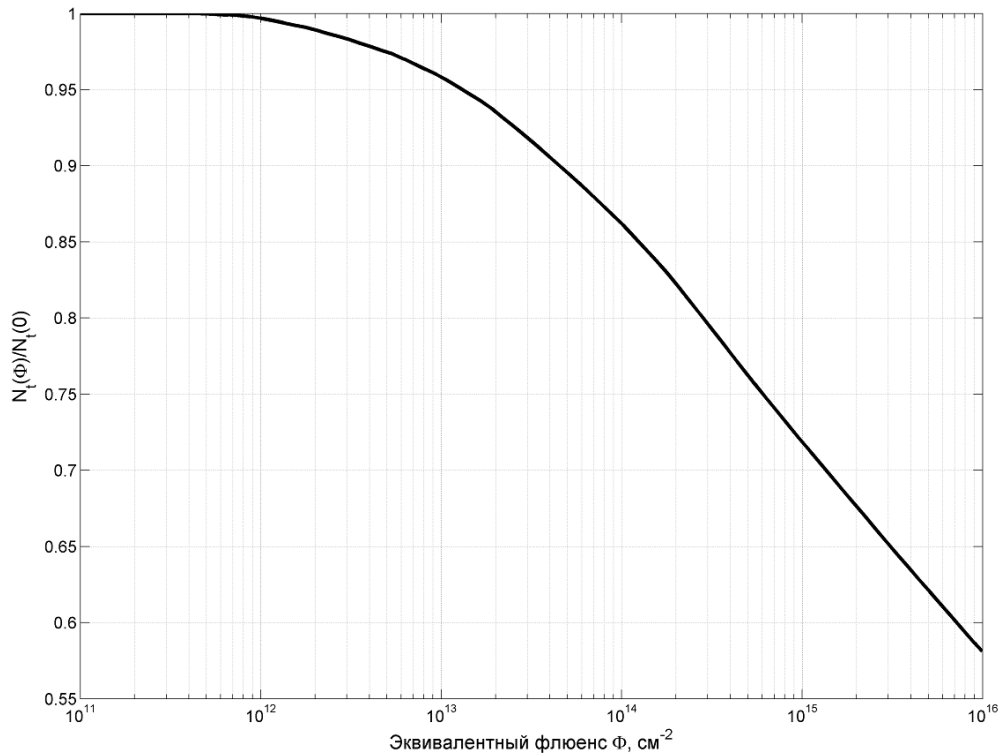


Рисунок 2.6 – Зависимость относительной мощности СБ от величины эквивалентного флюенса нормально падающих на СБ электронов энергией 1 МэВ для ФЭП на основе кристаллического кремния.

задаётся следующим образом:

$$\beta_f = \frac{N_f}{N_0}, \quad (2.13)$$

где N_0 – суммарная мощность СБ на начало этапа выведения с помощью ЭРДУ, N_f – суммарная мощность СБ на некоторый момент перелёта или пребывания КА на целевой орбите с учётом радиационной деградации за счёт воздействия частиц РПЗ. Зная значение $\Phi_1(t^*)$ эквивалентного флюенса электронов 1 МэВ, накопленного ФЭП от начала этапа выведения с помощью ЭРДУ и до некоторого момента t^* можно рассчитать по данным лабораторных испытаний оценку мощности N_{1f} одного ФЭП с учётом радиационной деградации [28–30]. Умножая N_{1f} на количество ФЭП в СБ получим мощность N_f и, соответственно, относительную мощность β_f СБ на момент времени t^* . При этом зависимость β_f от $\Phi_1(t^*)$ будет зависеть от типа и конкретной модели ФЭП.

Для описания деградации мощности ФЭП на основе кристаллического кремния использовалась зависимость относительной мощности от эквивалентного флюенса из работы [44], график которой приведён на Рисунке 2.6. Для этого будем интерполировать данные из [44] полиномом

4-го порядка от натурального логарифма эквивалентного флюенса [29]:

$$\beta_f(\Phi_1) = \sum_{k=0}^4 a_k \left(\frac{\ln \Phi_1 - d}{\sigma} \right)^k, \quad (2.14)$$

где параметры d и σ определяются по набору входных данных (β_{fi}, Φ_{1i}) , $i = 1 \dots n$, $n = 84$ следующим образом:

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \Phi_{1i} = 31.07, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln \Phi_{1i} - d)^2} = 3.412 \quad (2.15)$$

Коэффициенты a_k подбираются методом наименьших квадратов в матричной форме с помощью функции fit [133] в среде MATLAB. Значения коэффициентов аппроксимации с границами 95% достоверности следующие:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.9168 \quad (0.9163, 0.9172), \\ a_1 &= -0.1431 \quad (-0.1437, -0.1425), \\ a_2 &= -0.06431 \quad (-0.06526, -0.06336), \\ a_3 &= 0.007114 \quad (0.006804, 0.007425), \\ a_4 &= 0.0072 \quad (0.006839, 0.00756). \end{aligned}$$

Для описания радиационной деградации мощности трехкаскадных ФЭП будем использовать полуэмпирическую формулу из [28–30]

$$\beta_f(\Phi_1) = 1 - C \ln \left(1 + \frac{\Phi_1}{\Phi_X} \right), \quad (2.16)$$

где C и Φ_X — константы, значения которых подбираются с помощью экспериментальных данных. Данные о деградации мощности ФЭП были взяты из документации фирмы производителя [129] для рассматриваемых трёхкаскадных ФЭП фирмы Spectrolab на основе GaInP₂/GaAs/Ge с коэффициентом полезного действия (КПД) равным 25.1%. Используя нелинейный метод наименьших квадратов, реализованный в функции fit [133] в среде MATLAB, были получены следующие значения коэффициентов:

$$C = 0.1037, \quad \Phi_X = 2.432 \times 10^{14} \text{ см}^{-2} \quad (2.17)$$

При этом для минимизации суммы квадратов невязок использовался метод Левенберга-Марквардта с начальным приближением $C_i = 0.49743$, $\Phi_{Xi} = 7.22 \times 10^{13} \text{ см}^{-2}$. Полученная зависимости относительной мощности от эквивалентного флюенса изображена на Рисунке 2.7. На Рисунках 2.6–2.7 видно, что трёхкаскадный ФЭП обладает большей радиационной стойко-

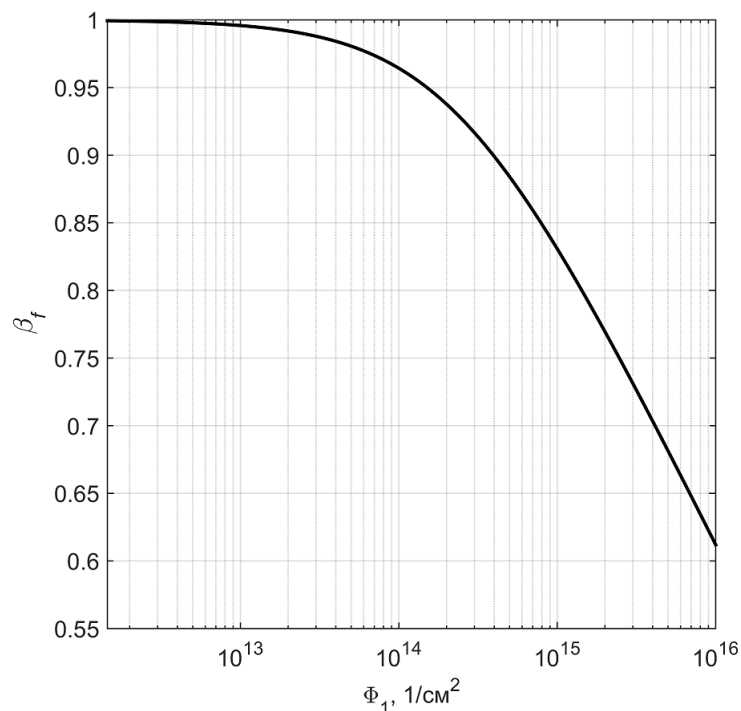


Рисунок 2.7 – Зависимость относительной мощности от величины эквивалентного флюенса нормально падающих на СБ электронов энергией 1 МэВ для трёхкаскадного ФЭП производства фирмы Spectrolab на основе GaInP₂/GaAs/Ge с КПД 25.1%

стью, чем ФЭП на основе кристаллического кремния.

Для анализа радиационной деградации СБ связного КА с СЭРДУ на протяжении всего периода его существования будем считать, что срок активного существования (САС) состоит из двух частей: этап выведения на ГСО с помощью ЭРДУ и этап выполнения целевой задачи на ГСО. Длительность этапа выведения, как правило, составляет порядка несколько месяцев и определяется при проектно-баллистическом анализе. Длительность этапа выполнения целевой задачи, как правило, гораздо дольше и составляет порядка 10–15 лет. При этом будем считать, что в течение всего этого времени КА находится на ГСО. Поскольку в течение всего САС мощность СБ только уменьшается и при проектировании КА необходимо гарантировать достаточный уровень энергоприхода на конец САС, то в целевой функционал для большей наглядности будем включать деградацию СБ за время нахождения КА на ГСО вплоть до конца САС. Для этого рассмотрим следующую функцию:

$$\beta_1(t) = 1 - C \ln \left(1 + \frac{\Phi_1(t) + \Phi_{\text{ГСО}}}{\Phi_X} \right), \quad (2.18)$$

где $\Phi_{\text{ГСО}} = 3.54 \times 10^{14} \text{ см}^{-2}$ – эквивалентный флюенс электронов 1 МэВ накопленный ФЭП с момента окончания выведения на ГСО и до конца САС, рассчитанный с помощью программного комплекса IRENE за период с 01.01.2021 года по 01.01.2036 года. Заметим, что величина $\beta_1(T)$

равна относительной мощности на конец САС. Поэтому будем называть функцию $\beta_1(t)$, $t \in [0; T]$ неосредненной относительной мощностью СБ на конец САС. Аналогично введем осредненную относительную мощность СБ на конец САС:

$$\beta(t) = 1 - C \ln \left(1 + \frac{\Phi(t) + \Phi_{\text{ГСО}}}{\Phi_X} \right). \quad (2.19)$$

Величину $\beta(T)$ будем рассматривать в качестве целевого функционала в задаче оптимизации снижения радиационной деградации СБ на конец САС. При этом для получения дополнительного уравнения вида (1.15) введём следующую функцию $\gamma(t) = (\Phi(t) + \Phi_{\text{ГСО}}) / \Phi_X$. Тогда согласно (2.19) и (2.12) имеем

$$\beta(t) = 1 - C \ln (1 + \gamma(t)), \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{U(r, i)}{\Phi_X} \equiv V(r, i),$$

и, соответственно, можно получить дифференциальное уравнение для новой фазовой переменной $\beta(t)$, $t \in [0; T]$ следующего вида:

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{CV(r(t), i(t))}{1 + \gamma(t)} = -CV \exp \left(-\frac{1 - \beta}{C} \right) \quad (2.20)$$

с начальным условием $\beta(0) = 1 - C \ln (1 + \Phi_{\text{ГСО}}/\Phi_X)$. Данное уравнение можно рассматривать как конкретный вид дополнительного уравнения движения (1.15).

Следует отметить, что использование выражения (2.16) для описания деградации мощности ФЭП имеет ряд преимуществ по сравнению с выражением (2.14). Среди них большая компактность выражения, меньшее число коэффициентов, подбираемых из экспериментальных данных, и самое главное — при использовании выражения (2.16) удаётся получить явный вид решения (1.32) уравнения сопряженного к $Q = \beta$. Полученный вид решения в этом случае приведён в главе 3.

Глава 3

Траектории выведения на ГСО с минимальной радиационной нагрузкой

3.1 Оптимизация многовитковых перелётов межорбитального буксира с ЯЭРДУ

В данном разделе рассматривается задача оптимизации траектории многовиткового перелёта на ГСО многоразового электроракетного буксира (МЭРБ) с ядерной электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) мегаваттного класса мощности [134] с целью снижения воздействия космической радиации на бортовую аппаратуру. Рассматривается вариант многократного перелёта между низкой круговой орбитой базирования с ненулевым наклоном и ГСО [135]. При этом МЭРБ доставляет на ГСО за один рейс полезную нагрузку массой до 10–15 тонн. Полезная нагрузка вместе с расходными компонентами для ЭРДУ располагается в модуле полезной нагрузки (МПН). Предполагалось, что МЭРБ и МПН выводятся на начальную орбиту отдельно, по двухпусковой схеме. Первым пуском выводится МЭРБ, который с помощью РБ переводится на низкую круговую орбиту с ненулевым наклоном, которую будем далее называть радиационно безопасной орбитой (РБО). Вторым пуском выводится МПН. МПН также с помощью РБ переводится на РБО и совершает стыковку к МЭРБ. Далее связка МЭРБ+МПН с помощью ЭРДУ и бортовой ядерной энергетической установки (ЯЭУ) совершает перелёт на ГСО. Возвращение МЭРБ на РБО после расстыковки с МПН на ГСО не рассматривалось, также как и последующие рейсы МЭРБ.

Будем считать, что МЭРБ и МПН в совместной фазе полёта движутся только под действием силы притяжения Земли и силы тяги ЭРДУ. Потенциал притяжения Земли будем считать центральным ньютоновским. Всеми остальными возмущающими силами пренебрежем. Будем

считать, что ЭРДУ всегда работает в режиме максимальной тяги, и тяга в течение всего перелёта постоянна и равна P . Электрическая мощность, необходимая для работы ЭРДУ, генерируется бортовой ЯЭУ. Удельный импульс ЭРДУ также будем считать постоянным в течение всего перелёта и равным I_{sp} . Кроме того, будем считать, что на возможную ориентацию вектора тяги ЭРДУ не наложено ограничений, и при этом соответствующие развороты связки МЭРБ+МПН будут происходить без затрат рабочего тела.

Пусть в начальный момент связка МЭРБ и МПН имеет массу m_0 и находится на РБО, высота которой равна $h_{РБО} = 800$ км, а наклонение $-i_0 > 0$. При этом $a_0 = R_E + h_{РБО}$. Конечной орбитой будем считать ГСО, параметры которой примем следующими: высота равна $h_{ГСО} = 35793$ км, эксцентриситет и наклонение равны нулю. Угловое положение на начальной орбите фиксировано, а на конечной — произвольно. Для оценки радиационной нагрузки на бортовые системы МЭРБ будем рассчитывать дозу космического ионизирующего излучения, поглощенную некоторым чувствительным элементом (ЧЭ), который расположен в приборно-агрегатном отсеке (ПАО) МЭРБ. Будем искать такие программы управления вектором тяги ЭРДУ, что соответствующие траектории многовиткового перелёта с начальной орбиты на конечную имели бы наименьшую дозу радиации, поглощенную ЧЭ за время перелёта.

3.1.1 Минимизация дозы в случае околокругового движения

В данном разделе приводятся результаты расчётов траекторий выведения МЭРБ с МПН на ГСО с минимальной дозой в случае околокругового движения КА, рассматриваемом в работе автора [67]. Используемая методика расчётов описана в разделе 1.6. При этом в качестве целевого функционала Q_k использовалась осредненная доза $D(T)$ на конец перелёта (2.4), рассчитанная по аппроксимационной модели DSP8N (см. с. 36). Соответственно, при этом в уравнениях оптимального движения (1.57)–(1.60) полагалось $f_Q = N_D$. В качестве значений проектных параметров МЭРБ использовались следующие: $m_0 = 40797$ кг, $P = 27.929$ Н и $I_{sp} = 7240$ с. Таким образом, начальное реактивное ускорение КА составляет $\sim 6.85 \times 10^{-4}$ м/с². За исключением удельного импульса рассматриваемые параметры МЭРБ близки к параметрам варианта МЭРБ из статьи [134] с мощностью ЯЭУ 1070 кВт.

Перед применением методики расчёта оптимальных траекторий был проведен ряд верификационных тестов, связанных как с проверкой самих уравнений движения, так и с откликом системы на функцию мощности дозы. Всё численное моделирование, проведённое в данном разделе было полностью выполнено в среде MATLAB R2011b (7.13.0.564) 32-bit (win32).

Для проверки правильности используемой реализации уравнений движения и формализма принципа максимума были проведен тест на решение задачи оптимального быстрогодействия. В таком случае функция мощности дозы полагалась $N_D = 1$. Результаты сравнивались с решением из работы [107]. В этой работе были приведены результаты оптимизации перелёта с релейным управлением для следующих краевых условий: $a_0 = 6771$ км, $i_0 = 51.6^\circ$, $a_f = 42164$ км, $i(v_f) = 0$ (ГСО). Программы управления $\psi_0 = \psi_0(v)$ оказались практически совпадающими. Зависимости радиуса от характеристической скорости $r = r(v)$ в обеих работах имеют немонотонный участок («заброс», ниже по тексту его будет можно увидеть на рисунках). Наклонение $i = i(v)$ изменяется монотонно в обоих случаях. Конечная характеристическая скорость v_f в указанной работе составляет 7.805 км/с, тогда как полученное тесте значение равно 7.822 км/с (отличие на 0.2%).

Для проверки правильности реакции системы на форму функции мощности дозы были проведены тесты, в которых выбирались в качестве N_D некоторые модельные функции, для которых заранее будет известно в какую область должны притягиваться результирующие траектории. В качестве таких модельных функций были выбраны следующие:

$$N_{D,1}(r, i) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{i - 30}{10} \right)^2 \right],$$

$$N_{D,2}(r, i) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{r - 2.15 \times 10^7}{2.5 \times 10^6} \right)^2 \right],$$

$$N_{D,3}(r, i) = \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{i - 20}{10} \right)^2 \right] \right) \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{r - 1.75 \times 10^7}{2.5 \times 10^6} \right)^2 \right] \right),$$

в которые необходимо подставлять значения радиуса r в метрах, а наклона i — в градусах. Каждая из этих функций — константа, равная единице, за исключением «долин» различной конфигурации, где мощность дозы снижается до нуля. Функция $N_{D,1}$ имеет «долину» при наклоне 30° , $N_{D,2}$ — при радиусе 21500 км, а функция $N_{D,3}$ имеет пересечение двух «долин» по наклону и радиусу при наклоне 20° и радиусе 17500 км. Траектория с минимальной дозой должна иметь тенденцию как можно большую часть времени перелёта находиться в «долине», а не на «равнине». Радиус и наклонение начальной орбиты в трёх этих тестах были одинаковы и равны $a_0 = 7171$ км, $i_0 = 51.6^\circ$, соответственно. Целевая орбита — ГСО. Для каждого тестового перелёта применялся алгоритм мултистарта, описанный в разделе 1.6. Для некоторых полученных траекторий зависимости радиуса оскулирующей орбиты от наклона представлены на Рисунке 3.1–3.3, оттенками серого обозначена осредненная мощность дозы. На этих рисунках траектория с минимальным временем представлена пунктирной линией, а различные решения задачи на минимум дозы — сплошными линиями. Результаты тестов совпадают с ожиданиями.

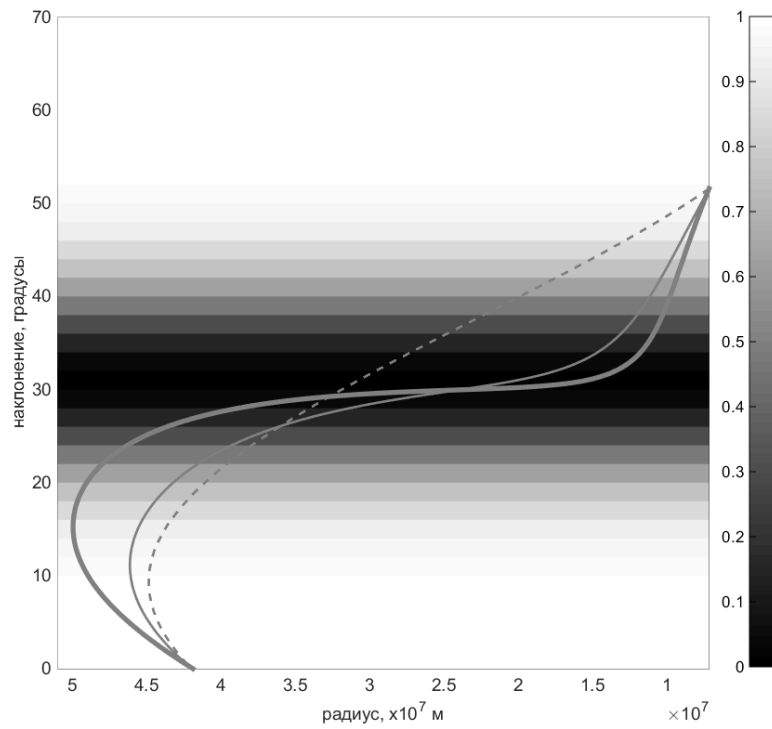


Рисунок 3.1 – Тест с модельной функцией мощности дозы $N_{D,1}$. Пунктирная линия — траектория с минимальным временем, сплошные линии — различные решения задачи на минимум дозы.

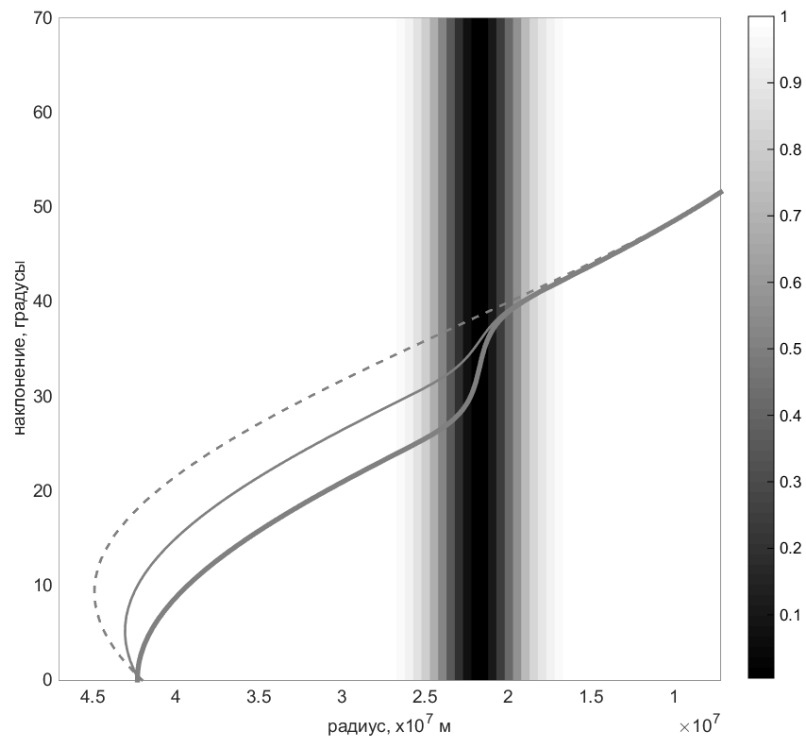


Рисунок 3.2 – Тест с модельной функцией мощности дозы $N_{D,2}$. Пунктирная линия — траектория с минимальным временем, сплошные линии — различные решения задачи на минимум дозы.

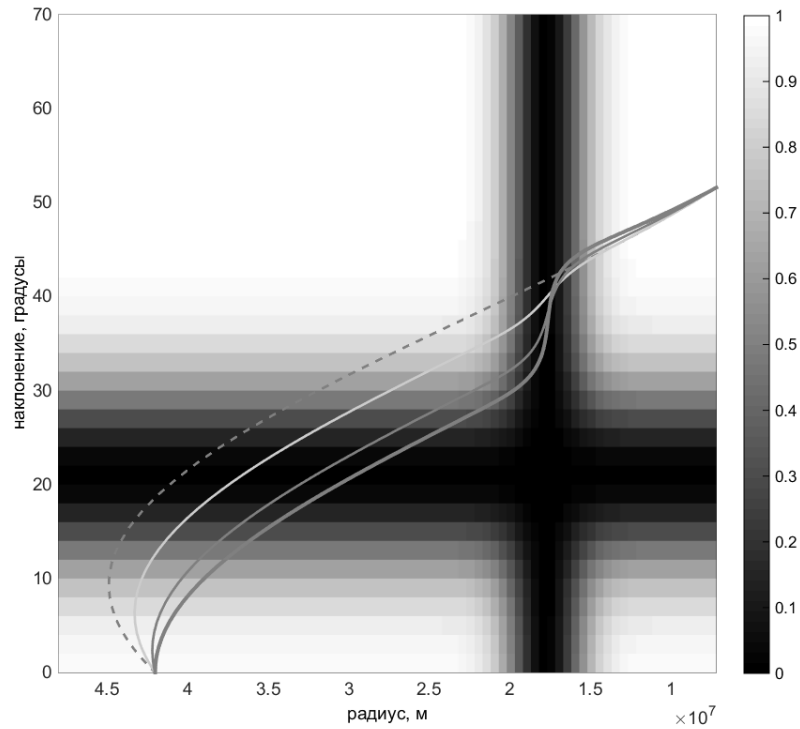


Рисунок 3.3 – Тест с модельной функцией мощности дозы $N_{D,3}$. Пунктирная линия — траектория с минимальным временем, сплошные линии — различные решения задачи на минимум дозы.

После проведения всех тестов методика решения задачи минимизации дозы радиации, описанная в разделе 1.6, была применена для случая использования аппроксимационной модели мощности дозы радиационных поясов Земли DSP8N. Было выбрано 7 значений начальных наклонений: 5° , 15° , 28.5° , 42° , 51.6° , 63.2° и 78° . Значение подобранного начального приближения решения задачи оптимального быстрогодействия в случае перелёта на ГСО с начальной орбиты с наклонением $i_0 = 5^\circ$ было следующим $\vec{z}_0^* = (\lambda_{a0} \ \lambda_{i0} \ v_f)^T = (0.5 \ -1 \ 1)^T$. Для всех остальных перелётов подошло значение $\vec{z}_0^* = (1 \ -1 \ 1)^T$. Число запусков функции lsqnonlin для решения нелинейной системы уравнений (1.63) было выбрано равным $k = 100$. Зависимости радиуса оскулирующей орбиты от наклонения на некоторых из полученных таким образом траекториях представлены на Рисунках 3.4–3.7. Оттенками серого на этих рисунках обозначена мощность дозы. В целом удалось получить снижение накопленной дозы от 2% до 40% от дозы на траектории оптимального быстрогодействия в зависимости от начального наклонения. При этом время выведения увеличивается всего на 0.5–4.5%, а дополнительные затраты характеристической скорости составляют 26–382 м/с. На Рисунках 3.4–3.7 видно, что траектории имеют две тенденции, проявляющиеся по мере снижения дозы. Первая тенденция — траектории стремятся избежать области высокой мощности дозы, то есть радиационные пояса Земли, пролетев

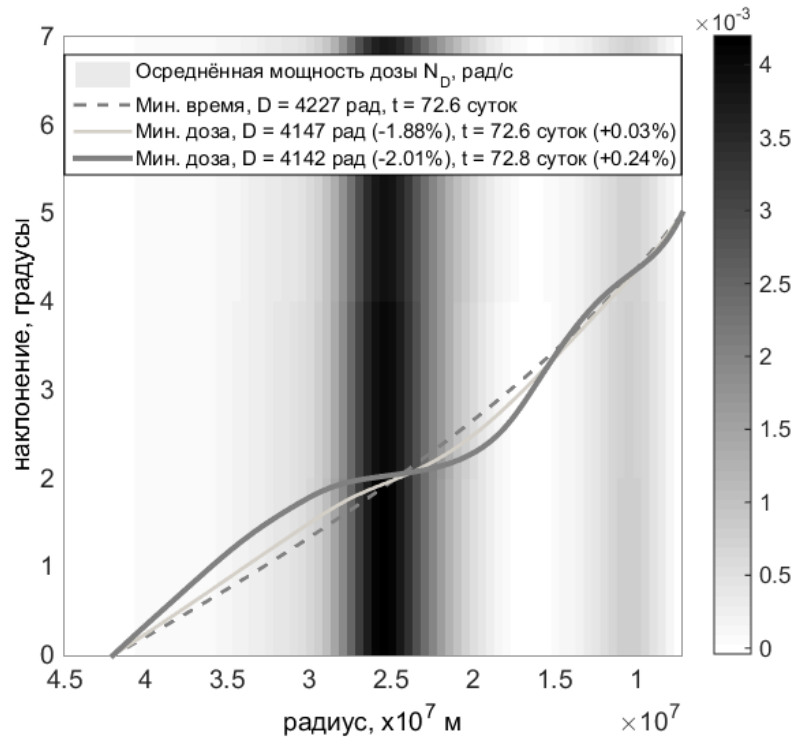


Рисунок 3.4 – Траектории перелёта на ГСО с минимальной дозой. Наклонение начальной орбиты составляет $i_0 = 5^\circ$.

как можно дольше в областях с малой мощностью дозы. Вторая тенденция — если попадание в область высокой мощности дозы не удаётся избежать, то траектории стараются не менять наклонение внутри области высокой мощности дозы, а менять лишь большую полуось орбиты. Последняя тенденция хорошо согласуется с механикой космического полёта, поскольку известно, что манёвр изменения наклонения орбиты гораздо более затратный по характеристической скорости, а, следовательно, более долгий, чем манёвр увеличения большой полуоси орбиты. Поэтому действительно более выгодным (в смысле поглощенной дозы радиации) пересекать радиационные пояса Земли «быстро» увеличивая большую полуось внутри них, а затем вне поясов «медленно» изменять наклонение орбиты.

Рассмотрим ещё серию задач оптимального быстрогодействия при различных i_0 , и рассчитаем на полученных траекториях осредненную поглощенную дозу. Отложим результаты расчётов для этой серии задач, а также для всех описанных выше траекторий с минимальной дозой при различных i_0 в осях «доза–время». Результат представлен на Рисунке 3.8. Видно, что все полученные траектории с минимальной дозой доминируют по Парето [105, 106] над траекториями с минимальными временем. Это говорит о возможной большей привлекательности траекторий выведения с минимальной дозой по сравнению с оптимальными по быстроддействию траекториями, если рассматривается двухкритериальная задача минимизации дозы и времени перелёта.

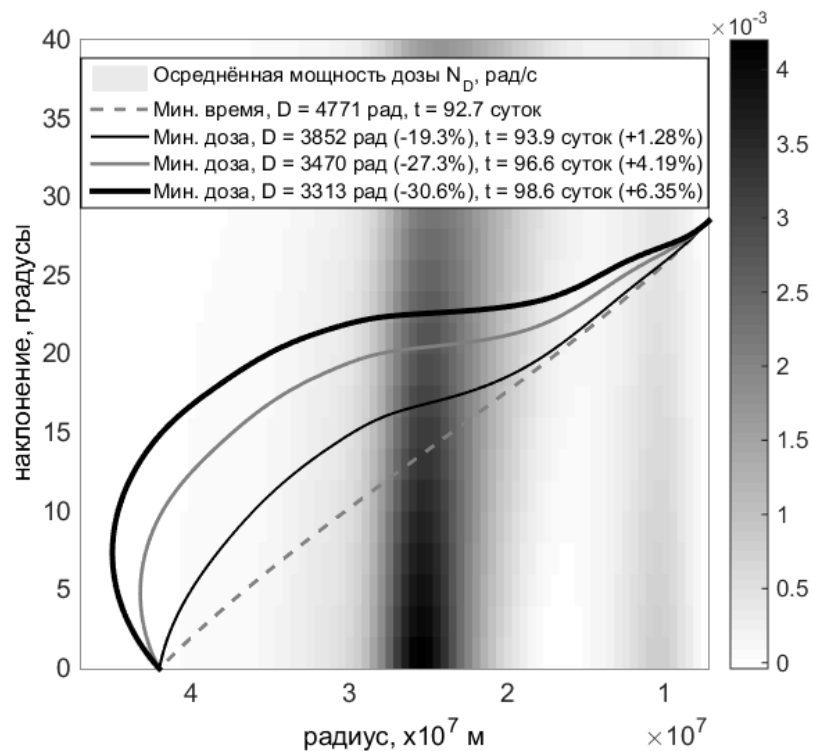


Рисунок 3.5 – Траектории перелёта на ГСО с минимальной дозой. Наклонение начальной орбиты составляет $i_0 = 28.5^\circ$.

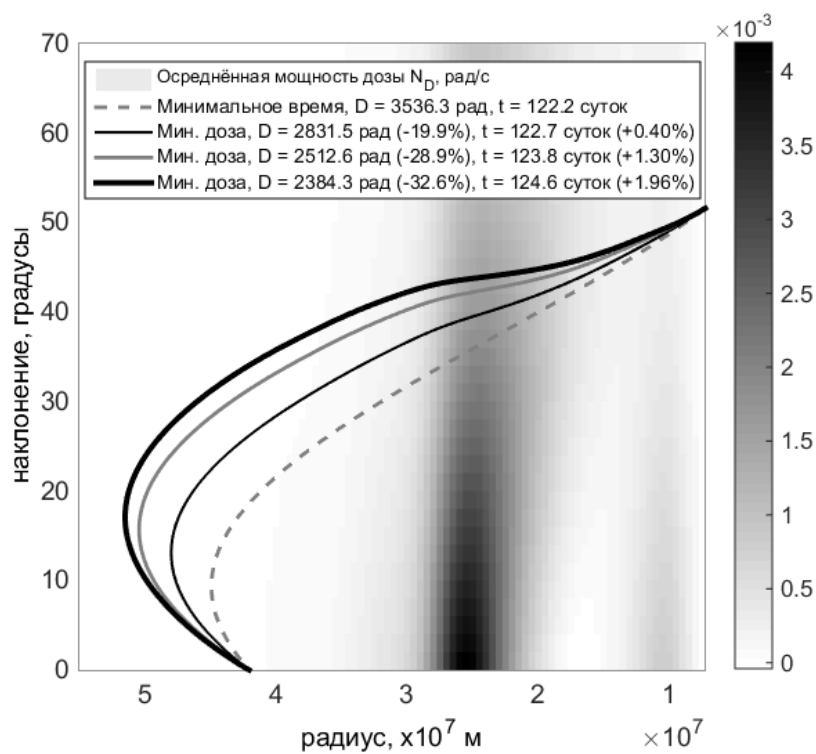


Рисунок 3.6 – Траектории перелёта на ГСО с минимальной дозой. Наклонение начальной орбиты составляет $i_0 = 51.6^\circ$.

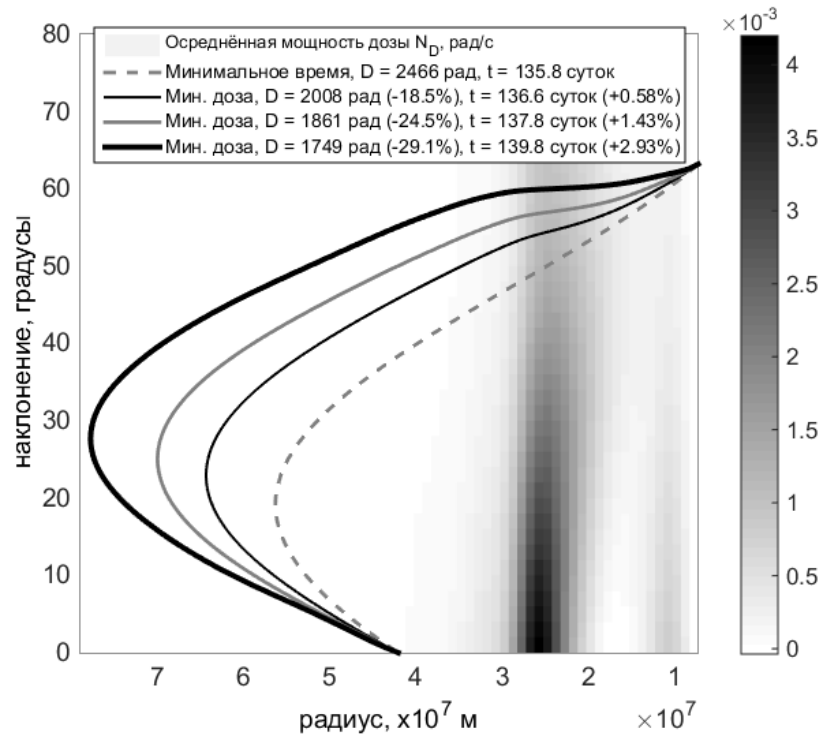


Рисунок 3.7 – Траектории перелёта на ГСО с минимальной дозой. Наклонение начальной орбиты составляет $i_0 = 63.2^\circ$.

Стоит отметить, что это утверждение может перестать быть справедливым при добавлении в задачу многокритериальной оптимизации других критериев качества и ограничений.

3.1.2 Оптимальное быстродействие с фиксированной дозой

В отличие от предыдущего раздела в данном рассматривается движение МЭРБ с МПН не только по околокруговым оскулирующим орбитам, но и по произвольным эллиптическим. Этот факт существенно расширяет класс траекторий, на которых ищутся траектории с минимальной поглощенной дозой. Для решения задачи в таком классе траекторий используется методика, описанная в разделах 1.1–1.5. Результаты, изложенные в данном разделе, опубликованы в работах автора [69, 72].

В качестве минимизируемого целевого функционала рассматривается осредненная доза D ($Q_k = D(T)$). При этом в задачу оптимального быстродействия добавляется новая фазовая переменная $Q(t) = D(t)$, $t \in [0; T]$, равная осредненной дозе накопленной ЧЭ от начала перелёта с помощью ЭРДУ и до момента времени t . Эта новая фазовая переменная удовлетворяет уравнению (2.5), которое является конкретным видом дополнительного уравнения (1.15). Явный вид

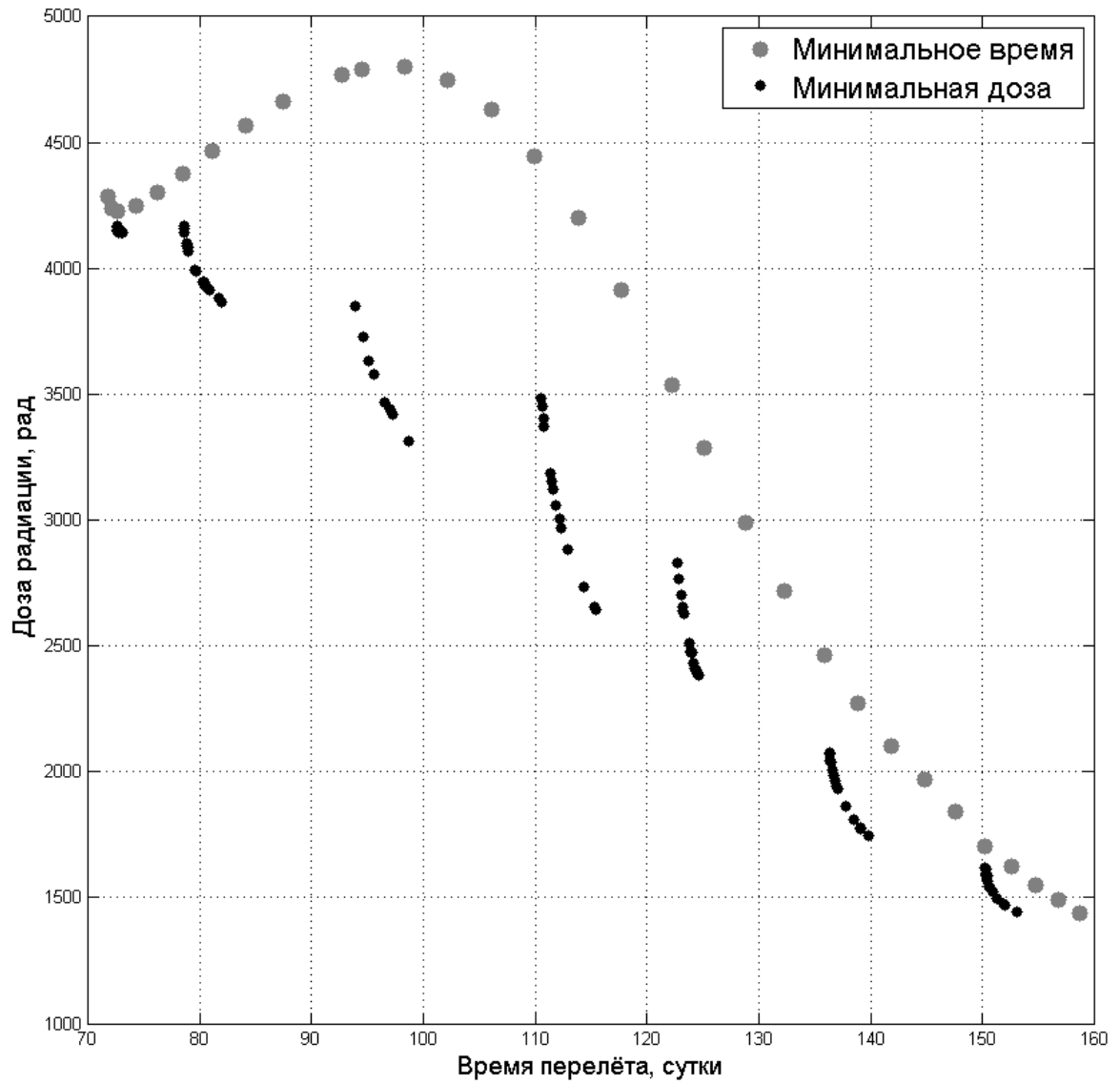


Рисунок 3.8 – Результаты оптимизации траекторий выведения МЭРБ на ГСО в осях «доза–время» при различных наклонениях начальной низкой круговой орбиты i_0 .

общего ограничения (1.16) в данном разделе будет следующий:

$$D(T) = D_f. \quad (3.1)$$

Соответственно, в уравнениях оптимального движения (1.33)–(1.36) полагалось $f_Q = N_D$. Расчёты осредненной мощности дозы N_D проводились с помощью четырёх аппроксимационных моделей: DIR8N, DIR8X, DIR9M и DIR95 (см. с. 37–39). Также заметим, что правая часть уравнения для осредненной дозы (2.5) не зависит от дозы D , поэтому из уравнений (1.31)–(1.32) следует, что для явного вида решения сопряженного к дозе уравнения имеем $p_D(t) = p_D(0) = const$ и $R_Q \equiv 1$.

Далее в качестве значений проектных параметров МЭРБ использовались следующие: $m_0 = 40$ т, $P = 27$ Н, $I_{sp} = 4762$ с, которые соответствуют описанному в работе [134] варианту МЭРБ с электрической мощностью ЯЭУ равной 1070 кВт. Начальное наклонение в данном разделе фиксируется и принимается равным $i_0 = 51.6^\circ$. Движение МЭРБ будем рассматривать без учёта второй зональной гармоники разложения гравитационного потенциала Земли, полагая $J_2 = 0$ в уравнениях оптимального движения.

Практический интерес имеет только снижение конечной дозы ниже её значения на траектории оптимального быстрогодействия, то есть когда $D_f < D_{\min T}$. Но величина максимального снижения поглощенной дозы заранее неизвестна, поэтому проводилась следующая процедура. Сначала требуемое значение поглощенной дозы полагалось $D_f = 0$ и запускалось интегрирование по параметру продолжения системы (1.45), (1.46) в случае осредненного движения. При этом в качестве начального значения вектора неизвестных параметров использовалось значение (1.48) для траектории оптимального быстрогодействия. На каждом принятом шаге численного интегрирования уравнений метода продолжения по параметру после коррекции получалась траектория с близкими к нулю невязками по всем переменным, кроме дозы. По мере увеличения параметра продолжения эта невязка уменьшалась, и получался целый набор траекторий перелёта МЭРБ между заданными орбитами с дозой, меньшей дозы на траектории оптимального быстрогодействия. При некотором значении параметра продолжения $\tau = \tau_f < 1$ наблюдалось существенное увеличение невязок на правом конце. При этом часто либо минимальная высота перицентра на траектории опускалась ниже 300 км, либо максимальная высота апоцентра поднимались выше орбиты Луны. Матрица в правой части (1.45) при этом оказывалась необратимой. В этот момент интегрирование по параметру продолжения прерывалось. Далее если шаги по τ были слишком большие и была необходимость получить более подробное решение $\vec{z}(\tau)$, $\tau \in [0; \tau_f]$, то интегрирование системы (1.45), (1.46) перезапускалось со значением D_f , равным значению осредненной дозы $D(T)$ при $\tau = \tau_f$, и более мелким шагом по параметру продолжения.

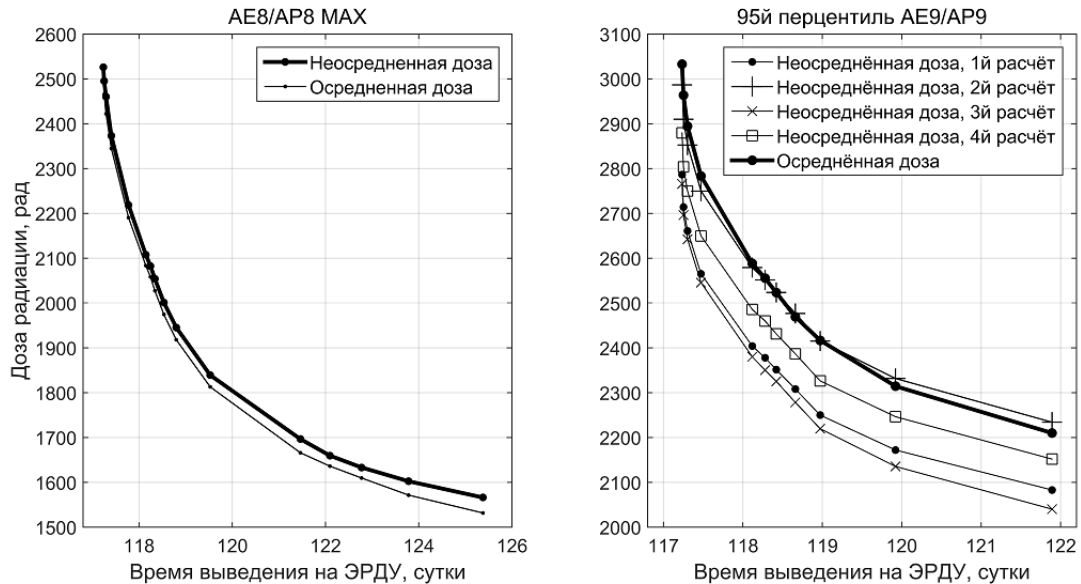


Рисунок 3.9 – Зависимость неосредненной и осредненной доз от времени перелёта на полученных траекториях.

Указанная выше процедура проводилась для всех четырех аппроксимационных моделей мощности дозы. Далее полученные неизвестные параметры осредненной краевой задачи $\bar{z}(\tau)$, $\tau \in [0; \tau_f]$ использовались для интегрирования неосредненных уравнений оптимального движения (1.33), (1.34), (2.5), (1.36) и расчёта неосредненной дозы D_1 . Зависимость осредненной (2.4) и неосредненной дозы (2.1) от времени перелёта на полученных траекториях в случае модели DIR8X показана на Рисунке 3.9 слева. Каждой точке на графике соответствует траектория при определенном значении параметра продолжения. Видно, что осредненная и неосредненная дозы достаточно хорошо совпадают. Ошибка аппроксимации конечной неосредненной дозы осредненной дозой на полученных траекториях в случае моделей DIR8N, DIR8X и DIR9M не превышает 2.2%. Поскольку модель DIR95 является аппроксимацией 95-го перцентиля мощности дозы, рассчитанного по 40 реализациям случайного поля, то значения осредненной мощности дозы в данной модели и интеграл от неё по траектории будет зависеть от конкретных реализаций случайного поля потоков частиц РПЗ. Если в набор реализаций попали случаи с низкой мощностью дозы вдоль траектории, то неосредненная доза может существенно отличаться от осредненной дозы. Но всё же в большинстве случаев неосредненная доза не будет превосходить осредненную. Поэтому осредненную дозу в модели DIR95 можно рассматривать как оценку накопленной дозы в худшем случае. На Рисунке 3.9 справа приведена зависимость осредненной и неосредненной дозы от времени перелёта на полученных траекториях для случая модели DIR95. Неосредненная доза рассчитывалась четыре раза с различными начальными значениями генератора случайных чисел модели потоков РПЗ. Видно, что все четыре расчёта неосредненной дозы отличаются

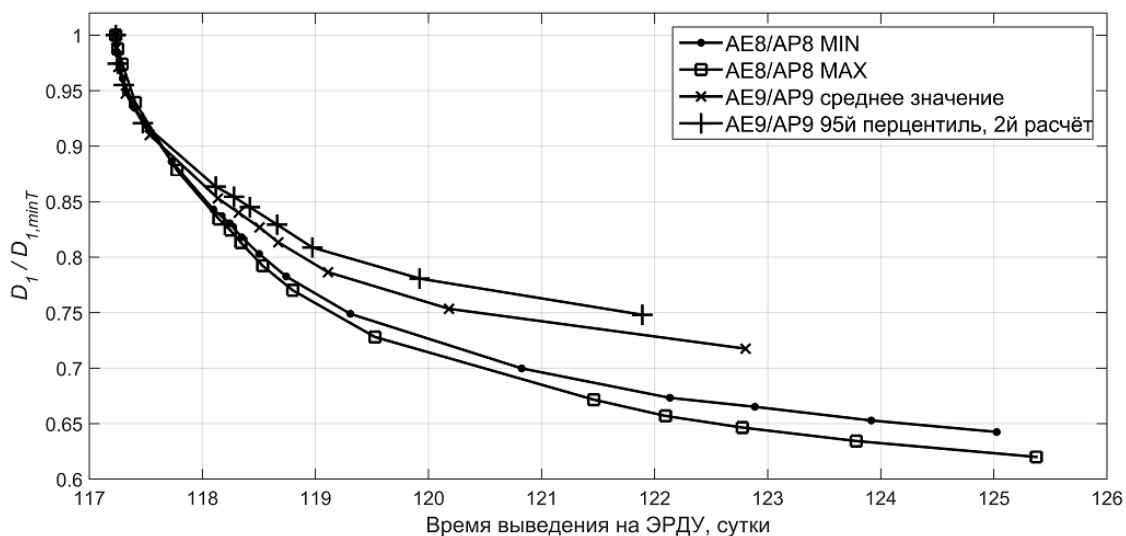


Рисунок 3.10 – Отношение неосредненной дозы на полученных траекториях к неосредненной дозе на траектории оптимального быстрогодействия в зависимости от времени перелёта.

примерно на константу от осредненной дозы. Но при этом следует отметить, что осредненная доза для всех моделей мощности дозы является хорошим индикатором относительной дозовой нагрузки: если осредненная доза от траектории к траектории снижается, то и, скорее всего, снизится неосредненная доза. Поэтому принятое упрощение о зависимости мощности дозы только от радиуса и наклона оскулирующей орбиты вполне допустимо в данной работе.

Для сравнения возможностей снижения конечной дозы для каждой модели мощности дозы был проведён расчёт отношения неосредненной дозы на полученных неосредненных траекториях к неосредненной дозе на траектории оптимального быстрогодействия. Результаты расчётов этого отношения в зависимости от времени перелёта показаны на Рисунке 3.10 и в зависимости от разности затрат характеристической скорости на полученной траектории и на траектории оптимального быстрогодействия — на Рисунке 3.11. На этих рисунках видно, что предложенная выше методика снижения дозовой нагрузки на траектории выведения МЭРБ с помощью специального управления работоспособна и позволяет получить траектории с дозой, меньше чем на траектории оптимального быстрогодействия. Максимально удаётся снизить конечную дозу радиации на 25–38% от дозы на траектории оптимального быстрогодействия в зависимости от модели потоков РПЗ. При этом время выведения увеличивается на 4–7% от оптимального времени выведения, а затраты характеристической скорости увеличиваются относительно траектории оптимального быстрогодействия на 320–560 м/с.

На Рисунке 3.12 показано как менялась траектория перелёта в случае модели DIR8X по мере увеличения параметра продолжения τ и, соответственно, снижения конечной дозы радиа-

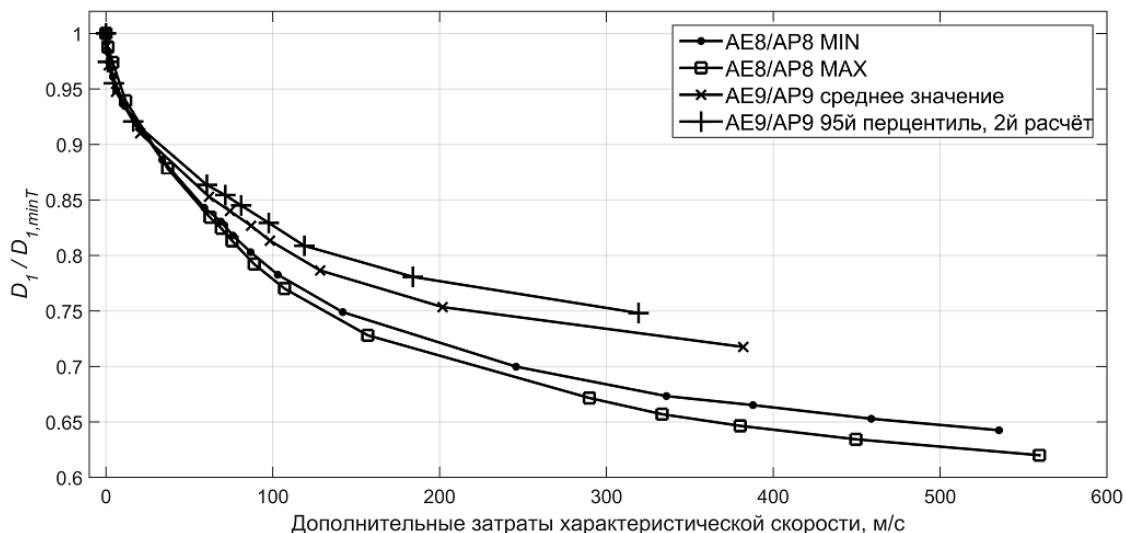


Рисунок 3.11 – Отношение неосредненной дозы на полученных траекториях к неосредненной дозе на траектории оптимального быстрогодействия в зависимости от дополнительных затрат характеристической скорости на перелёт.

ции. Траектории при каждом значении параметра продолжения представлены в осях «радиус–наклонение». Две пунктирные линии на каждом графике показывают зависимости высоты перигея и апогея от наклона на траектории оптимального быстрогодействия. Две непрерывные линии соответствуют зависимости высоты перигея и апогея от наклона на траектории, полученной при данном значении параметра продолжения. Оттенками серого на каждом графике показана величина осредненной мощности дозы. Видно, что сначала наблюдается тенденция к увеличению максимальной высоты перигея, чтобы вынести перигейные участки траектории из области высокой мощности дозы. Затем примерно при $\tau \approx 0.19$ высота перигея становится равной высоте апогея и оскулирующая орбита становится круговой во время всего перелёта. Далее по мере увеличения параметра продолжения максимальная высота на траектории увеличивается, пока примерно при $\tau \approx 0.36$ снова на траектории появляется ненулевой эксцентриситет. На всех траекториях полученных при дальнейшем увеличении параметра продолжения максимальный эксцентриситет монотонно растёт. Также на Рисунке 3.12 можно заметить, что аналогично результатам оптимизации в случае околокругового движения КА по мере снижения конечной дозы радиации изменение наклона орбиты всё меньше происходит в области пересечения траекторией МЭРБ радиационных поясов Земли и всё больше — вне этой области. Этот факт частично подтверждает правильность расчётов, так как видно, что с уменьшением наклона мощность дозы внутри радиационных поясов растёт, и поэтому выгоднее в плане радиационной нагрузки пересекать РПЗ (другими словами набирать высоту) в области больших наклонов.

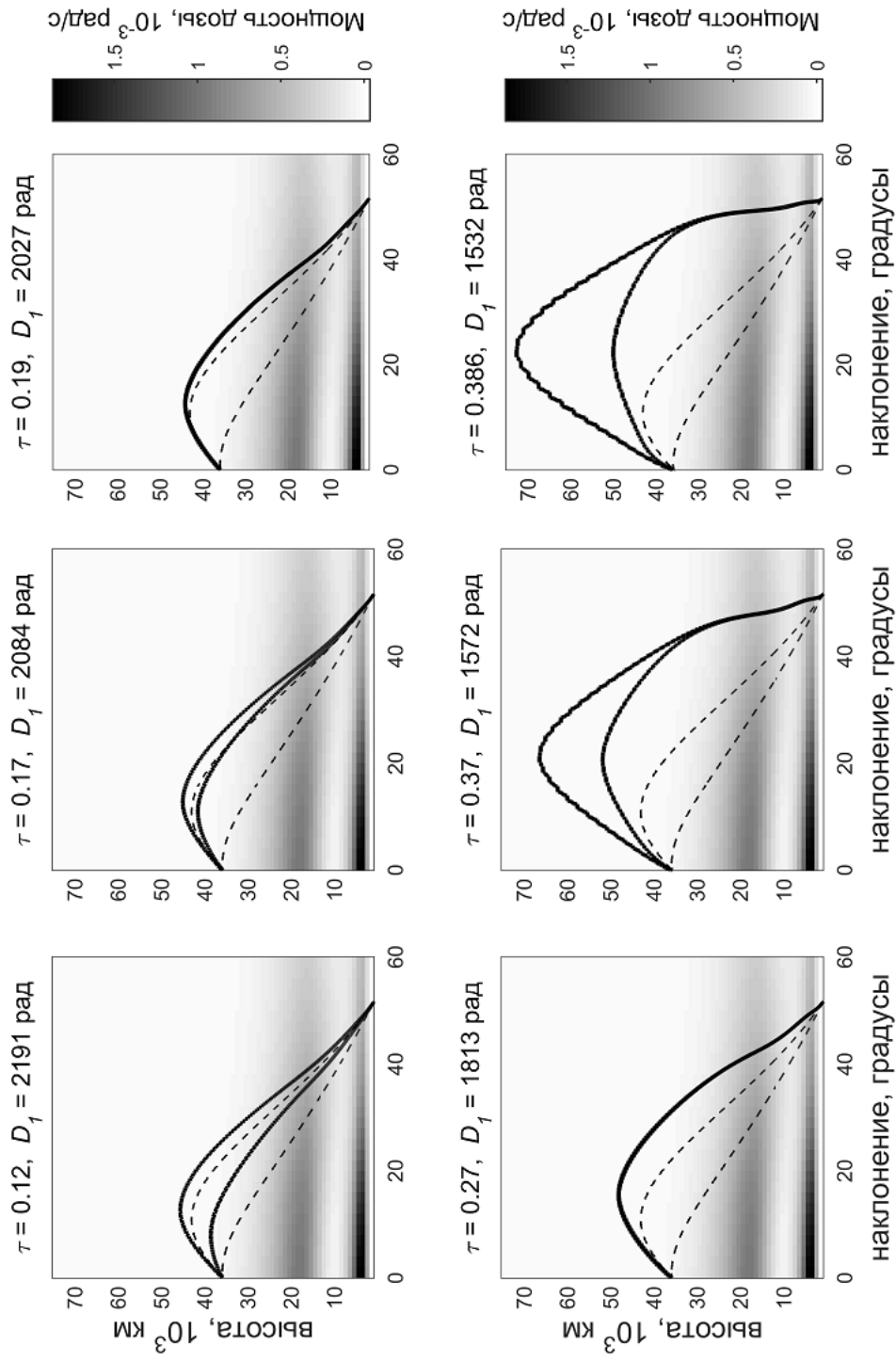


Рисунок 3.12 – Зависимости высоты перигея и апогея от наклона на полученных траекториях при различных значениях параметра продолжения τ для модели потоков частиц РПЗ АЕ8/АР8 МАХ (модель мощности дозы DIR8X).

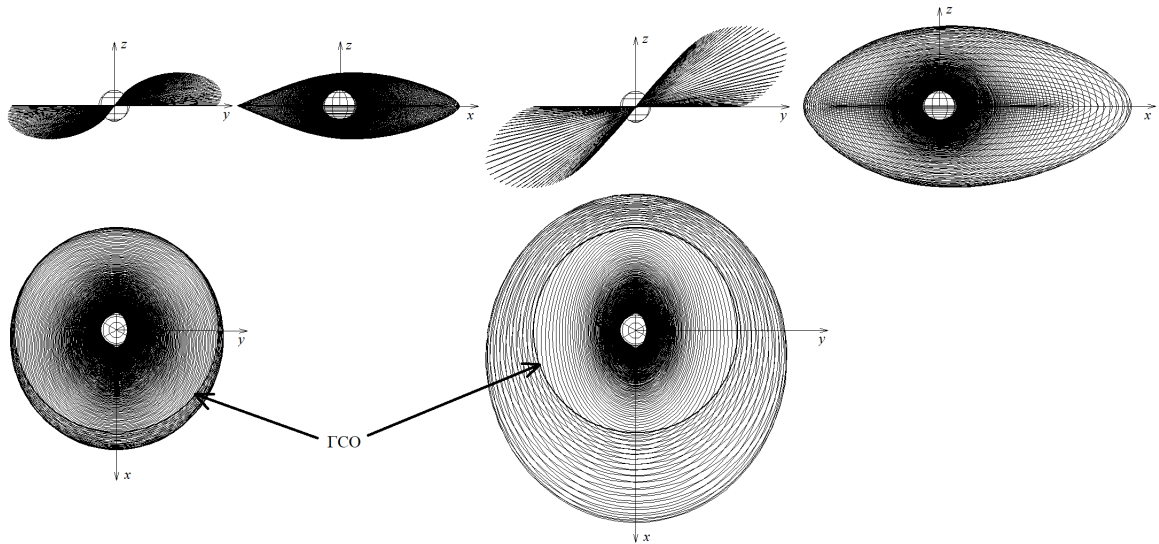


Рисунок 3.13 – Форма траектории оптимального быстрогодействия (слева) и траектории, полученной для модели потоков частиц РПЗ AE8/AP8 MAX (модель мощности дозы DIR8X) при $\tau = 0.386$ (справа).

На Рисунке 3.13 изображены проекции двух траекторий на координатные плоскости инерциальной геоэкваториальной системы координат. Траектория слева является траекторией оптимального быстрогодействия. Справа изображена траектория с наименьшей полученной дозой для модели мощности дозы DIR8X. Все проекции на Рисунке 3.13 изображены в одном масштабе. В центре каждой из проекций условно изображена Земля. Жирной линией в плоскости Oxy показана геостационарная орбита.

Для изображенных на Рисунке 3.13 траекторий на Рисунке 3.14 представлены графики зависимости углов тангажа и рысканья, а также дозы радиации, поглощенной ЧЭ, в зависимости от времени перелёта МЭРБ на ГСО с помощью ЭРДУ. Три графика слева соответствуют траектории оптимального быстрогодействия, а графики справа относятся к траектории с наименьшей полученной дозой для модели мощности дозы DIR8X. На каждом из графиков отмечены серым цветом участки траектории, когда поглощенная ЧЭ доза активно растёт. Эти участки примерно соответствуют пересечению МЭРБ внутреннего и внешнего радиационных поясов. Как видно на графиках угла рысканья для траектории с наименьшей дозой амплитуда угла рысканья снижается внутри серых областей, что приводит к меньшему изменению наклона внутри РПЗ, наблюдавшемуся на Рисунке 3.13.

Для траекторий, полученных в случае модели мощности дозы DIR8X, было проведено сравнение эффективности метода снижения дозы путём вариации траектории и метода утолщения стенок. Для этого рассчитывались дополнительные затраты массы относительно траектории оптимального быстрогодействия при толщине радиационной защиты вокруг ЧЭ, равной $\lambda_0 = 4$ мм.

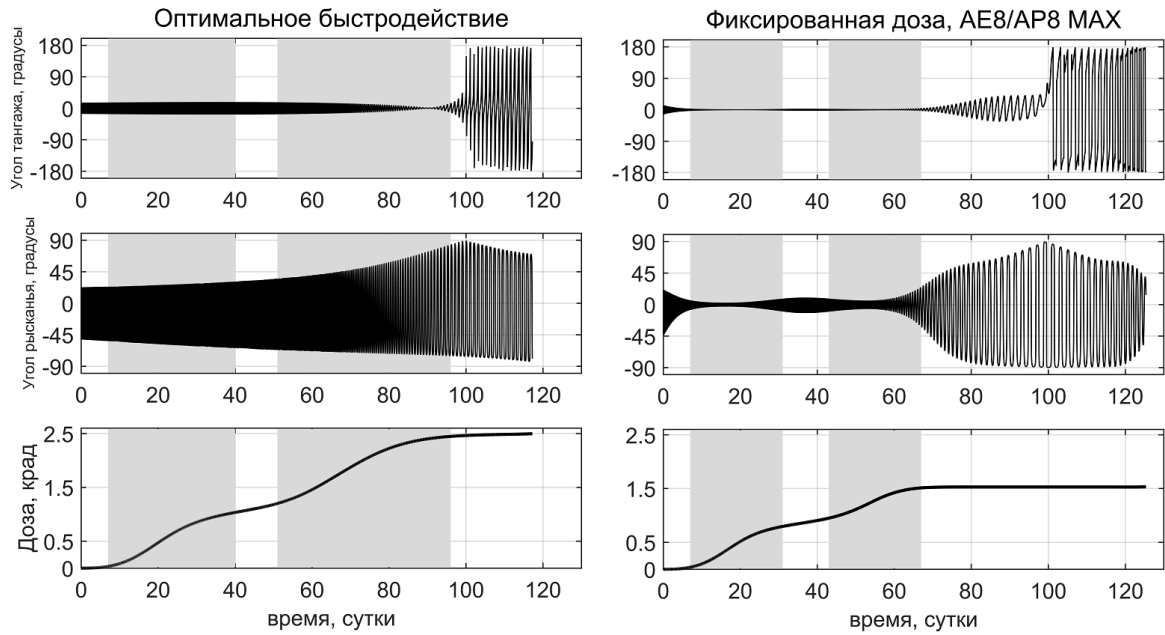


Рисунок 3.14 – Углы тангажа и рысканья, а также неосредненная доза радиации в зависимости от времени перелёта для траектории оптимального быстродействия (слева) и для траектории, полученной для модели потоков частиц РПЗ AE8/AP8 MAX (модель мощности дозы DIR8X) при $\tau = 0.386$ (справа).

При этом полагалось, что масса МЭРБ на начальной орбите одинакова для всех рассматриваемых вариантов, а дополнительные затраты массы на снижение поглощенной дозы обеспечиваются за счёт снижения массы полезной нагрузки. В случае метода вариации траектории толщина радиационной защиты фиксируется, а дополнительная масса — это масса дополнительного рабочего тела ЭРДУ и необходимых для его хранения баков. Расчёт проводился по следующей формуле, в предположении, что масса баков пропорциональна массе рабочего тела с коэффициентом $\alpha_{\text{бак}} = 0.1$:

$$\Delta m_{\text{эрду}} = (1 + \alpha_{\text{бак}}) \frac{P}{I_{sp}} (T - T_0). \quad (3.2)$$

Здесь T_0 — длительность перелёта по траектории оптимального быстродействия. В случае метода утолщения стенок фиксируется траектория перелёта, в качестве которой используется траектория оптимального быстродействия, а толщина стенок радиационной защиты варьируется. Дополнительная масса тогда рассчитывается по следующей формуле

$$\Delta m_{\text{защ}} = \rho S_{\text{защ}} (\lambda - \lambda_0) \quad (3.3)$$

где $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ — плотность материала, из которого изготовлены стенки (в данном случае рассматривается алюминий), $S_{\text{защ}}$ — площадь поверхности защищаемого объёма МЭРБ, λ — толщина стенок радиационной защиты. Результаты расчётов для различных $S_{\text{защ}}$ приведены на Рисунок

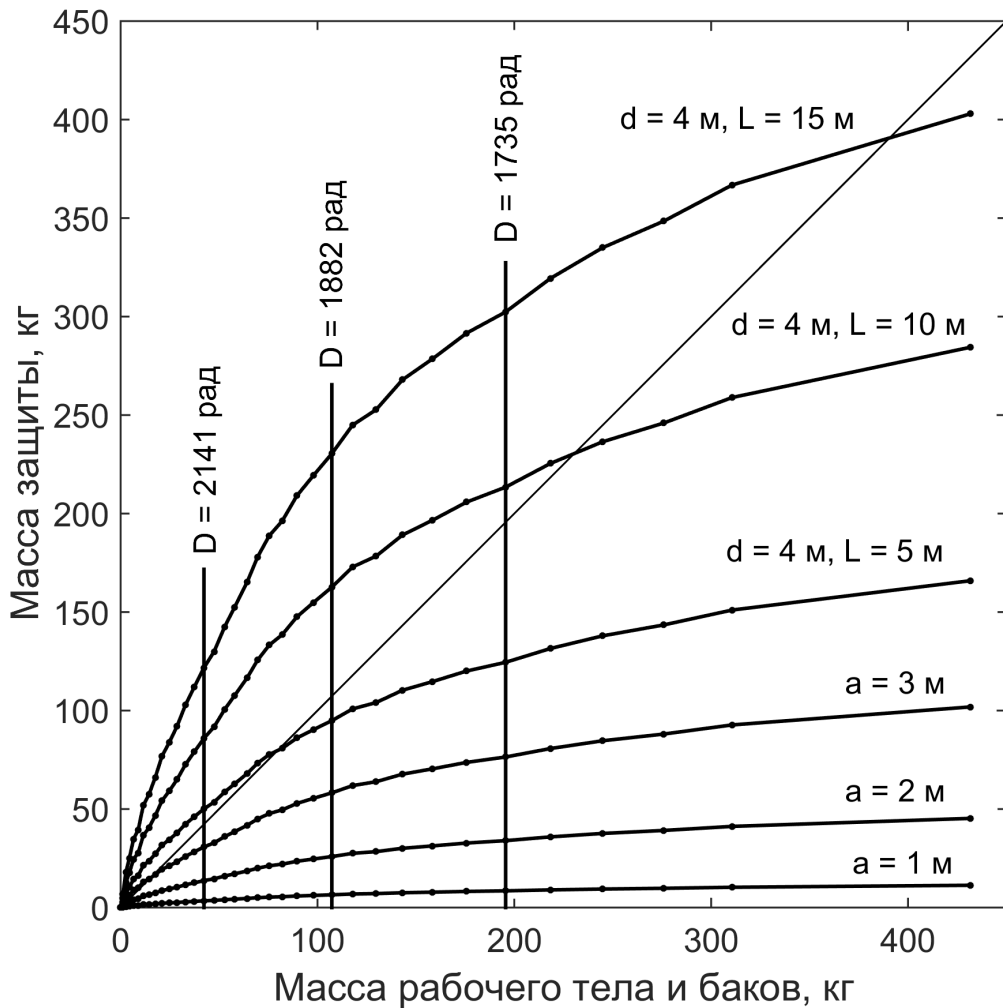


Рисунок 3.15 – Сравнение дополнительных затрат массы на снижение поглощенной дозы радиации для методов вариации траектории и метода утолщения стенок. Расчёт в случае использования модели мощности дозы DIR8X).

ке 3.15. Рассмотрены два варианта геометрии радиационной защиты. Первый вариант это куб со стороной a , внутрь которого можно поместить всю чувствительную бортовую аппаратуру. В таком случае $S_{\text{защ}} = 6a^2$. Рассматривались случаи, когда $a = 1$ м, $a = 2$ м и $a = 3$ м. Во втором варианте рассматривался цилиндр диаметром d и длиной L . Тогда $S_{\text{защ}} = \pi d(d/2 + L)$. Рассматривались случаи, когда диаметр фиксирован $d = 4$ м, а длина различная: $L = 5$ м, $L = 10$ м и $L = 15$ м. Выбранные параметры цилиндра соответствуют случаю, когда в качестве радиационной защиты рассматривается внешний корпус ПАО МЭРБ и МПН. В этом случае предполагаются, что стенки корпуса достаточно толстые $\lambda \geq 4$ мм. Каждой рассмотренной геометрии на Рисунке 3.15 соответствует жирная линия. Каждая расчётная точка на этих линиях соответствует необходимым дополнительным затратам массы, требуемым методами утолщения стенок и вариации траектории, для обеспечения одной и той же поглощенной дозы радиации. Доза

радиации вдоль каждой линии уменьшается слева направо. Уровни обеспечиваемой дозы радиации показаны вертикальными линиями. Следует отметить, что эффективность методов будет одинакова, когда $\Delta m_{\text{защ}} = \Delta m_{\text{ЭРДУ}}$. Этот случай на Рисунке 3.15 изображен диагональной тонкой линией. Соответственно, если расчётные точки лежат выше диагональной линии, то эффективнее будет метод вариации траектории, а если ниже, то — метод утолщения стенок. Видно, что для случая кубической геометрии защиты более эффективным оказывается метод утолщения стенок. Для случая цилиндрической защиты более эффективным до некоторого уровня поглощенной дозы является метод вариации траектории, а при дальнейшем снижении дозы более эффективным становится метод утолщения стенок.

3.2 Оптимизация траектории выведения КА с солнечной ЭРДУ

В данном разделе рассматривается комбинированная схема выведения космического аппарата на геостационарную орбиту с помощью ракеты-носителя типа «Союз» и разгонного блока (РБ), аналогичного по характеристикам РБ «Фрегат». На первом этапе ракета-носитель выводит КА с РБ на низкую опорную орбиту. Затем РБ выполняет доставку КА на промежуточную орбиту и отделяется от КА. На заключительном этапе КА с помощью ЭРДУ переводится по многовитковой траектории на ГСО. Далее предполагается, что КА функционирует на ГСО до конца срока активного существования (САС).

Будем считать, что КА на этапе выведения с помощью ЭРДУ движется только под действием силы притяжения Земли и силы тяги ЭРДУ. Всеми остальными возмущающими силами пренебрежем. Электрическая мощность, необходимая для работы ЭРДУ, генерируется только бортовыми СБ. Предположим для простоты, что СБ всегда ориентированы на Солнце, их ориентация не влияет на возможность управления вектором тяги ЭРДУ, а также для простоты не будем учитывать влияние затенения СБ Землёй и Луной. Кроме того предполагается, что суммарная электрическая мощность СБ выбрана с избытком так, что на конец САС КА генерируемая мощность будет достаточной для функционирования целевой аппаратуры, служебных систем и выполнения КА целевой задачи в целом. Также будем считать, что максимальная тяга ЭРДУ P и удельный импульс I_{sp} в течение всего этапа электроракетного выведения постоянны. Пусть на борту рассматриваемого КА в качестве маршевых двигателей ЭРДУ установлены два двигателя СПД-140Д [2]. Кроме того, примем допущение, что на возможную ориентацию вектора тяги ЭРДУ не наложено ограничений, и при этом соответствующие развороты КА будут считаться не требующими затрат рабочего тела.

Пусть на начало этапа выведения с помощью ЭРДУ КА находится в перигеуме промежуточной орбиты и имеет некоторую массу m_0 , высота перигеума промежуточной орбиты равна $h_{\pi 0}$, высота апоцентра — $h_{\alpha 0}$, наклонение — $i_0 > 0$. Аргумент перигея и долгота восходящего узла промежуточной орбиты равны ω_0 и Ω_0 , соответственно. Целевой орбитой КА будем считать ГСО, параметры которой примем следующими: высота $h_{\text{ГСО}} = 35793$ км, нулевые эксцентриситет и наклонение. Угловое положение КА на конечной орбите не фиксируется. Для заданных фиксированных значений $h_{\pi 0}$, $h_{\alpha 0}$, i_0 , ω_0 , Ω_0 и m_0 найдём такие траектории перелёта с помощью ЭРДУ, чтобы падение максимальной выходной электрической мощности СБ КА вследствие влияния космической радиации за время перелёта с помощью ЭРДУ было наименьшим.

3.2.1 Минимизация эквивалентного флюенса для кремниевых ФЭП

В данном разделе рассматривается случай, опубликованный в работе автора [68], когда в конструкции СБ КА используются ФЭП на основе кристаллического кремния. Одной из основных идей, используемых в данном разделе, является тот факт, что описанные в разделе 2.3 зависимости относительной мощности СБ от эквивалентного флюенса для различных типов ФЭП являются строго убывающими. Поэтому, если пренебречь другими факторами деградации мощности СБ, задачу минимизации падения мощности СБ можно переформулировать как задачу минимизации эквивалентного флюенса: для каждого набора значений $h_{\pi 0}$, $h_{\alpha 0}$, i_0 , ω_0 , Ω_0 и m_0 необходимо найти траектории многовиткового перелёта с минимальными значениями эквивалентного флюенса нормально падающих электронов энергией 1 МэВ, поглощенными СБ на момент достижения целевой орбиты.

Для решения этой задачи используется методика, описанная в разделах 1.1–1.5. При этом в качестве целевого функционала используется осредненный эквивалентный флюенс электронов 1 МэВ на конец перелёта ($Q_k = \Phi(T)$), а к задаче оптимального быстрогодействия добавляется ограничение следующего вида:

$$\Phi(T) = \Phi_f, \quad (3.4)$$

которое в данном разделе является явным видом общего ограничения (1.16). Соответственно, в задачу добавляется новая фазовая переменная $Q(t) = \Phi(t)$, $t \in [0; T]$, равная осредненному эквивалентному флюенсу электронов 1 МэВ, поглощенному ФЭП от начала перелёта и до момента времени t . Эта новая фазовая переменная удовлетворяет уравнению (2.12), которое является конкретным видом дополнительного уравнения (1.15). Соответственно, в уравнениях оптимального движения (1.33)–(1.36) полагалось $f_Q = U$. Расчёты осредненного эквивалентного потока U проводились с помощью аппроксимационной модели ERBS (см. с. 44). Правая часть уравнения для осредненного эквивалентного флюенса (2.12) не зависит от Φ , поэтому из уравнений (1.31)–(1.32) следует, что для явного вида решения сопряженного к эквивалентному флюенсу уравнения имеем $p_\Phi(t) = p_\Phi(0) = const$ и $R_Q \equiv 1$.

Потенциал притяжения Земли в данном разделе будем считать центральным ньютоновским. Для определённости с конкретными значениями проектных параметров будем считать, что суммарная максимальная тяга ЭРДУ равна $P = 0.548$ Н, а удельный импульс — $I_{sp} = 1790$ с. Также в данном разделе движение КА будем рассматривать без учёта второй зональной гармоники разложения гравитационного потенциала Земли, полагая $J_2 = 0$ в уравнениях оптимального движения.

Решение краевой задачи (1.39)–(1.41), возникающей из принципа максимума, проводилось для 15 промежуточных орбит, значения параметров которых приведены в Таблице 3.1. Параметры этих орбит и начальная масса КА подобраны таким образом, что по мере роста номера промежуточной орбиты всё большую долю необходимой на выведение характеристической скорости (с учётом гравитационных потерь) обрабатывает ЭРДУ. При этом, соответственно, доля участия РБ в комбинированном выведении падает.

Заметим, что правая часть уравнения для осредненного эквивалентного флюенса (2.12) зависит только от расстояния от центра Земли до КА и одного угла. Поэтому значения осредненного эквивалентного флюенса на конец электроракетного этапа выведения будут инвариантны к вращениям траектории КА относительно оси вращения Земли и, следовательно, не будут зависеть от долготы восходящего узла начальной орбиты. И поэтому в данном разделе полагалось $\Omega_0 = 0$. Также принималось, что $\omega_0 = 0$, поскольку это значение является оптимальным для осредненной задачи оптимального быстрогодействия в центральном поле тяготения Земли и является хорошим приближением оптимального значения ω_0 в задаче на минимум эквивалентного флюенса. Тогда начальные условия для расчёта движения КА на электроракетном этапе выведения можно задать всего четырьмя параметрами: m_0 , $h_{\pi 0}$, $h_{\alpha 0}$ и i_0 .

Отметим, что также как и в разделе 3.1.2 практический интерес имеет снижение конечного эквивалентного флюенса ниже его значения на траектории оптимального быстрогодействия. Поэтому в данном разделе проводилась аналогичная процедура, где на начальном этапе значение Φ_f полагалось равным нулю. Прерывание интегрирования проводилось либо при существенном увеличении невязок на правом конце, либо при снижении высоты перицентра в какой-то момент траектории ниже 300 км, либо при подъёме высоты апоцентра выше 293000 км. Аналогично, если шаги по τ были слишком большие и если была необходимость получить более подробное решение $\vec{z}(\tau)$, $\tau \in [0; \tau_f]$, то интегрирование системы (1.45), (1.46) перезапускалось со значением Φ_f , равным значению осредненного эквивалентного флюенса $\Phi(T)$ на правом конце траектории при $\tau = \tau_f$, и более мелким шагом по параметру продолжения.

Далее, как отмечалось выше, для всех полученных значений $\vec{z}(\tau)$ при всех значениях параметров промежуточных орбит проводилось интегрирование неосредненных уравнений оптимального движения (1.33), (1.34), (2.7), (1.36). При этом для каждой траектории рассчитывались продолжительность перелёта T с помощью ЭРДУ и неосредненный флюенс $\Phi_1(T)$ на конец перелёта. По этим данным рассчитывался неосредненный эквивалентный флюенс $\Phi_{\text{САС}}$ на конец срока активного существования КА с помощью следующей формулы:

$$\Phi_{\text{САС}} = \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{\text{ГСО}} (T_{\text{САС}} - T) + \Phi_1(T), \quad (3.5)$$

Таблица 3.1 – Параметры промежуточных орбит

№ п/п	Масса КА m_0 , кг	Высота перигея $h_{\pi 0}$, км	Высота апогея $h_{\alpha 0}$, км	Наклонение i_0 , градусы
1	1700	7300	77800	17.0
2	1850	5300	85300	20.0
3	2000	2300	84800	26.0
4	2100	1300	82300	32.0
5	2200	800	76300	38.0
6	2250	800	77300	42.0
7	2300	800	71300	46.0
8	2400	800	55300	47.5
9	2500	800	53300	49.0
10	2650	800	37300	50.0
11	2700	800	35800	51.6
12	2850	300	35800	51.6
13	3050	300	26800	51.6
14	3400	300	18300	51.6
15	4050	300	10300	51.6

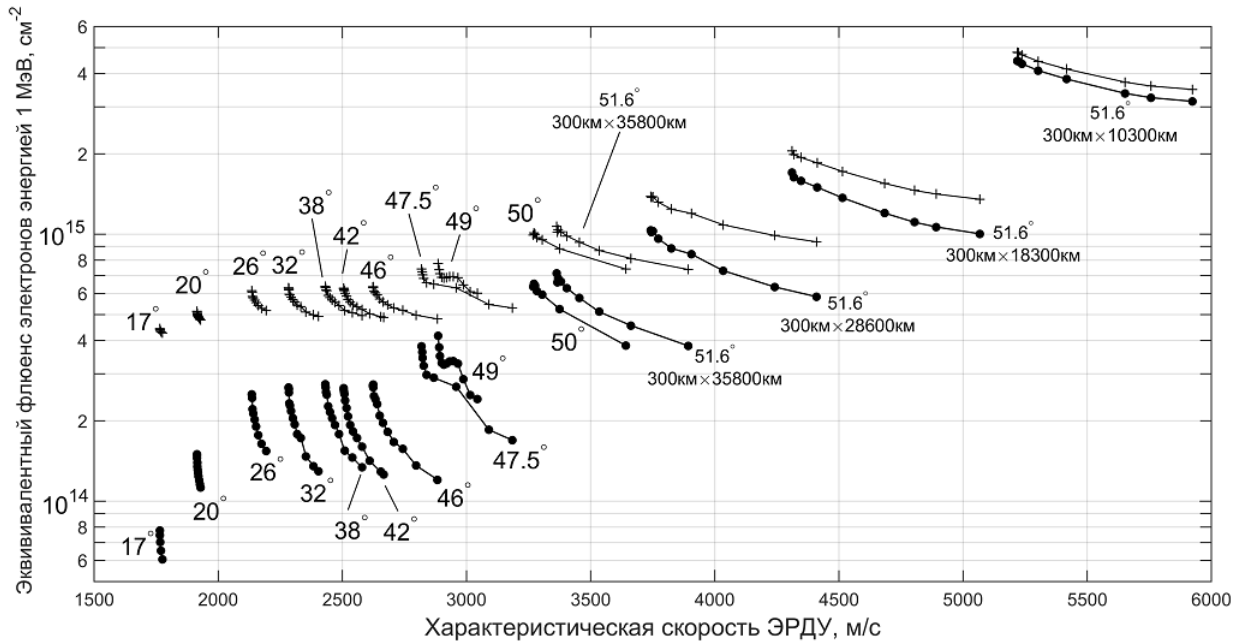


Рисунок 3.16 – Зависимость интегрального эквивалентного потока нормально падающих на СБ электронов с энергией 1 МэВ от затрат характеристической скорости на полученных траекториях.

где $\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{\text{ГСО}} = 7.81885060740741 \times 10^5 \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ — среднегодовой эквивалентный поток электронов 1 МэВ на ГСО, $T_{\text{САС}} = 15$ лет — срок активного существования КА. Также рассчитывались для каждой полученной траектории затраты характеристической скорости:

$$\Delta V_{\text{ЭРДУ}} = -w \ln \left(1 - \frac{PT}{m_0 w} \right). \quad (3.6)$$

Результаты расчётов показаны на Рисунке 3.16. Каждая линия на данном рисунке соответствует решениям для одной промежуточной орбиты при различных значениях параметра продолжения. Крестами обозначены значения неосредненных эквивалентных флюенсов на конец САС, жирными точками — на конец выведения на ГСО. Цифры рядом с линиями означают наклонение и для некоторых линий высоту перигея и апогея промежуточной орбиты. В целом из Рисунка 3.16 видно, что предложенная методика снижения радиационной деградации СБ работоспособна и позволяет снизить интегральный эквивалентный поток электронов 1 МэВ на конец выведения максимум на 55% относительно эквивалентного потока на траектории оптимального быстрогодействия, на конец САС — на 29%. Максимальные дополнительные затраты характеристической скорости относительно траекторий оптимального быстрогодействия составили 11–757 м/с в зависимости от параметров промежуточной орбиты. Наибольшие возможности относительного снижения эквивалентных флюенсов наблюдаются при наклонениях промежуточных орбит около 47.5 градусов. Также стоит отметить рост дополнительных затрат характеристической скорости на снижение

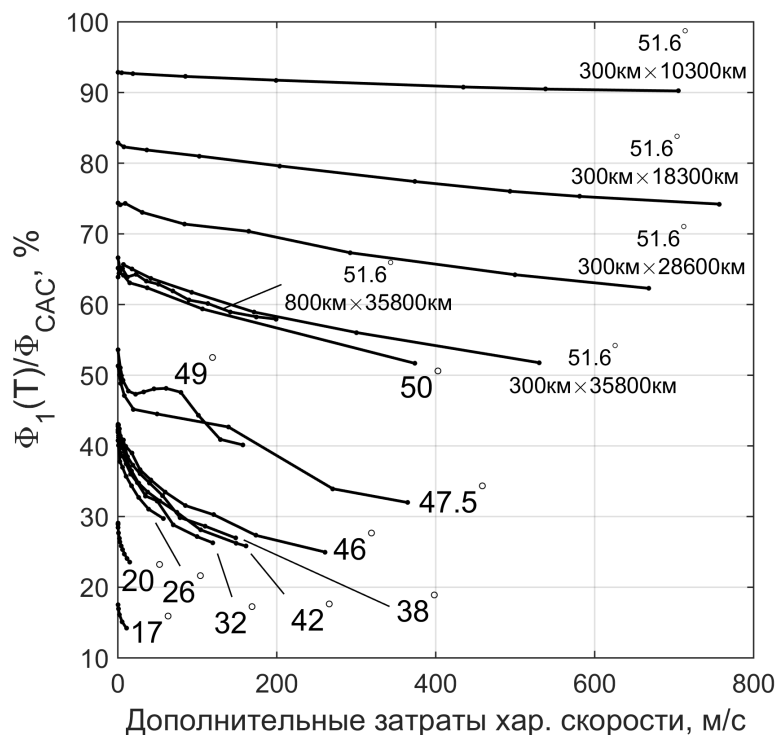


Рисунок 3.17 – Доля эквивалентного флюенса, накопленного на конец выведения с помощью ЭРДУ по неосредненной траектории, в суммарном эквивалентном флюенсе на конец САС в зависимости от дополнительных затрат характеристической скорости.

эквивалентного потока с ростом номера промежуточной орбиты и, соответственно, ростом доли участия ЭРДУ при комбинированном выведении.

Также интересно заметить, что с увеличением доли участия ЭРДУ в комбинированном выведении растёт доля эквивалентного флюенса, накопленного на конец выведения с помощью ЭРДУ, в суммарном эквивалентном флюенсе на конец САС. Результаты расчёта отношения $\Phi_1(T)$ к $\Phi_{САС}$ на полученных неосредненных траекториях приведены на Рисунке 3.17. Из этого рисунка видно, что вклад эквивалентного флюенса, накопленного на этапе электроракетного выведения, составляет от 14% до 93% в зависимости от номера промежуточной орбиты. Причём на орбитах с наименьшим временем выведения с помощью ЭРДУ флюенс $\Phi_1(T)$ имеет небольшой вклад в $\Phi_{САС}$. По мере роста продолжительности электроракетного этапа выведения вклад $\Phi_1(T)$ в $\Phi_{САС}$ становится доминирующим. Этот факт показывает, что выбор параметров промежуточной орбиты существенно влияет не только на основные проектно-баллистические параметры перелёта, но и на деградацию СБ. Также стоит отметить, что по мере роста дополнительных затрат характеристической скорости на полученных траекториях вклад $\Phi_1(T)$ в $\Phi_{САС}$ ожидаемо снижается для всех промежуточных орбит. Наибольшее снижение доли $\Phi_1(T)$ во флюенсе $\Phi_{САС}$

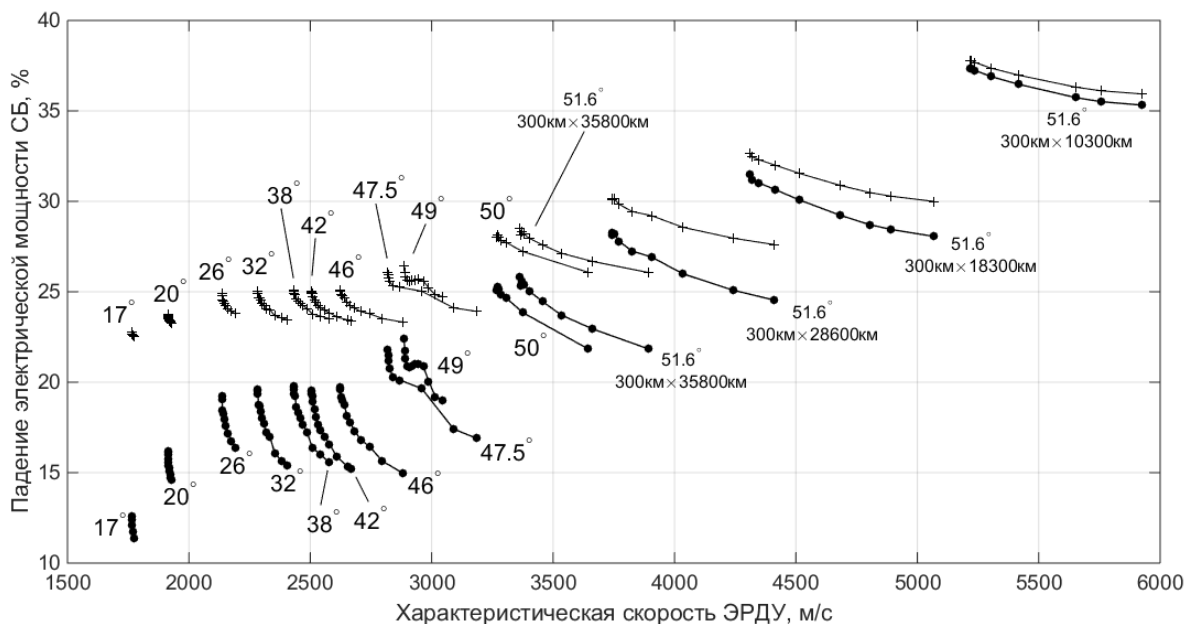


Рисунок 3.18 – Зависимость падения максимальной электрической мощности СБ от затрат характеристической скорости на полученных в результате решения краевых задач траекториях.

наблюдается на семействе траекторий с наклонением начальной орбиты 47.5 градусов и составляет 19.3%.

Далее по расчётам эквивалентных флюенсов с помощью зависимости (2.14) рассчитывалось падение максимальной электрической мощности СБ относительно мощности СБ на промежуточной орбите:

$$\Delta_1 = \frac{N_0 - N_1}{N_0} \times 100\% = (1 - \beta_f(\Phi_1(T))) \times 100\%, \quad (3.7)$$

$$\Delta_{CAC} = \frac{N_0 - N_{CAC}}{N_0} \times 100\% = (1 - \beta_f(\Phi_{CAC})) \times 100\%, \quad (3.8)$$

где N_1 и Δ_1 – мощность СБ и относительное падение мощности СБ на конец перелёта с помощью ЭРДУ, соответственно, N_{CAC} и Δ_{CAC} – мощность СБ и относительное падение мощности СБ на конец САС, соответственно. Значения рассчитанных Δ_1 и Δ_{CAC} для всех полученных траекторий приведены на Рисунке 3.18. Аналогично предыдущему рисунку крестами обозначены значения Δ_{CAC} , жирными точками – Δ_1 . Для наглядности рассмотрим также максимальное приращение остаточной мощности СБ, получаемое на рассчитанных траекториях, по сравнению с траекториями оптимального быстрогодействия:

$$R_1 = \max(\Delta_{1,minT} - \Delta_1), \quad (3.9)$$

$$R_{CAC} = \max(\Delta_{CAC,minT} - \Delta_{CAC}), \quad (3.10)$$

где $\Delta_{1,minT}$ и $\Delta_{CAC,minT}$ – относительное падение мощности СБ на конец перелёта и на конец САС на траекториях оптимального быстрогодействия. Максимум в (3.9), (3.10) берётся по всем по-

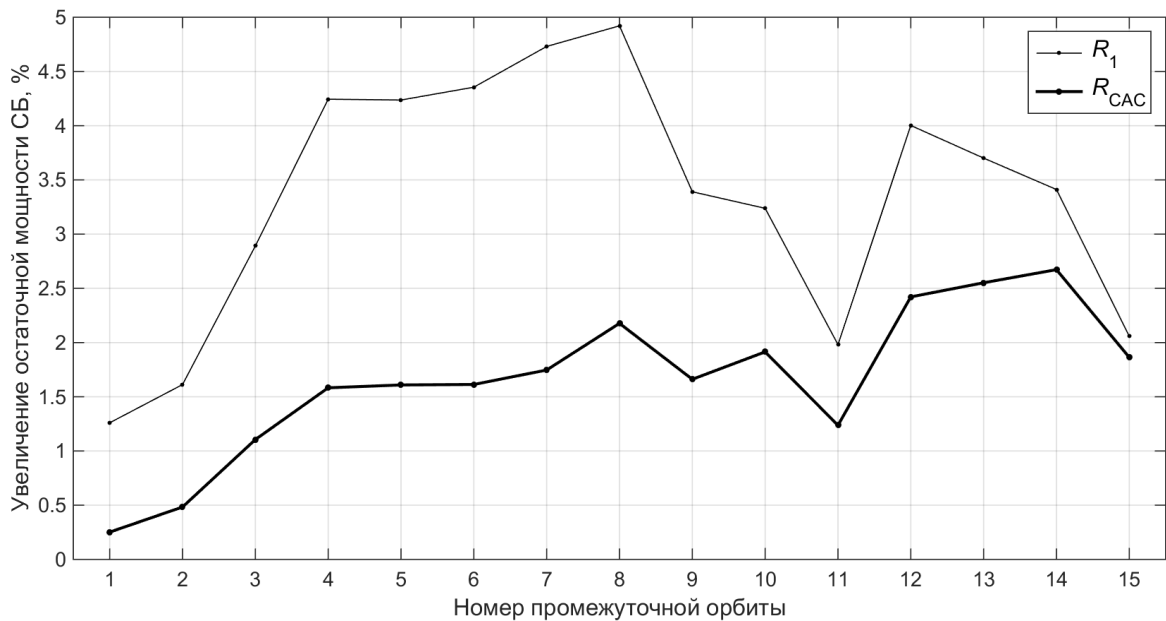


Рисунок 3.19 – Зависимость приращения остаточной мощности СБ (в процентах от мощности СБ на промежуточной орбите) от номера промежуточной орбиты в Таблице 3.1.

лученным траекториям семейства перелетов с одной и той же промежуточной орбиты. Значения рассчитанных приращений остаточной мощности СБ в зависимости от номера промежуточной орбиты приведены на Рисунке 3.19. Видно, что предложенный метод позволяет повысить остаточную мощность СБ на конец выведения максимум на 4.9% от мощности СБ на промежуточной орбите, на конец САС — на 2.7% от мощности СБ на промежуточной орбите. Также можно заметить, что семейства траекторий на которых достигаются максимальное приращение мощности на конец САС и на конец перелёта относятся к разным промежуточным орбитам. Максимальное приращение остаточной мощности на конец САС достигается для перелётов с промежуточной орбиты №14 ($i_0 = 51.6^\circ$, $h_{\pi,0} = 300$ км, $h_{\alpha,0} = 18300$ км), а максимальное приращение мощности на конец выведения — для перелётов с промежуточной орбиты №8 ($i_0 = 47.5$). Этот факт связан с тем, что с ростом номера промежуточной орбиты вклад эквивалентного флюенса, накопленного непосредственно на ГСО, в суммарный флюенс существенно уменьшается и становится незначительным. В такой ситуации R_{CAC} становится близок по величине к R_1 .

Следует также отметить, что поведение осредненного интегрального эквивалентного потока в целом хорошо согласуется с поведением той же величины, полученной без осреднения по круговым орбитам. На Рисунках 3.20–3.21 изображены зависимости этих двух интегральных потоков на конец выведения на ГСО и интегрального потока, рассчитанного без осреднения на конец САС, от затрат характеристической скорости для двух различных промежуточных орбит. Видно, что снижение осредненного флюенса в среднем приводит к снижению неосреднен-

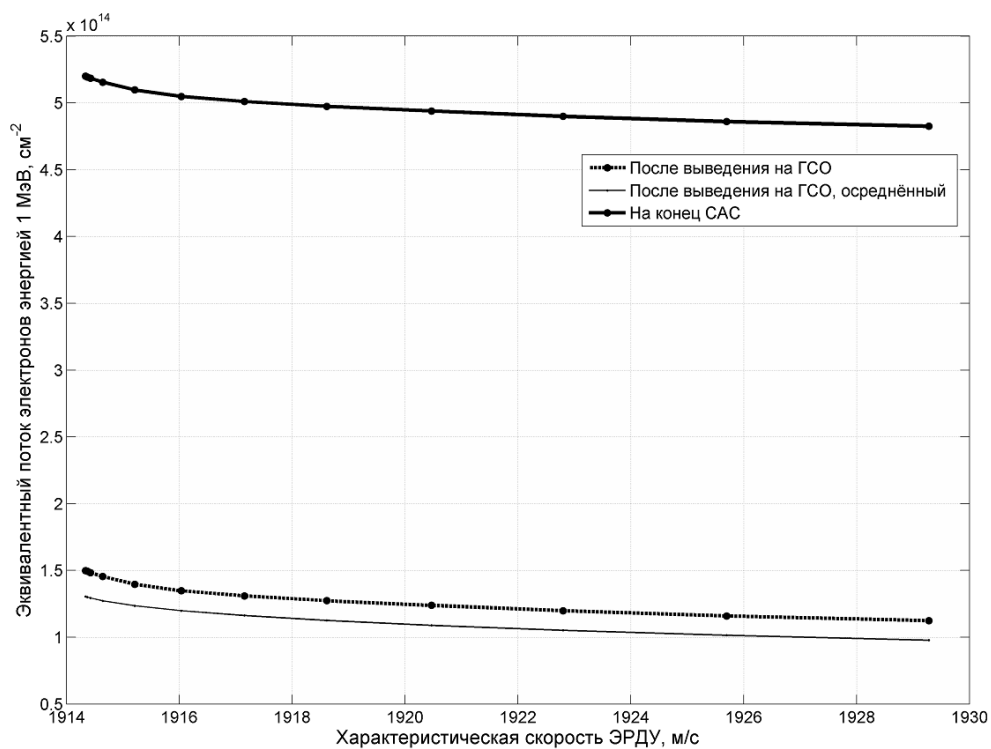


Рисунок 3.20 – Сравнение эквивалентных флюенсов нормально падающих на СБ электронов с энергией 1 МэВ от затрат характеристической скорости для варианта №2 промежуточной орбиты (см. Таблицу 3.1), $i_0 = 20^\circ$.

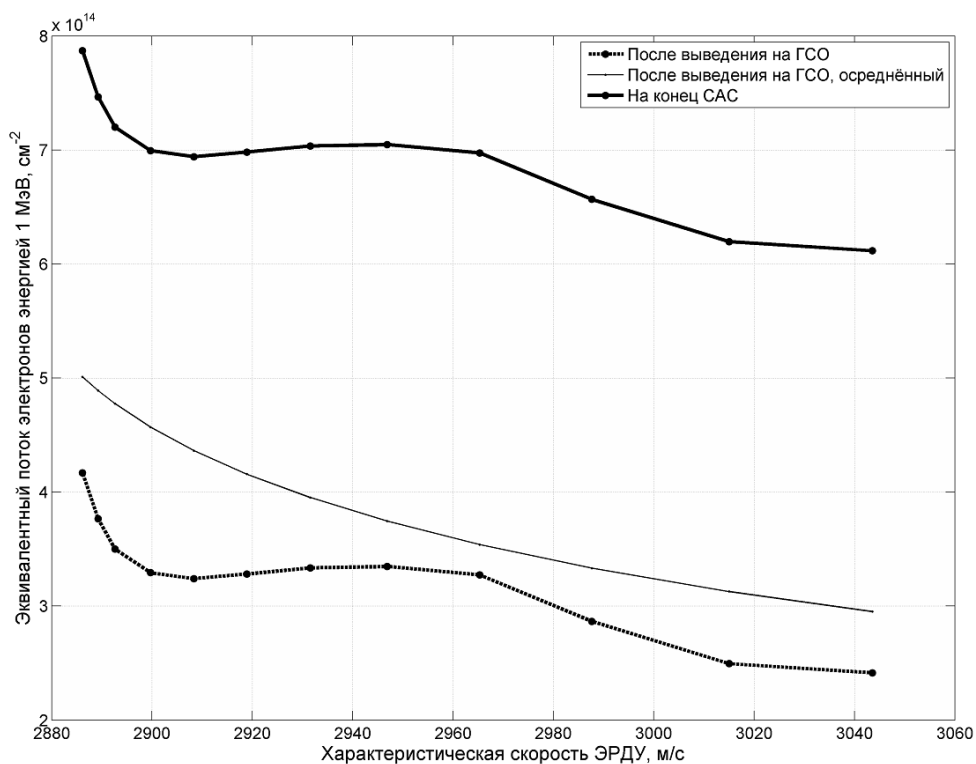


Рисунок 3.21 – Сравнение эквивалентных флюенсов нормально падающих на СБ электронов с энергией 1 МэВ от затрат характеристической скорости для варианта №9 промежуточной орбиты (см. Таблицу 3.1), $i_0 = 49^\circ$.

ного флюенса.

Характерный пример изменения траектории по мере снижения конечного эквивалентного флюенса изображен на Рисунке 3.22. На этом рисунке изображены графики зависимости высот перигея и апогея оскулирующей орбиты от наклона на полученных траекториях. Серые линии соответствуют траектории оптимального быстрогодействия, черные — минимальному полученному для данной промежуточной орбиты эквивалентному флюенсу. Также оттенками серого на данном рисунке показаны осредненные эквивалентные потоки электронов энергией 1 МэВ в зависимости от высоты и наклона. Начальное наклонение промежуточной орбиты для данного случая равно 51.6 градусам, высота перигея промежуточной орбиты составляет 300 км, апогея — 10300 км. Из рисунка видно, что траектории с эквивалентным флюенсом, меньшим, чем на траектории оптимального быстрогодействия, имеют тенденцию уводить перигей оскулирующей орбиты из области высоких эквивалентных потоков, поднимая его высоту. Другими словами с точки зрения радиационной деградации СБ выгоднее проводить изменение наклона, более долгую операцию в сравнении с изменением высоты, вне области максимальных эквивалентных потоков.

Также исследуем на полученных траекториях величину эффективной массы $m_{эфф}$, которую определим как массу КА на промежуточной орбите за вычетом массы системы электроснабжения (СЭС) $m_{СЭС}$ и массы ЭРДУ в заправленном виде $m_{ЭРДУ}$:

$$m_{эфф} = m_0 - m_{СЭС} - m_{ЭРДУ} \quad (3.11)$$

При этом будем считать, что в массу СЭС входит масса не только СБ, но и аккумуляторных батарей, электроники управления зарядом/разрядом АКБ, преобразования и распределения электроэнергии по системам КА. Эффективная масса КА приходится на аппаратуру полезной нагрузки и бортовых систем КА, масса которых в первом приближении не зависит от массы рабочего тела и электрической мощности СЭС. Поэтому эффективная масса является показателем эффективности транспортировки КА на ГСО по полученным выше траекториям. Чем выше эффективная масса при фиксированных $h_{\pi 0}$, $h_{\alpha 0}$, i_0 и m_0 , тем более эффективен перелёт по данной траектории на ГСО с помощью ЭРДУ.

Пусть максимальная электрическая мощность, необходимая для штатного функционирования бортовых систем на протяжении всего САС, включая этап электроракетного выведения, будет постоянна и равна $N = 14$ кВт. При этом будем считать, что мощности N достаточно для функционирования ЭРДУ в режиме максимальной тяги. В таком случае потребная электрическая мощность N_0 на промежуточной орбите с учётом радиационной деградации СБ выразится

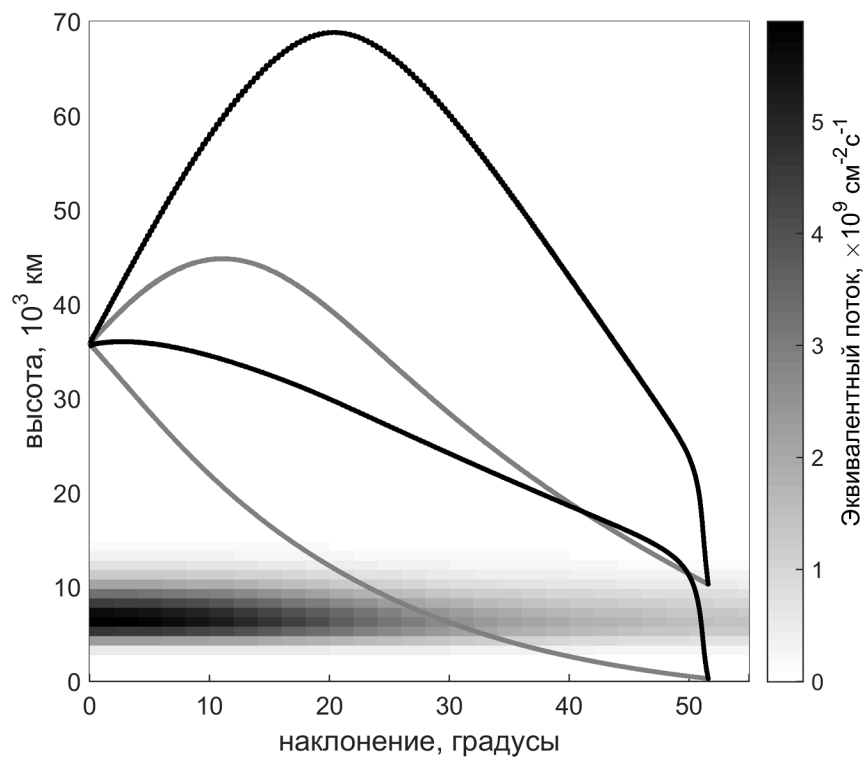


Рисунок 3.22 – Зависимость высоты перигея и апогея от наклона на траектории с оптимальным быстроедействием и на траектории с заданным эквивалентным флюенсом на правом конце. Параметры промежуточной орбиты: $i_0 = 51.6^\circ$, $h_{\pi,0} = 300$ км, $h_{\alpha,0} = 10300$ км.

как

$$N_0 = \frac{N}{\beta_f (\Phi_{\text{САС}})}. \quad (3.12)$$

Оценим массу СЭС, предполагая, что она пропорциональна потребной электрической мощности N_0 на промежуточной орбите:

$$m_{\text{СЭС}} = \gamma_N N_0, \quad (3.13)$$

где $\gamma_N = 40 \text{ кг/кВт}$ — удельная масса СЭС. Далее оценим массу заправленной ЭРДУ. Будем считать, что она состоит из массы рабочего тела m_{Xe} , массы баков $m_{\text{бак}}$ и массы $m_{\text{дв}}$ непосредственно двигателя и остальных систем ЭРДУ. Причём масса баков пропорциональна массе рабочего тела с коэффициентом $\alpha_{\text{бак}} = 0.1$:

$$m_{\text{ЭРДУ}} = m_{Xe} + m_{\text{бак}} + m_{\text{дв}} = (1 + \alpha_{\text{бак}}) m_{Xe} + m_{\text{дв}}. \quad (3.14)$$

Масса же рабочего тела выражается из формулы Циолковского:

$$m_{Xe} = m_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta V_{\text{ЭРДУ}}}{w} \right) \right). \quad (3.15)$$

Масса непосредственно двигателя и систем ЭРДУ зависит только от потребной электрической мощности ЭРДУ, которая считается постоянной в данной работе. Поэтому будем считать, что $m_{\text{дв}} = \text{const}$. Поскольку масса $m_{\text{дв}}$ изменит эффективную массу КА на константу на всех ниже рассматриваемых траекториях, поэтому при расчёте по формуле (3.14) массы ЭРДУ можно $m_{\text{дв}}$ не учитывать, и формально отнести её к эффективной массе.

Теперь по значениям неосредненного эквивалентного флюенса на конец САС, затратам характеристической скорости, массе КА на промежуточной орбите можно для каждой полученной траектории рассчитать по формулам (3.11)–(3.15) эффективную массу КА. На Рисунке 3.23 по ординате отложено отношение эффективной массы на полученных траекториях к эффективной массе на траектории оптимального быстрогодействия. По абсциссе на этих рисунках отложена разница затрат характеристической скорости на полученной траектории и на траектории оптимального быстрогодействия. Видно, что эффективная масса имеет тенденцию с ростом дополнительных затрат характеристической скорости сначала немного возрастать, затем медленно убывать. При больших наклонениях промежуточных орбит эффективная масса не имеет тенденции первоначального роста и сразу начинает спадать с увеличением затрат характеристической скорости. Максимальное увеличение эффективной массы КА наблюдается для промежуточной орбиты наклонением 26 градусов и составляет примерно 0.5% от эффективной массы на траектории с оптимальным быстрыедействием. В абсолютных величинах это увеличение эффективной массы составляет 10 кг при массе КА на промежуточной орбите равной 2000 кг. Дополнительные

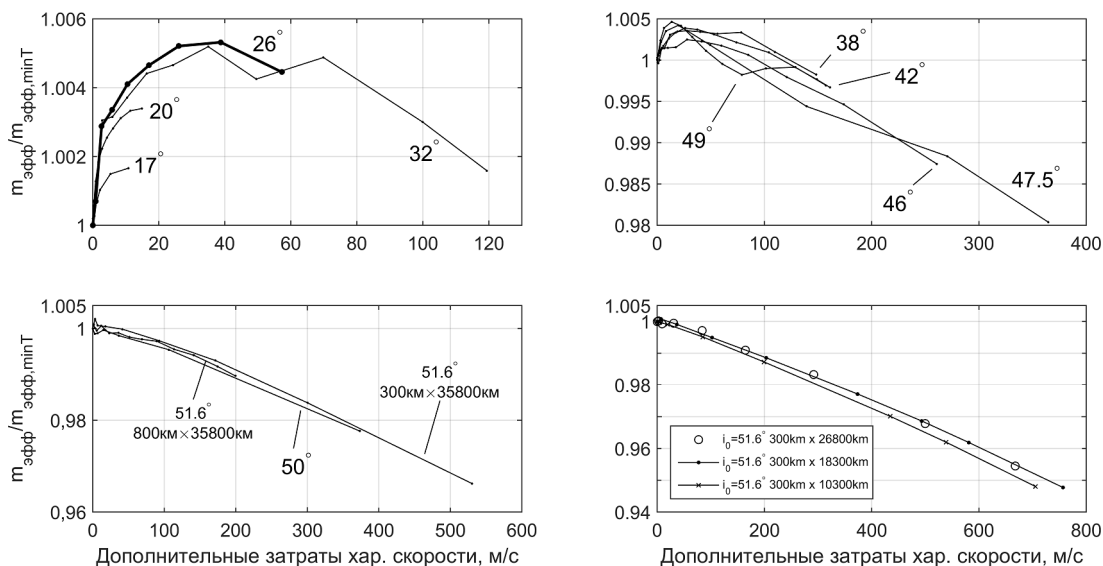


Рисунок 3.23 – Зависимость отношения эффективной массы на траектории с заданным эквивалентным флюенсом к эффективной массе на траектории с оптимальным быстроедействием от дополнительных затрат характеристической скорости.

затраты характеристической скорости при этом отказываются довольно малыми и составляют примерно 40 м/с.

3.2.2 Максимизация мощности трехкаскадных ФЭП на конец САС

В данном разделе рассматривается задача минимизации падения мощности СБ в случае, когда в конструкции СБ КА используются трехкаскадные ФЭП фирмы Spectrolab на основе GaInP₂/GaAs/Ge [129]. Результаты решения данной задачи опубликованы в работе автора [70]. Рассматриваемую задачу можно записать следующим образом:

$$\Delta N = N_0 - N_{\text{САС}} \rightarrow \min, \quad (3.16)$$

где N_0 и $N_{\text{САС}}$ – максимальная электрическая выходная мощность СБ на момент начала электро-ракетного этапа выведения КА и на момент окончания САС, соответственно. При фиксированной мощности на конец САС $N_{\text{САС}}$ эта задача эквивалентна задаче максимизации относительной мощности СБ на конец САС $\beta_1(T) \rightarrow \max$. Таким образом, далее будем рассматривать задачу поиска траекторий перелёта на ГСО с помощью ЭРДУ с максимальным значением относительной мощности СБ на конец САС для каждого набора фиксированных значений $h_{\pi 0}$, $h_{\alpha 0}$, i_0 , ω_0 , Ω_0 и m_0 . При этом при расчёте движения КА в околоземном пространстве будем учитывать вторую зональную гармонику разложения гравитационного потенциала Земли.

Для решения этой задачи также используется методика, описанная в разделах 1.1–1.5, в случае, когда целевым функционалом является осредненная относительная мощность СБ на конец САС $Q_k = \beta(T)$. При этом решается задача оптимального быстрогодействия с дополнительным ограничением вида:

$$\beta(T) = \beta_T, \quad (3.17)$$

которое в данном разделе является явным видом общего ограничения (1.16). Соответственно, в задачу добавляется новая фазовая переменная $Q(t) = \beta(t)$, $t \in [0; T]$, которая определяется уравнением (2.19). Эта новая фазовая переменная удовлетворяет уравнению (2.20), которое является конкретным видом дополнительного уравнения (1.15). Соответственно, в уравнениях оптимального движения (1.33)–(1.36) полагалось $f_Q = -CV \exp(-(1 - \beta)/C)$. Расчёты осредненного эквивалентного потока $V(r, i)$ проводились с помощью аппроксимационной модели EIR3 (см. с. 45). Рассмотрим теперь конкретный вид сопряженного к относительной мощности уравнения (1.31):

$$\frac{dp_\beta}{dt} = -p_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-CV \exp\left(-\frac{1 - \beta}{C}\right) \right) = p_\beta V \exp\left(-\frac{1 - \beta}{C}\right). \quad (3.18)$$

Если заметить, что уравнения (2.20) и (3.18) имеют общий множитель $V \exp(-(1 - \beta)/C)$, то применяя метод разделения несложно показать, что уравнение (3.18) имеет явное решение

$$p_\beta(t) = p_\beta(0) \exp\left(-\frac{\beta(t) - \beta(0)}{C}\right). \quad (3.19)$$

Отсюда следует, что в данном разделе $R_Q = \exp(-(\beta(t) - \beta(0))/C)$.

Далее будем решать краевую задачу (1.39)–(1.41), возникающую из принципа максимума, для промежуточных орбит №№4–8 из Таблицы 3.1. При этом будем полагать $\Omega_0 = 0$, поскольку правая часть (3.18) не зависит от долготы восходящего узла оскулирующей орбиты. Но в отличие от раздела 3.2.1 будем оптимизировать значение аргумента перигея промежуточной орбиты ω_0 . Для этого далее будем решать при различных значениях ω_0 задачу оптимального быстрогодействия для промежуточных орбит №№4–8 из Таблицы 3.1. В качестве значений проектных параметров ЭРДУ будем использовать следующие: суммарная максимальная тяга равна $P = 0.58$ Н, а удельный импульс — $I_{sp} = 1780$ с.

Результаты расчёта осредненной и неосредненной относительной мощности СБ на конец САС в зависимости от ω_0 на траектории перелёта на ГСО с промежуточной орбиты №4 приведены на Рисунке 3.24. Виден периодический характер зависимости осредненной относительной мощности от аргумента перигея промежуточной орбиты с периодом 180 градусов. Максимум осредненной относительной мощности на конец САС приходится примерно на 90 и 270 градусов. Также видно, что в целом для перелёта с данной промежуточной орбиты зависимости осред-

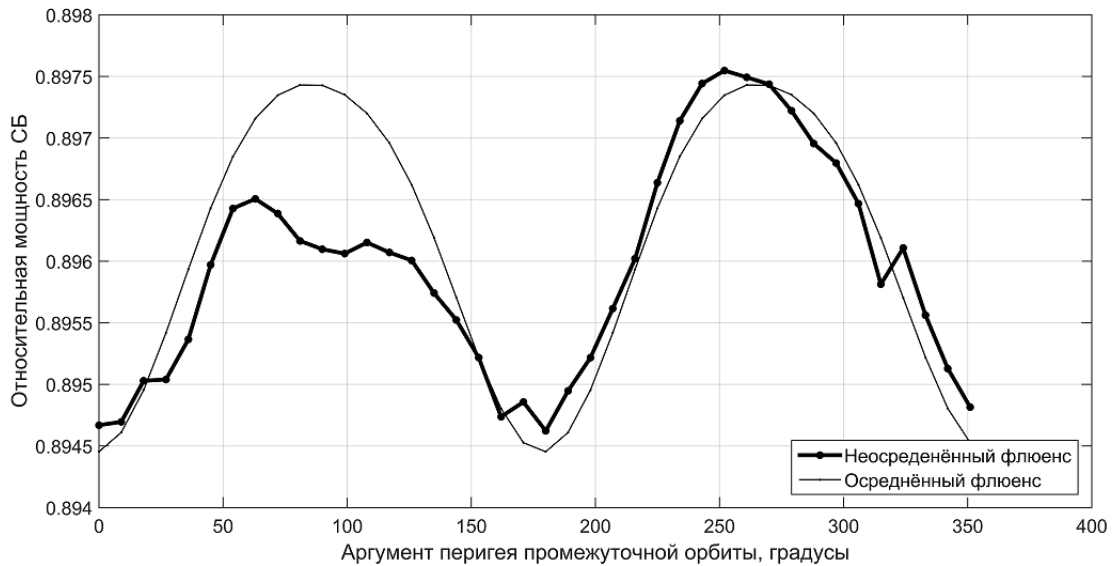


Рисунок 3.24 – Зависимость осредненной и неосредненной относительной мощности СВ на конец САС от аргумента перигея промежуточной орбиты для траектории наискорейшего выведения на ГСО с промежуточной орбиты №4 из Таблицы 3.1

ненной и неосредненной относительной мощности СВ на конец САС имеют схожий характер. На Рисунке 3.25 изображена зависимость осредненной относительной мощности СВ на конец САС от аргумента перигея начальной орбиты для промежуточных орбит №№4–8 из Таблицы 3.1.

На Рисунке 3.26 для полученных траекторий представлены значения осредненной относительной мощности СВ на конец САС и потребной характеристической скорости для выведения КА по полученной траектории на ГСО при различных значениях ω_0 . Точки, соответствующие одной строчке из Таблицы 3.1, соединены линиями. Видно, что в рамках модели осредненной относительной мощности СВ при одних и тех же затратах характеристической скорости существуют два значения ω_0 , которым соответствуют траектории оптимального быстрогодействия с различными значениями $\beta(T)$. Соответственно, выбором аргумента перигея промежуточной орбиты можно выбрать большее из двух значение относительной мощности на конец САС. Также стоит отметить значительное увеличение затрат характеристической скорости при больших углах между линией апсид и линией узлов.

Для каждой из орбит №№4–8 из Таблицы 3.1 выбиралось значение аргумента перигея промежуточной орбиты с минимальной относительной мощностью СВ на конец САС и решалась краевая задача (1.39)–(1.41) с фиксированной на конец перелёта осредненной относительной мощностью (3.17). Для плавного перехода от задачи оптимального быстрогодействия, которая решается относительно легко, к задаче с заданной конечной мощностью СВ задавалась отно-

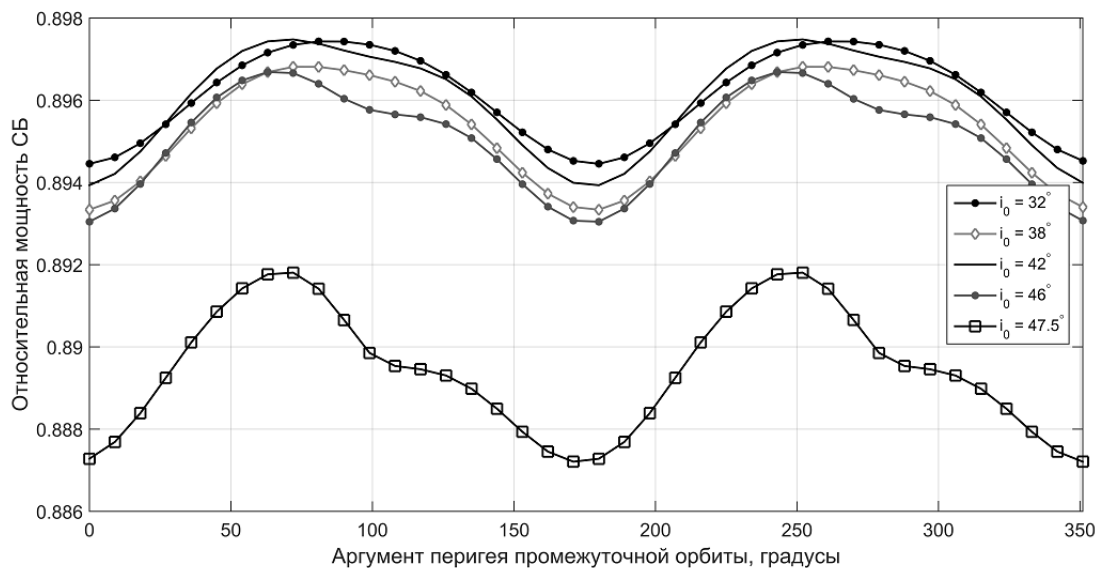


Рисунок 3.25 – Зависимость осредненной относительной мощности СБ на конец САС от аргумента перигея промежуточной орбиты для траекторий наискорейшего выведения на ГСО с промежуточных орбит №№4–8 из Таблицы 3.1

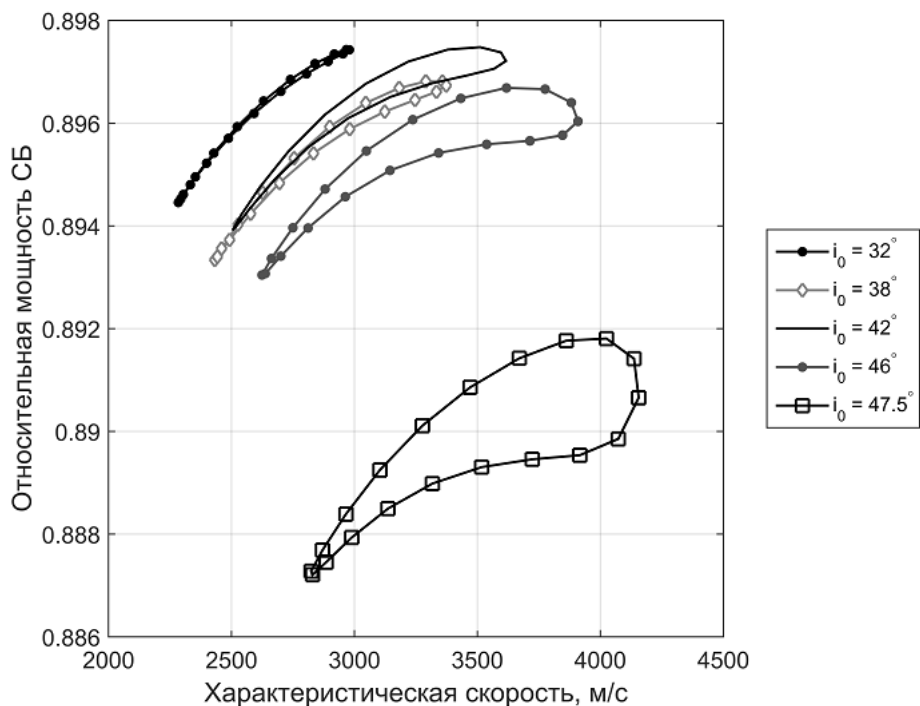


Рисунок 3.26 – Осредненная относительная мощность СБ на конец САС и затраты характеристической скорости на траекториях оптимального быстрогодействия при различных ω_0 для промежуточных орбит №№4–8 из Таблицы 3.1

сительная мощность на конец САС в зависимости от параметра продолжения τ следующим образом:

$$\beta_T = (1 - \tau)\beta_{\min T} + \tau\beta_{\max}. \quad (3.20)$$

где $\beta_{\min T}$ — относительная мощность на конец САС на траектории оптимального быстрогодействия, а β_{\max} — некоторое константа, такая что $\beta_{\min T} < \beta_{\max} < \beta(0) < 1$. Тогда при применении метода продолжения по параметру для решения краевой задачи необходимо использовать систему уравнений (1.47), (1.46), содержащую член с производной по параметру продолжения от \vec{f} , который в данном случае можно записать в явном виде:

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{z}, \tau)}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{\min T} - \beta_{\max} & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (3.21)$$

Величина β_{\max} во всех полученных краевых задачах полагалась равной 0.906, что меньше $\beta(0) = 0.90679615$. При некотором значении параметра продолжения $\tau = \tau_f < 1$ наблюдалось существенное увеличение невязок на правом конце. При этом корректор после каждого шага не мог свести невязки на правом к нулю. В этот момент продолжение по параметру продолжения прерывалось.

Полученные в ходе решения (1.47), (1.46) значения $\vec{z}(\tau)$, использовались для интегрирования неосредненных уравнений оптимального движения (1.33), (1.34), (2.20), (1.36). Далее с помощью программного комплекса IRENE рассчитывались неосредненные эквивалентные флюенсы на конец перелёта $\Phi_1(T)$, которые использовались затем для расчёта с помощью (2.18) значений неосредненной относительной мощности СБ на конец САС $\beta_1(T)$. Полученные значения неосредненного эквивалентного флюенса на конец перелёта и на конец САС представлены на Рисунке 3.27, на котором светлыми линиями обозначен эквивалентный поток на конец САС, темными — на конец выведения на ГСО. При этом все расчёты, представленные на Рисунке 3.27, соответствуют выбору ω_0 с минимальной относительной мощностью СБ на конец САС на траекториях оптимального быстрогодействия. Значение используемых для расчёта ω_0 для каждого случая также указано на данном рисунке. Максимально удаётся снизить эквивалентный флюенс на конец выведения на 61%, на конец САС — на 11%.

Результаты расчёта осредненной и неосредненной относительной мощности СБ по рассчитанным выше эквивалентным флюенсам на конец выведения представлены на Рисунке 3.28, на конец САС — на Рисунке 3.29. Осредненная относительная мощность изображена на этих рисунках светлыми линиями, неосредненная — темными. На абсциссах графиков для случая расчётов на конец САС отложена величина дополнительных затрат характеристической скорости на перелёт по сравнению с траекторией оптимального быстрогодействия для выбранных параметров промежуточной орбиты. Все графики показывают монотонное увеличение относительной

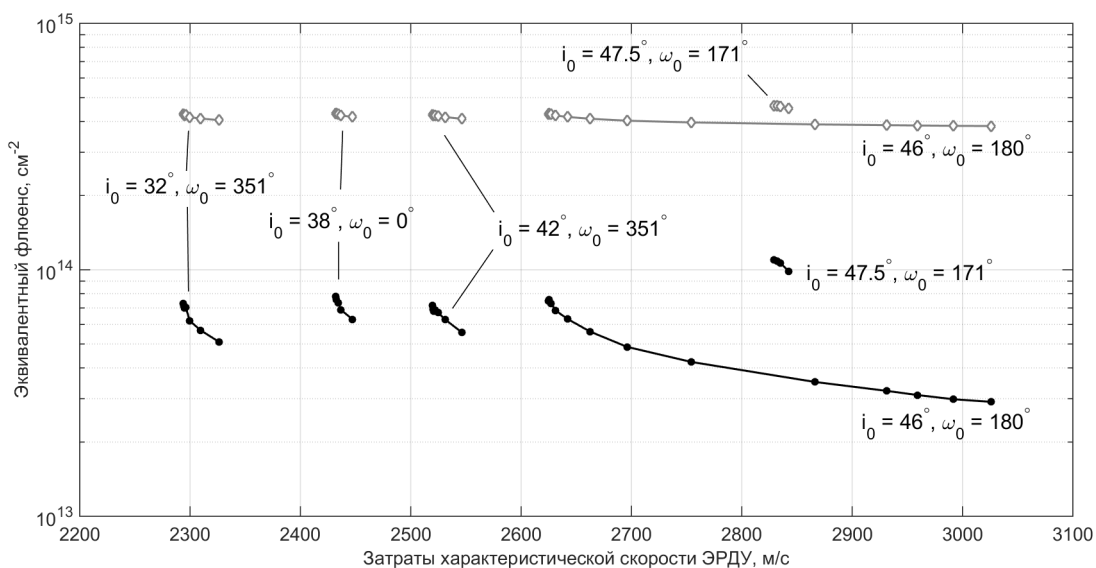


Рисунок 3.27 – Зависимость неосредненного эквивалентного флюенса на конец перелёта и на конец САС от затрат характеристической скорости для траекторий выведения на ГСО с промежуточных орбит №№4–8 из Таблицы 3.1.

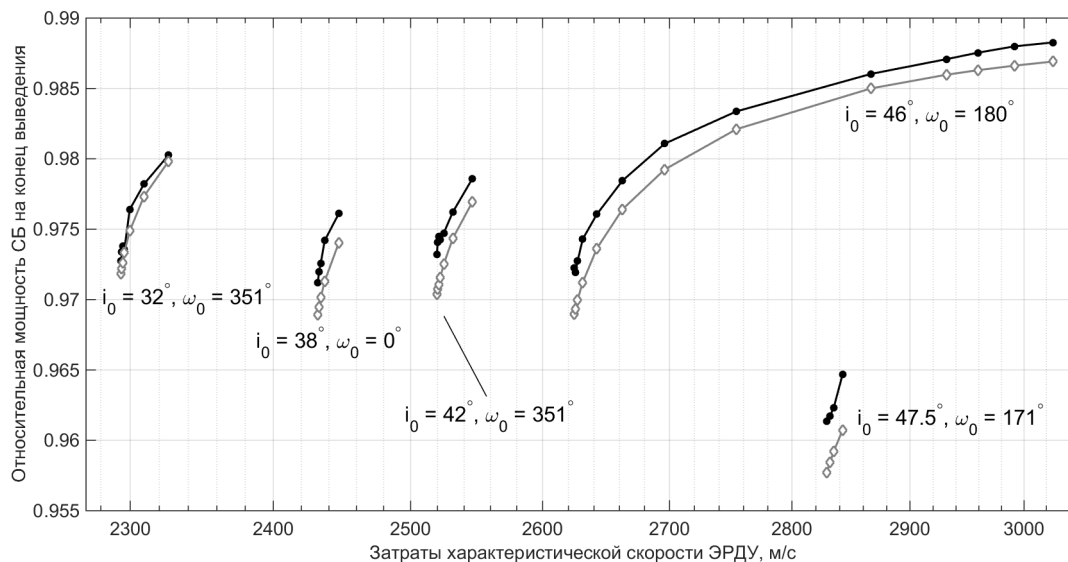


Рисунок 3.28 – Зависимость осредненной и неосредненной относительной мощностей СБ на конец выведения от затрат характеристической скорости для траекторий выведения на ГСО с промежуточных орбит №№4–8 из Таблицы 3.1.

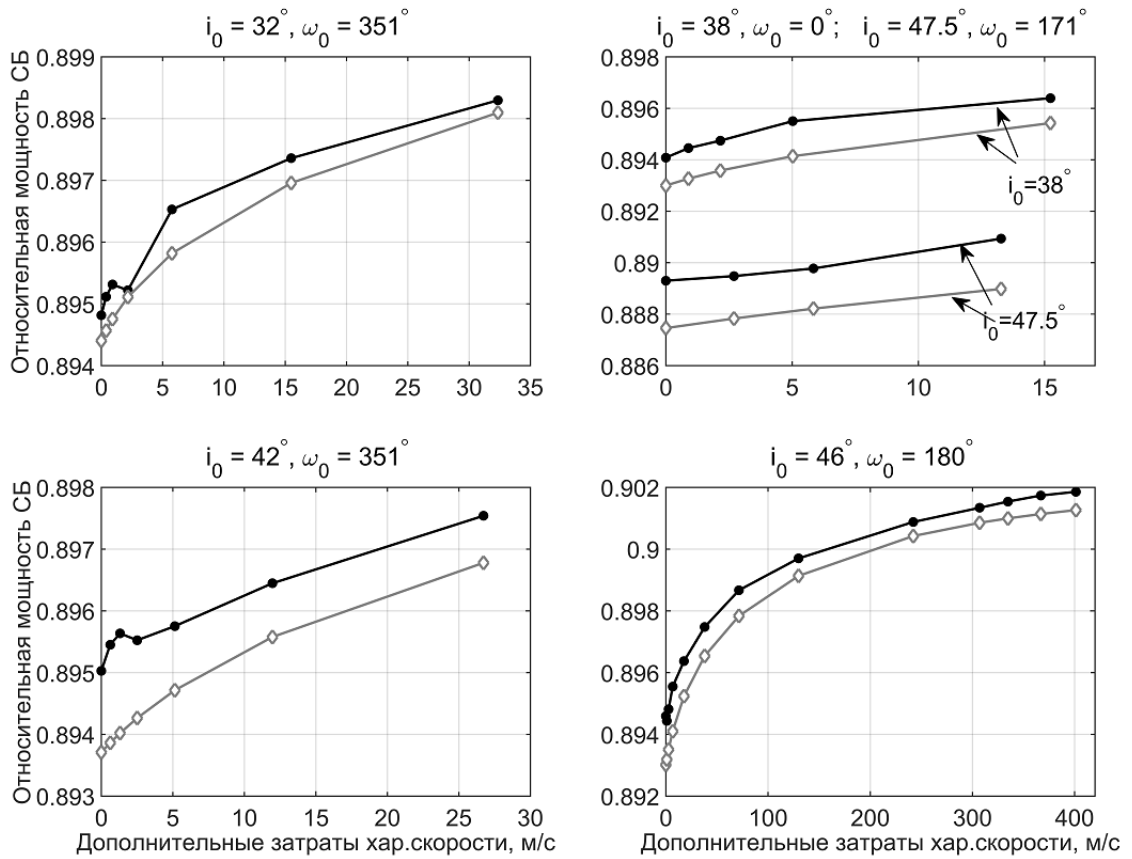


Рисунок 3.29 – Зависимость осредненной и неосредненной относительной мощностей СБ на конец САС от дополнительных затрат характеристической скорости для траекторий выведения на ГСО с промежуточных орбит №№4–8 из Таблицы 3.1.

мощности с ростом затрат характеристической скорости. Увеличение неосредненной мощности СБ на конец выведения составляет 0.33–1.6% от мощности СБ на начальной орбите, на конец САС — 0.16–0.73%. При этом дополнительные затраты характеристической скорости составляют от 13 до 401 м/с в зависимости от параметров промежуточной орбиты.

Будем теперь варьировать толщину лицевого защитного стекла СБ на траекториях полученных для случая перелёта с промежуточной орбиты №7 из Таблицы 3.1 с аргументом перигея $\omega_0 = 180^\circ$. На Рисунке 3.30 показаны зависимости необходимой толщины защитного стекла от длительности перелёта при различных фиксированных на конец САС относительных мощностях СБ. Фиксированные на конец САС значения относительной мощности β_T указаны на изолиниях. Результаты расчётов показывают соотношение эффективности метода утолщения защитного стекла СБ и предлагаемого метода снижения радиационной нагрузки. Видно, что если задаться, например, уровнем деградации СБ на конец САС $\beta_1(T) = 0.902$, то для снижения необходимой толщины защитного стекла с примерно 300 мкм до 200 мкм необходимо увеличить продолжительность перелёта всего на 5 суток. А если воспользоваться формулой (3.15) для расчёта дополнительной необходимой массы рабочего тела для работы ЭРДУ, то получится что необходимо дополнительно затратить 14.6 кг ксенона. Если предположить, что необходимая для работы всех бортовых систем электрическая мощность СБ составляет $N_{\text{САС}} = 14$ кВт, тогда на начальной орбите СБ должны иметь мощность $N_0 = N_{\text{САС}}/\beta_1(T) = 14 \text{ кВт}/0.902 = 15.5 \text{ кВт}$. Используя значение коэффициента полезного действия рассматриваемых ФЭП $\eta_{\text{ФЭП}} = 0.251$ и солнечной постоянной $W_0 = 1367 \text{ Вт/м}^2$ из [129] рассчитаем потребную суммарную площадь всех ФЭП на начальной орбите:

$$S_0 = \frac{N_0}{\eta_{\text{ФЭП}}W_0} = \frac{N_{\text{САС}}}{\beta_1(T)\eta_{\text{ФЭП}}W_0} = 45.2 \text{ м}^2. \quad (3.22)$$

При плотности защитного стекла 2200 кг/м^3 снижение суммарной массы защитного стекла при уменьшении его толщины с примерно 300 мкм до 200 мкм составит 10.0 кг. Таким образом при данной потребной мощности СБ на конец САС $N_{\text{САС}}$ выигрыша в массе нет. Выигрыш в массе появится если при той же начальной массе КА $m_0 = 2300 \text{ кг}$ суммарная площадь ФЭП S_0 будет превышать 66.4 м^2 . При этом согласно (3.22) потребная мощность СБ на конец САС должна $N_{\text{САС}} > 20.6 \text{ кВт}$.

На Рисунке 3.31 показано как менялась траектория перелёта с промежуточной орбиты №7 из Таблицы 3.1 с аргументом перигея $\omega_0 = 180^\circ$ по мере увеличения параметра продолжения и, соответственно, увеличения относительной мощности СБ на конец САС. Траектории при каждом значении параметра продолжения представлены в осях «радиус–наклонение». Две пунктирные линии на каждом графике показывают зависимости высоты перигея и апогея от наклона

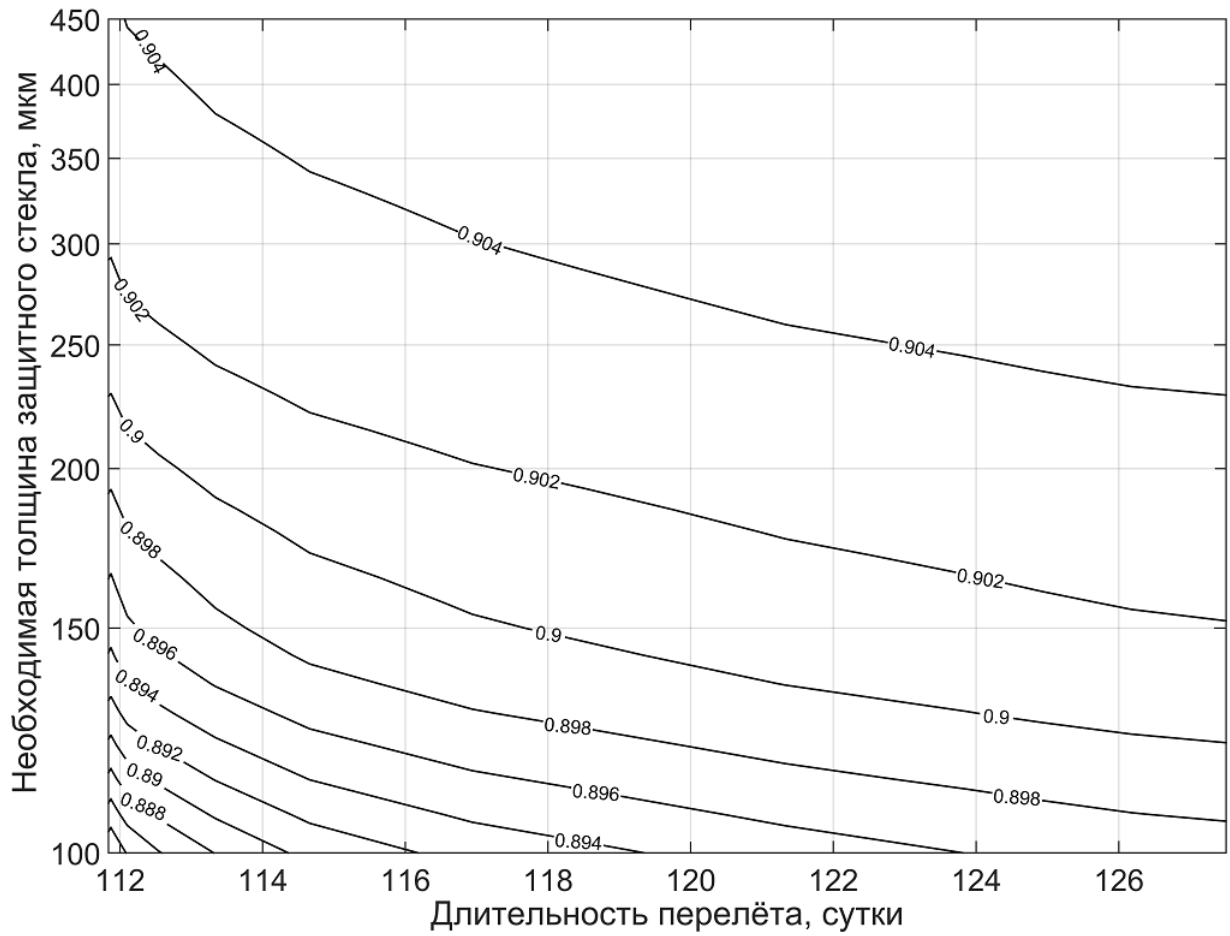


Рисунок 3.30 – Зависимость необходимой толщины лицевого защитного стекла СБ от времени перелёта на полученных траекториях выведения на ГСО с промежуточной орбиты №7 из Таблицы 3.1 с аргументом перигея $\omega_0 = 180^\circ$

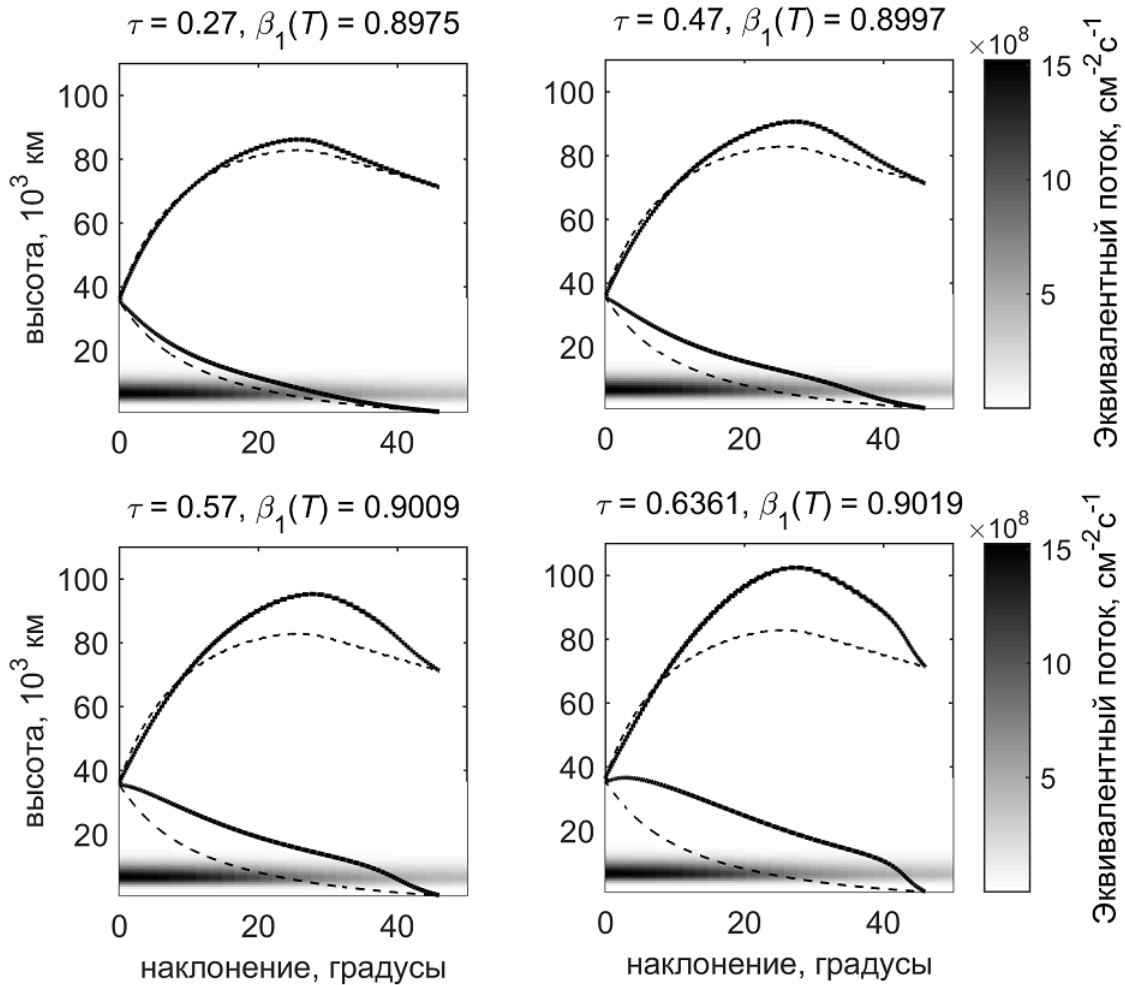


Рисунок 3.31 – Зависимости высоты перигея и апогея от наклонения на полученных траекториях выведения на ГСО с промежуточной орбиты №7 из Таблицы 3.1 с аргументом перигея $\omega_0 = 180^\circ$ при различных значениях параметра продолжения τ

на траектории оптимального быстрогодействия. Две непрерывные линии соответствуют зависимости высоты перигея и апогея от наклонения на траектории, полученной при данном значении параметра продолжения. Оттенками серого на каждом графике показана величина осредненного эквивалентного потока электронов 1 МэВ падающего на СБ. На графиках видна тенденция к вынесению перигейных участков траектории выше границы внутреннего РПЗ, а также к увеличению максимальной высоты апогея. Также на Рисунке 3.31 можно заметить, что по мере увеличения конечной относительной мощности СБ изменение наклонения орбиты всё меньше происходит в области пересечения траекторией КА внутреннего РПЗ и всё больше — вне этой области. Этот факт частично подтверждает правильность расчётов, так как видно, что с уменьшением наклонения эквивалентный поток внутри радиационных поясов растёт, и поэтому выгоднее в плане радиационной нагрузки пересекать РПЗ (другими словами набирать высоту) в области больших наклонений.

Рассмотрим также кроме качественных свойств полученных траекторий технические аспекты предлагаемого подхода оптимизации траекторий. В частности, рассмотрим численные примеры интегрирования траекторий с заданной конечной относительной мощностью СБ, описанные автором в работе [71]. На этих примерах можно показать эффективность применения описанной в разделе 2.2 аппроксимационной модели EIR3 зависимости эквивалентного потока от времени и положения КА в околоземном пространстве. Для этого сначала рассмотрим результаты численного интегрирования неосредненных уравнений движения (1.33), (1.34), (1.36) и уравнения для осредненной относительной мощности СБ (2.20) на траектории оптимального быстрогодействия для перелёта на ГСО с промежуточной орбиты №11 из Таблицы 3.1 с нулевыми аргументом перигея и долготой восходящего узла. При решении краевой задачи в случае центрального ньютоновского потенциала притяжения Земли было получено время перелёта $T = 164.910$ суток и следующие начальные значения сопряжённых переменных:

$$\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1.212443564873867 \\ 1.299812619348015 \\ 0 \\ -0.990267271180282 \\ 0.0000000000000002 \end{pmatrix}, \quad p_\beta(0) = 0. \quad (3.23)$$

Для сравнения эффективности интегрирования уравнений движения для указанных выше начальных условий интегрировалась система неосредненных уравнений (1.33), (1.34), (1.36) с дополнительным уравнением для неосредненной относительной мощности СБ

$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{CU_1(t, \vec{r}(t))}{\Phi_X} \exp\left(-\frac{1-\beta}{C}\right) \quad (3.24)$$

с начальным условием $\beta_1(0) = 1 - C \ln(1 + \Phi_{\text{ГСО}}/\Phi_X)$. При этом функция U_1 рассчитывалась на каждом шаге численного интегрирования с помощью программного комплекса IRBEM в режиме использования моделей потоков частиц РПЗ AE8/AP8 MAX. Результаты расчётов зависимости осредненной и неосредненной относительной мощности СБ от времени на неосредненной траектории представлены на Рисунке 3.32.

Аналогичные расчёты были проведены и для осредненных траекторий, результаты которых приведены на Рисунке 3.33. Начальные значения всех переменных и продолжительность перелёта при этом использовались те же, что и для случая неосредненных траекторий. На рисунках видно, что при интегрировании траекторий с использованием программного комплекса IRBEM совершается существенно большее число шагов, чем при использовании аппроксимационной модели EIR3. При этом стоит отметить, что не смотря на существенное отличие форм графиков осредненной и неосредненной относительной мощности СБ, ошибка расчёта мощности СБ

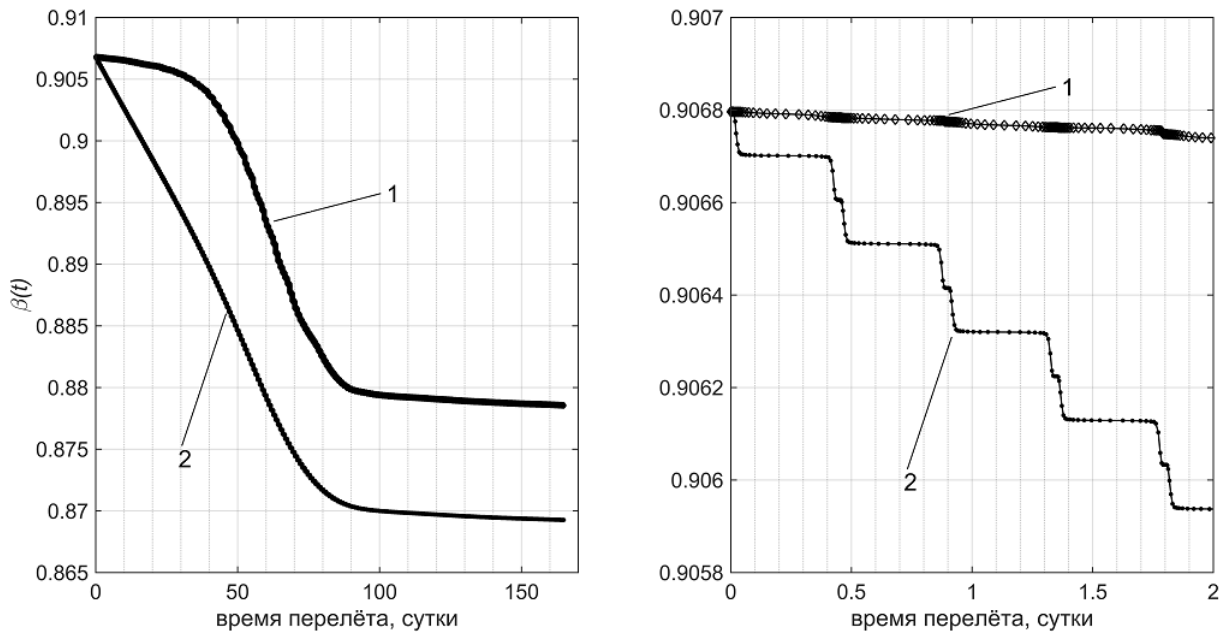


Рисунок 3.32 – Зависимость осредненной и неосредненной относительной мощности СБ от времени на неосредненной траектории оптимального быстрогодействия в течение всего перелёта (слева) и на первых 2 сутках (справа). 1 – IRBEM; 2 – EIR3.

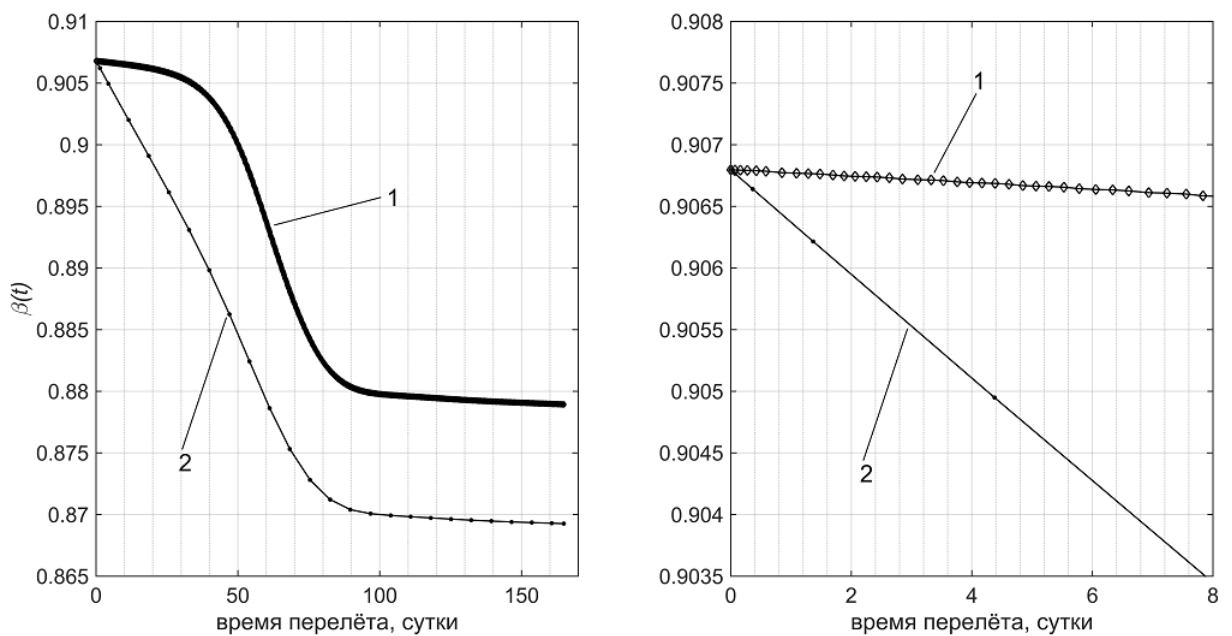


Рисунок 3.33 – Зависимость осредненной и неосредненной относительной мощности СБ от времени на осредненной траектории оптимального быстрогодействия в течение всего перелёта (слева) и на первых 8 сутках (справа). 1 – IRBEM; 2 – EIR3.

Таблица 3.2 – Статистика численного интегрирования расширенных уравнений движения КА на траектории оптимального быстрогодействия

Способ расчёта функции U	тип движения	среднее время интегрирования, с	число вызовов правых частей	число принятых шагов	число отвергнутых шагов
IRBEM	осредненное	7814	14381	905	218
EIR3	осредненное	1.14	351	27	0
IRBEM	неосредненное	641	135708	7716	2950
EIR3	неосредненное	2.35	92151	5403	1826

на конец САС с помощью аппроксимационной модели как в случае осредненных траекторий, так и в случае неосредненного движения не превосходит 1% от начальной мощности СБ.

Статистика интегрирования всех четырёх вариантов траекторий приведена в Таблице 3.2. Из этой таблицы видно, что введение аппроксимационной модели эквивалентного потока позволяет ускорить время интегрирования в 270 раз для неосредненного движения, и в 6800 раз — для осредненного. Число вызовов правых частей при этом сокращается в 1.5 раза для неосредненного движения, и в 41 раз — для осредненного. Такое существенное снижение вычислительной сложности делает задачу максимизации мощности СБ на конец САС решаемой на практике, поскольку при решении этой задачи необходимо интегрирование системы (1.33)–(1.36) сотни и тысячи раз.

Рассмотрим ещё один численный пример интегрирования расширенных уравнений движения КА при перелёте с начальной орбиты на ГСО с фиксированной конечной относительной мощностью СБ. В данном примере в качестве промежуточной орбиты используется орбита №5 из Таблицы 3.1 с нулевыми аргументом перигея и долготой восходящего узла. Время перелёта в случае центрального ньютоновского потенциала притяжения Земли составляет 111.827 суток. Начальные значения сопряжённых переменных равны

$$\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 6.957689206416572 \\ 4.271458788411569 \\ -0.000000000000984 \\ -0.981046922403389 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_\beta(0) = 90.281264187801455 \quad (3.25)$$

Таблица 3.3 – Статистика численного интегрирования уравнений (1.33), (1.34), (2.20), (1.36) на траектории перелёта с заданной конечной относительной мощностью СБ

Способ расчёта функции U	среднее время интегрирования, с	число вызовов правых частей	число принятых шагов	число отвергнутых шагов
кубический сплайн	0.359	111725	4805	4105
EIR3	0.891	43340	2624	769

Будем интегрировать неосредненные уравнения движения КА (1.33), (1.34), (2.20), (1.36) в случае использования аппроксимационной модели осредненного эквивалентного потока EIR3 и в случае использования в качестве функции $V(r, i)$ кубического сглаживающего сплайна, полученного при построении гладкой аппроксимационной модели EIR3. Статистика интегрирования траекторий приведена в Таблице 3.3. Использование кубического сплайна при интегрировании траектории приводит ускорению вычислений почти в 2.5 раза, но при этом число вызовов правых частей также возрастает более, чем в 2.5 раза. Рассмотрим зависимости от времени осредненной относительной мощности СБ за первые двое суток перелёта для этих двух случаев, изображенные на Рисунке 3.34. Видно, что в случае кубического сплайна сгущения точек появляются (отмечены стрелками) не только в моменты резкого изменения мощности СБ, что свидетельствует о прохождении точек разрывов производных с возможной потерей точности. Поэтому применение сплайнов высокого порядка как в модели EIR3 может быть более предпочтительно с точки зрения точности численного интегрирования траекторий КА с ЭРДУ и вычисления невязок на правом конце.

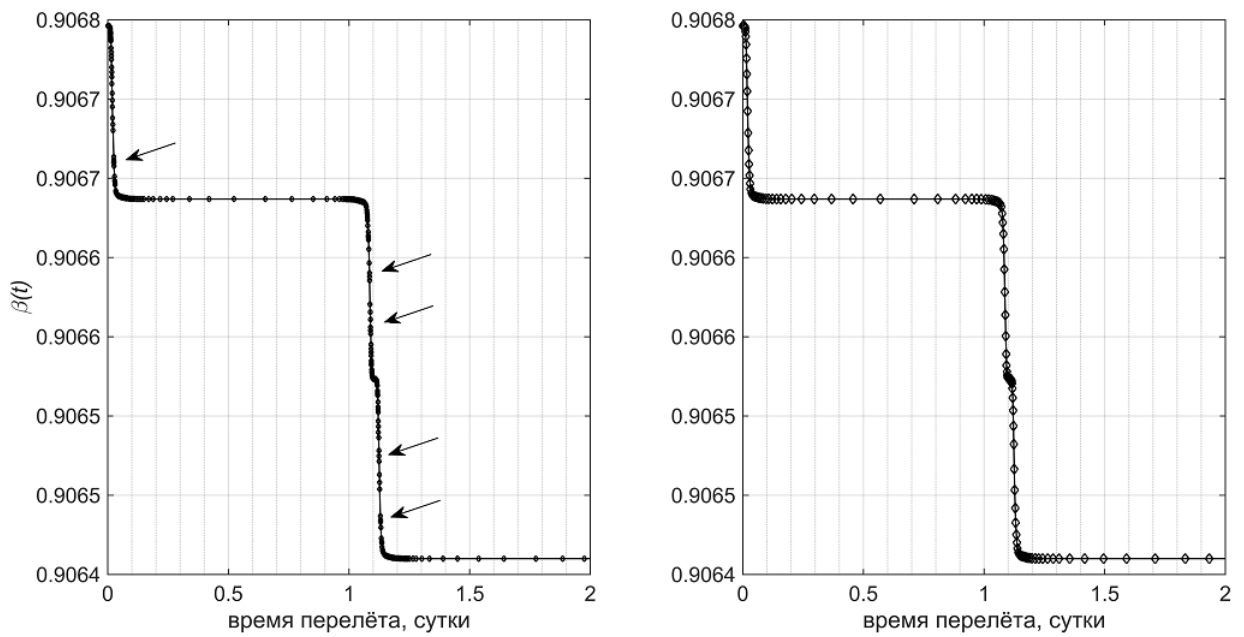


Рисунок 3.34 – Зависимость осредненной относительной мощности СБ от времени перелёта на траектории с заданной конечной относительной мощностью СБ. Слева изображён расчёт с использованием кубического сглаживающего сплайна, справа – расчёт с использованием аппроксимационной модели EIR3. Траектория рассчитана без осреднения движения.

Заключение

Диссертационная работа посвящена применению непрямых методов для решения задач оптимизации траектории выведения КА с ЭРДУ на ГСО с целью снижения радиационной нагрузки на бортовые системы КА. В работе исследуются возможности снижения поглощенной дозы радиации и величины радиационной деградации мощности СБ путём вариации траектории электроракетного этапа выведения КА на ГСО при помощи РБ и ЭРДУ.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

- разработана общая методика оптимизации траекторий многовитковых перелётов КА с ЭРДУ на основе принципа максимума Понтрягина для снижения воздействия космической радиации на бортовые системы КА;
- разработана методика построения гладких аппроксимаций мощности поглощенной дозы и эквивалентного потока электронов 1 МэВ, применимых при численной оптимизации траекторий перелётов КА с ЭРДУ непрямыми методами; в частности, предложен метод осреднения радиационных функционалов на круговых орбитах, позволяющий снизить сложность и трудоемкость вычисления правых частей и ускорить вычисления в сотни и тысячи раз;
- получены траектории перелёта КА с ядерной энергетической установкой и ЭРДУ с низкой круговой орбиты на ГСО с поглощенной дозой радиации, меньшей чем на траектории оптимального быстрогодействия; показана возможность снижения дозы на 40% от дозы на траектории оптимального быстрогодействия, дополнительные затраты характеристической скорости при этом не превосходят 560 м/с;
- обнаружен эффект немонотонного изменения максимального на траектории перелёта эксцентриситета при снижении конечной дозы радиации в задаче перелёта КА с ядерной энергетической установкой и ЭРДУ с низкой круговой орбиты на ГСО;
- получены траектории перелёта КА с солнечной ЭРДУ с геопереходной орбиты на ГСО с мощностью СБ на конец выведения большей, чем на траекториях оптимального быстрого-

действия; показана возможность повышения остаточной мощности СБ на конец выведения на 5% от мощности на начало перелёта для кремниевых ФЭП и на 1.6% — для трехкаскадных ФЭП; дополнительные затраты характеристической скорости для случая кремниевых ФЭП не превосходят 760 м/с, трехкаскадных — 400 м/с;

- разработан комплекс программ для оптимизации траекторий многовитковых перелётов КА с ЭРДУ, реализующий указанные выше наработки автора.

Стоит добавить, что разработанный общий подход к решению задач траекторной оптимизации радиационной нагрузки на системы КА может быть применён и к другим функционалам, связанным с воздействием космической радиации на бортовые системы. Основным требованиями к виду рассматриваемого функционала являются возможность описать его количественно уравнением вида (1.15) с непрерывно дифференцируемой правой частью, а также существенно неоднородное пространственное распределение в околоземном пространстве интенсивности роста рассматриваемого функционала. Поскольку предлагаемый метод основан на пространственной вариации траектории перелёта, то величина снижения радиационной нагрузки в результате применения метода будет напрямую зависеть не только от параметров начальной и конечной орбит, но и от того насколько резко и сильно меняется (оставаясь при этом непрерывной) правая часть уравнения (1.15) в околоземном пространстве.

Стоит добавить также, что одним из возможных путей дальнейшего улучшения предложенной методики является применение методов решения системы нелинейных уравнений (1.43), возникающей из принципа максимума, использующих наилучший параметр продолжения [20]. В методах данной группы в качестве параметра продолжения используется длина дуги кривой $\vec{z}(\tau)$, что позволяет справиться с ситуациями когда наблюдаются большая или даже бесконечная чувствительность производных $\partial \vec{f} / \partial \vec{z}$ к изменению значений вектора неизвестных параметров \vec{z} .

Список сокращений и условных обозначений

- БА — бортовая аппаратура,
ГСО — геостационарная орбита,
КА — космический аппарат,
КПД — коэффициент полезного действия,
МЭРБ — многоразовый электроракетный буксир,
МПН — модуль полезной нагрузки,
ПАО — приборно-агрегатный отсек,
РБ — разгонный блок,
РН — ракета-носитель,
РПЗ — радиационные пояса Земли,
САС — срок активного существования,
СБ — солнечные батареи,
СПД — стационарный плазменный двигатель,
СЭРДУ — солнечная электроракетная двигательная установка,
СЭС — система электроснабжения,
ФЭП — фотоэлектрический преобразователь,
ЧЭ — чувствительный элемент,
ЭРДУ — электроракетная двигательная установка,
ЯЭРДУ — ядерная электроракетная двигательная установка,
ЯЭУ — ядерная энергетическая установка,
- ω — аргумент перигея,
 a — большая полуось орбиты,
 \vec{f} — вектор невязок краевой задачи,

\vec{b} — вектор невязок краевой задачи на начальном приближении решения,
 \vec{z} — вектор неизвестных параметров краевой задачи,
 \vec{r} — вектор положения КА,
 \vec{p} — вектор сопряженных переменных,
 \vec{x} — вектор фазовых переменных,
 P — величина реактивной тяги ЭРДУ,
 t — время,
 H_{opt} — гамильтониан,
 μ — гравитационный параметр Земли,
 T — длительность перелёта с помощью ЭРДУ,
 Ω — долгота восходящего узла,
 ν — истинная аномалия,
 N — максимальная электрическая выходная мощность СБ,
 m — масса КА,
 N_D — мощность дозы,
 i — наклонение орбиты,
 D — накопленная ЧЭ доза космической радиации,
 Q — обобщенная радиационная фазовая переменная,
 β — относительная выходная электрическая мощность СБ,
 τ — параметр продолжения,
 a_X, a_Y, a_Z — проекции возмущающего ускорения на орбитальную систему координат,
 w — скорость истечения рабочего тела ЭРДУ,
 λ_a — сопряженная к большой полуоси переменная,
 λ_i — сопряженная к наклонению переменная,
 λ, λ_0 — толщина стенок радиационной защиты КА,
 g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли,
 ψ — угол рысканья,
 ϑ — угол тангажа,
 r — удаление КА от центра Земли,
 I_{sp} — удельный импульс ЭРДУ,
 p — фокальный параметр орбиты,
 δ — функция включения ЭРДУ ($\delta = 1$ — ЭРДУ включена, $\delta = 0$ — выключена),
 ψ_s — функция переключения,
 H — функция Понтрягина,

U, V — эквивалентный поток электронов с энергией 1 МэВ,

Φ — эквивалентный флюенс электронов с энергией 1 МэВ,

e — эксцентриситет орбиты.

Список литературы

1. Electric Propulsion Activity in Russia / V. Kim, G. Popov, B. Arkhipov et al. // 27th International Electric Propulsion Conference, Paper IEPC-01-05, Pasadena, CA, October 15–19. 2001.
2. Ким В. Стационарные плазменные двигатели в России: проблемы и перспективы // Электронный журнал «Труды МАИ». 2012. Т. 60.
3. Starlink Mission Press Kit, https://www.spacex.com/sites/spacex/files/starlink_press_kit.pdf.
4. BepiColombo: ESA's Interplanetary Electric Propulsion Mission to Mercury / O. Sutherland, D. Stramaccioni, J. Benkhoff et al. // 36th International Electric Propulsion Conference, Paper IEPC-2019-824, Vienna, Austria, September 15–20. 2019.
5. The Technological and Commercial Expansion of Electric Propulsion in the Past 24 Years / D. Lev, R. M. Myers, K. M. Lemmer et al. // 35th International Electric Propulsion Conference, Paper IEPC-2017-242, Atlanta, Georgia, USA, October 8–12. 2017.
6. Yermoshkin Y. M., Volkov D. V., Yakimov E. N. On the Concept of All Electric Propulsion Spacecraft // Siberian Journal of Science and Technology. 2018. Vol. 19, no. 3. P. 489–496.
7. Dudley R. S. Rescue in Space // Air Force Magazine. 2012. P. 38–41.
8. Лоуден Д. Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966.
9. Ильин В. А., Кузмак Г. Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. М.: Наука, 1976.
10. Захаров Ю. А. Проектирование межорбитальных космических аппаратов. Выбор траекторий и проектных параметров. М.: Машиностроение, 1984.
11. Лебедев В. Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. Математические методы в динамике космических аппаратов № 5. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. URL: <http://books.google.ru/books?id=V2N9GwAACAAJ>.

12. Betts J. T. Trajectory optimization using sparse sequential quadratic programming // *Optimal control: Calculus of Variations, Optimal Control Theory, and Numerical Methods*. International Series of Numerical Mathematics no. 111. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 1993. P. 115–128.
13. Betts J. T. Survey of numerical methods for trajectory optimization // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1998. Vol. 21, no. 2. P. 193–207.
14. Betts J. T. Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2000. Vol. 120, Issues 1–2. P. 27–40.
15. Ulybyshev Y. Spacecraft Trajectory Optimization Based on Discrete Sets of Pseudoimpulses // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2009. Vol. 32, no. 4. P. 1209–1217.
16. Константинов М. С. Методы математического программирования в проектировании летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1975.
17. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе [и др.]. М.: Наука, 1969.
18. Григорьев И. С., Егоров В. А., Рыжов С. Ю. Оптимизация многовитковых межорбитальных перелётов КА // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2005. № 63. С. 1–24. URL: http://keldysh.ru/papers/2005/prep63/prep2005_63.pdf.
19. Рыжов С. Ю., Григорьев И. С. К проблеме решения задач оптимизации многовитковых траекторий межорбитальных перелетов КА // *Космические исследования*. 2006. Т. 44, № 3. С. 272–281.
20. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). М.: Эдиториал УРСС, 1999. С. 224.
21. Haberkorn T., Martinon P., Gergaud J. Low Thrust Minimum-Fuel Orbital Transfer: A Homotopic Approach // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2004. Vol. 27, no. 6. P. 1046–1060.
22. Петухов В. Г. Оптимизация многовитковых перелётов между некомпланарными эллиптическими орбитами // *Космические исследования*. 2004. Т. 42, № 3. С. 1–20.
23. Петухов В. Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // *Космические исследования*. 2012. Т. 50, № 3. С. 258–270.

24. Edelbaum T. N. Optimum power-limited orbit transfer in strong gravity fields // AIAA J. 1965. Vol. 3, no. 5. P. 921–925.
25. Суханов А. А. Астродинамика. М.: ИКИ РАН, 2010.
26. Pierson B. L., Kluever C. A. Three Stage Approach to Optimal Low-Thrust Earth Moon Trajectories // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1994. Vol. 17, no. 6. P. 1275–1282.
27. Kluever C. A., Pierson B. L. Optimal Low-Thrust Three-Dimensional Earth-Moon Trajectories // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1995. Vol. 18, no. 4. P. 830–837.
28. Tada H. Y., Carter J. R., Anspaugh B. E. et al. Solar Cell Radiation Handbook, Third Edition, JPL Publication 82-69. 1982.
29. Anspaugh B. E. GaAs Solar Cell Radiation Handbook, JPL Publication 96-9. 1996.
30. Модель космоса: научно-информационное издание: В 2 т. / под ред. М. И. Панасюка, Л. С. Новикова. М.: КДУ, 2007.
31. Ионизирующие излучения космического пространства и их воздействие на бортовую аппаратуру космических аппаратов / под ред. докт. техн. наук проф. Г. Г. Райкунова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013.
32. Study of Operation of Power and Propulsion System based on Closed Brayton Cycle Power Conversion Unit and Electric Propulsion / A. S. Koroteev, A. V. Karevskiy, A. S. Lovtsov et al. // 36th International Electric Propulsion Conference, Paper IEPC-2019-A187, Vienna, Austria, September 15–20. 2019.
33. Радиационные условия в космическом пространстве: Учебное пособие / М. И. Панасюк, Н. Н. Калмыков, А. С. Ковтюх [и др.]; под ред. М. И. Панасюка. М.: Библион — Русская книга, 2006.
34. Xapsos M. A., O'Neill P. M., O'Brien T. P. Near-Earth Space Radiation Models // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2013. Vol. 60, no. 3. P. 1691–1705.
35. AE9, AP9 and SPM: New Models for Specifying the Trapped Energetic Particle and Space Plasma Environment / G. P. Ginet, T. P. O'Brien, S. L. Huston et al. // Space Sci. Rev. 2013. Vol. 179. P. 579–615.
36. International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation / E. Thébaud, C. C. Finlay, C. C. Beggan et al. // Earth, Planets and Space. 2015. Vol. 67, no. 79. P. 1–19.

37. Juno Radiation Design and Implementation / S. Kayali, W. McAlpine, H. Becker et al. // 2012 IEEE Aerospace Conference. Big Sky, MT, USA: 2012. March 3–10.
38. Grammier R. S. A Look inside the Juno Mission to Jupiter // 2009 IEEE Aerospace Conference. Big Sky, MT, USA: 2009. March 7–14.
39. Обеспечение радиационной стойкости аппаратуры космических аппаратов при проектировании / С. Полесский, В. Жаднов, М. Артюхова [и др.] // Компоненты и технологии. 2010. № 9.
40. Sackett L. L., Malchow H. L., Edelbaum T. N. Solar Electric Geocentric Transfer with Attitude Constraints: Analysis, NASA CR-134927. 1975.
41. Electric Vehicle Analyzer / K. A. Ennix, M. R. Dickey, R. S. Klucz et al. // 21st International Electric Propulsion Conference, AIAA Paper 1990-2573. 1990. July.
42. Fitzgerald A. The Effect of Solar Array Degradation in Orbit-Raising with Electric Propulsion // Proceedings of the International Electric Propulsion Conference, IEPC Paper 1993-207, Electric Rocket Propulsion Soc. Fairview Park, OH, USA: 1993. Sept. P. 1889–1895.
43. Byers D. C., Dankanich J. W. Geosynchronous-Earth-Orbit Communication Satellite Deliveries with Integrated Electric Propulsion // Journal of Propulsion and Power. 2008. Vol. 24, no. 6. P. 1369–1375.
44. Синицын А. А. Влияние деградации солнечных батарей на эффективность применения электроракетных двигателей // Полёт. 2010. № 1. С. 22–29.
45. Low-Thrust Geostationary Transfer Orbit (LT2GEO) Radiation Environment and Associated Solar Array Degradation Modeling and Ground Testing / S. R. Messenger, F. Wong, B. Hoang et al. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2014. Vol. 61, no. 6. P. 3348–3355.
46. Ceccherini S., Topputo F. System-Trajectory Optimization of Hybrid Transfers to the Geostationary Orbit // AIAA SciTech Forum. 2018 Space Flight Mechanics Meeting. Kissimmee, Florida: 2018. January 8–12.
47. Проектно-баллистический анализ транспортных операций космического буксира с электроракетными двигателями при перелетах на геостационарную орбиту, орбиту спутника Луны и в точки либрации системы Земля — Луна / В. В. Салмин, О. Л. Старинова, А. С. Четвериков [и др.] // Космическая техника и технологии. 2018. № 1. С. 82–97.

48. Kluever C. A., Messenger S. R. Solar-Cell Degradation Model for Trajectory Optimization Methods // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2019. Vol. 56, no. 3. P. 844–853.
49. Петрухина К. В., Салмин В. В. Оптимизация баллистических схем перелетов между некомпланарными орбитами с помощью комбинации двигателей большой и малой тяги // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2010. Т. 12, № 4. С. 186–201.
50. Minimum-Fuel Electric Orbit-Raising of Telecommunication Satellites Subject to Time and Radiation Damage Constraints / A. Dutta, P. Libraro, N. J. Kasdin et al. // 2014 American Control Conference (ACC). Portland, Oregon, USA: 2014. June 4–6.
51. Redding D. Avoiding the Van Allen Belt in Low-Thrust Transfer To Geosynchronous Orbit // 21st Aerospace Sciences Meeting, AIAA Paper 1983-0195. Reno, Nevada: 1983. January 10–13.
52. Biagioni L. Evolutionary Optimization of Launch Vehicle Electric Propulsion Integration for GEO Missions // 36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA Paper 2000-3418. 2000. July.
53. Mailhe L. M., Heister S. D. Design of a Hybrid Chemical/Electric Propulsion Orbital Transfer Vehicle // *J. Spacecraft Rockets*. 2002. Vol. 39, no. 1. P. 131–139.
54. Ariane 5-ME and Electric Propulsion: GEO Insertion Options / O. B. Duchemin, A. Caratge, N. Cornu et al. // 47th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA Paper 2011-6084. 2011. July–Aug.
55. Libraro P. A Globally Nonsingular Quaternion-Based Formulation for All-Electric Satellite Trajectory Optimization. Ph.D. thesis: Princeton University. 2016.
56. Macdonald M., Owens S. R. Combined high and low-thrust geostationary orbit insertion with radiation constraint // *Acta Astronautica*. 2018. Vol. 54. P. 1–9.
57. Dutta A., Choueiri E. Minimizing Radiation Fluence during Time-Constrained Electric Orbit-Raising // 23rd International Symposium On Space Flight Dynamics. Pasadena, CA: 2012.
58. Jehn R. Radiation Optimum Solar-Electric-Propulsion Transfer From GTO to GEO // 24th International Symposium On Space Flight Dynamics. Laurel, MD: 2014.
59. Dutta A., Kasdin N. J., Choueiri E. Minimizing Proton Displacement Damage Dose During Electric Orbit Raising of Satellites // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2016. Vol. 39, no. 4. P. 960–967.

60. Levenberg K. A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares // *Quart. Appl. Math.* 1944. Vol. 2. P. 164–168.
61. Marquardt D. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // *SIAM J. Appl. Math.* 1963. Vol. 11. P. 431–441.
62. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems / Ed. by R. Bank, R. L. Graham, J. Stoer et al. Springer Series in Computational Mathematics no. 8. Second Revised edition. Berlin: Springer, 2008.
63. Dormand J. R., Prince P. J. A Family of Embedded Runge-Kutta formulae // *J. Comput. Appl. Math.* 1980. Vol. 6, no. 1. P. 19–26.
64. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems / Ed. by R. Bank, R. L. Graham, J. Stoer et al. Springer Series in Computational Mathematics no. 14. Second Revised edition. Berlin: Springer, 2010.
65. MATLAB method ode113. Solve nonstiff differential equations — variable order method, <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode113.html>.
66. Shampine L. F., Gordon M. K. Computer Solution of Ordinary Differential Equations: the Initial Value Problem. San Francisco: W. H. Freeman & Co., 1975.
67. Старченко А. Е. Оптимизация поглощенной дозы радиации при перелётах на геостационарную орбиту с малой тягой // *Труды МФТИ.* 2015. Т. 7, № 4. С. 192–204.
68. Старченко А. Е. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на геостационарную орбиту с целью снижения уровня радиационной деградации солнечных батарей // *Известия Российской академии наук. Энергетика.* 2017. № 3. С. 128–145.
69. Старченко А. Е. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на геостационарную орбиту с целью снижения поглощённой дозы космической радиации // *Космические исследования.* 2019. Т. 57, № 4. С. 308–320.
70. Старченко А. Е. Минимизация деградации трехкаскадных солнечных батарей космического аппарата при выведении на геостационарную орбиту // *Космические исследования.* 2019. Т. 57, № 5. С. 386–400.
71. Старченко А. Е. Сглаживание функции эквивалентного потока в задаче минимизации деградации солнечных батарей при выведении на геостационарную орбиту // *Вестник «НПО им. С. А. Лавочкина».* 2019. № 2 (44). С. 65–73.

72. Starchenko A. E. Trajectory Optimization of a Low-Thrust Geostationary Orbit Insertion for Total Ionizing Dose Decrease // *Cosmic Research*. 2019. Vol. 57, no. 4. P. 289–300.
73. Starchenko A. E. Minimizing the Degradation of Triple Junction Solar Array of a Spacecraft during Geostationary Orbit Insertion // *Cosmic Research*. 2019. Vol. 57, no. 5. P. 364–377.
74. Старченко А. Е. Прохождение радиационных поясов Земли космическим аппаратом с двигателями малой тяги и получением дозы радиации, не превосходящей заданную // Сборник трудов Всероссийской молодёжной конференции «Перспективы развития фундаментальных наук», проводимой в рамках Второй международной научной школы для молодёжи «Прикладные математика и физика: от фундаментальных исследований к инновациям». М.: МФТИ, 2011. С. 65–67.
75. Старченко А. Е. Минимизация дозы радиации, полученной космическим аппаратом с двигателями малой тяги при прохождении радиационных поясов Земли // Труды 54-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2011. С. 21–22.
76. Старченко А. Е. Минимизация дозы радиации, полученной космическим аппаратом с двигателями малой тяги при прохождении радиационных поясов Земли // Московская молодёжная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике — 2012». 17–20 апреля 2012 года. Москва. Сборник тезисов докладов. М.: ООО «Принт-салон», 2012. С. 73–74.
77. Старченко А. Е. Управление космическим аппаратом, снижающее дозу радиации, полученную им на орбите // 11-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2012». 13–15 ноября 2012 года. Москва. Тезисы докладов. СПб.: Мастерская печати, 2012. С. 136–137.
78. Старченко А. Е. Управление космическим аппаратом, снижающее дозу радиации, полученную им на орбите // Труды 55-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе», Научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики и астрономии», Всероссийской молодёжной научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2012. С. 19–20.

79. Старченко А. Е. Минимизация дозы радиации, полученной космическим аппаратом с двигателями малой тяги при прохождении радиационных поясов Земли // Материалы XIX научно-технической конференции молодых учёных и специалистов. 14–18 ноября 2011 г. Часть 2. / под ред. доктора технических наук В. В. Синявского; Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С. П. Королёва. XII № 3. г. Королёв: Типография РКК «Энергия» им. С. П. Королёва, 2012. С. 122–125.
80. Старченко А. Е. Управление космическим аппаратом, снижающее дозу радиации, полученную им на орбите // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXVII Академических чтений по космонавтике. Москва, январь–февраль 2013 г. / под ред. А. К. Медведевой. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2013. С. 532–533.
81. Старченко А. Е. Управление космическим аппаратом, снижающее дозу радиации, полученную им на орбите // Сборник тезисов, материалы Девятнадцатой Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых (ВНКСФ-19, Архангельск): материалы конференции, тезисы докладов. Т. 1. Екатеринбург–Архангельск: издательство АСФ России, 2013. С. 296–297.
82. Старченко А. Е., Сумароков А. В. Управление космическим аппаратом, снижающее дозу радиации, полученную им на орбите // Московская молодёжная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике — 2013». 16–18 апреля 2013 года. Москва. Сборник тезисов докладов. М.: ООО «Принт-салон», 2013. С. 144–145.
83. Старченко А. Е., Сумароков А. В. Выпуклая минимизация поглощённой дозы радиации и расхода рабочего тела при довыведении космического аппарата // 12-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2013». 12–15 ноября 2013 года. Москва. Тезисы докладов. СПб.: Мастерская печати, 2013. С. 252–254.
84. Старченко А. Е. Выпуклая минимизация поглощённой дозы радиации и расхода рабочего тела при довыведении космического аппарата // Труды 56-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе», Всероссийской молодежной научно-инновационной конференции «Физико-математические науки: актуальные проблемы и их решения». Аэрофизика и космические исследования. Т. 1. М.: МФТИ, 2013. С. 70–72.

85. Старченко А. Е. Выпуклая минимизация поглощённой дозы радиации и расхода рабочего тела при довыведении космического аппарата // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXVIII Академических чтений по космонавтике. Москва, январь 2014 г. / под ред. А. К. Медведевой. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2014. С. 487–488.
86. Старченко А. Е. Выпуклая минимизация поглощённой дозы радиации и расхода рабочего тела при довыведении космического аппарата // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014» / под ред. А. И. Андреева и Е. А. Антипова. [Электронный ресурс]. М.: МАКС Пресс, 2014. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. - Систем. требования: ПК с процессором 486+; Windows 95; дисковод CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.
87. Старченко А. Е. Выпуклая минимизация поглощённой дозы радиации и расхода рабочего тела при довыведении космического аппарата // Тезисы докладов XX научно-технической конференции молодых учёных и специалистов. 10–14 ноября 2014 г. Королёв: 2014. С. 148–149.
88. Старченко А. Е. Выпуклая минимизация поглощённой дозы радиации и расхода рабочего тела при довыведении космического аппарата // Труды 57-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики», Всероссийской молодежной научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе». Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2014. С. 80–81.
89. Старченко А. Е. Выпуклая минимизация поглощённой дозы радиации и расхода рабочего тела при довыведении космического аппарата // 13-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2014». 17–21 ноября 2014 года. Москва. Тезисы. СПб.: Мастерская печати, 2014. С. 188–190, 676–678.
90. Старченко А. Е. Выпуклая минимизация поглощённой дозы радиации и расхода рабочего тела при довыведении космического аппарата // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXIX Академических чтений по космонавтике, посвященных памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых-пионеров освоения космического пространства. Москва, 27–30 января 2015 г. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. С. 406–407.

91. Старченко А. Е. Траектории довыведения космического аппарата с заданной поглощенной дозой радиации // 14-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2015». 16–20 ноября 2015 года. Москва. Тезисы. Типография «Люксор», 2015. С. 85–86.
92. Старченко А. Е. Траектории довыведения космического аппарата с заданной поглощенной дозой радиации // Труды 58-й научной конференции МФТИ. Аэрофизика и космические исследования / под ред. к.т.н. С.С. Негодяева. М.: МФТИ, 2015. С. 101–102.
93. Старченко А. Е. Траектории довыведения космического аппарата с заданной поглощенной дозой радиации // XL Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных учёных — пионеров освоения космического пространства : сборник тезисов / Российская академия наук, Государственная корпорация по космической деятельности «РОСКОСМОС», Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана. Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. С. 84–85.
94. Старченко А. Е. Оптимизация траектории выведения на геостационарную орбиту с целью снижения радиационной нагрузки на космический аппарат // 15-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2016». 14–18 ноября 2016 года. Москва. Тезисы. Типография «Люксор», 2016. С. 322–323.
95. Старченко А. Е. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на геостационарную орбиту с целью снижения радиационной нагрузки на солнечные батареи // Труды 59-й научной конференции МФТИ. Аэрофизика и космические исследования / под ред. к.т.н. С. С. Негодяева; сост. Ю. О. Алексеева. М.: МФТИ, 2016. С. 119–121.
96. Старченко А. Е. Оптимизация траектории выведения на геостационарную орбиту с целью снижения радиационной нагрузки на космический аппарат // XLI Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных учёных — пионеров освоения космического пространства : сборник тезисов / Российская академия наук, Государственная корпорация по космической деятельности «РОСКОСМОС», Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана. Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. С. 86.

97. Старченко А. Е. Оптимизация траектории выведения на геостационарную орбиту с целью снижения радиационной нагрузки на космический аппарат // Труды 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 20–26 ноября 2017 г. Аэрокосмические технологии. М.: МФТИ, 2017. С. 109–110.
98. Старченко А. Е. Оптимизация траектории выведения на геостационарную орбиту с целью снижения радиационной нагрузки на космический аппарат // Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 19–25 ноября 2018 года. Аэрокосмические технологии. М.: МФТИ, 2018. С. 100–101.
99. Старченко А. Е. Оптимизация траектории перелета межорбитального буксира на геостационарную орбиту для снижения поглощенной дозы радиации // Решетневские чтения [Электронный ресурс] : материалы XXII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (12–16 нояб. 2018, г. Красноярск) : в 2 ч., Ч. 1 / под ред. Ю. Ю. Логинова. Красноярск: СибГУ им. М. Ф. Решетнева., 2018. С. 275–276. URL: <https://reshetnev.sibsau.ru/page/materialy-konferentsii>.
100. Старченко А. Е. Проектирование траекторий космических аппаратов с минимальной деградацией солнечных батарей при электроракетном выведении на геостационарную орбиту // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. 19–24 августа 2019 г., г. Уфа. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 71.
101. Starchenko A. E. Electric Propulsion Mission Design with Minimal Solar Cells Radiation Degradation // 36th International Electric Propulsion Conference, Paper IEPC-2019-270, Vienna, Austria, September 15–20. 2019.
102. Brouke R. A., Cefola P. J. On the Equinoctial Orbital Elements // *Celestial Mechanics*. 1972. no. 5. P. 303–310.
103. Battin R. H. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. Revised edition. Reston, Virginia: AIAA, 1999.
104. Kéchichian J. A. *Applied Nonsingular Astrodynamics: Optimal Low-Thrust Orbit Transfer* / Ed. by W. Shyy, V. Yang. Cambridge Aerospace Series no. 45. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
105. Лотов А. В., Поспелова И. И. Конспект лекций по теории и методам многокритериальной оптимизации. Учебное пособие. М., 2014.

106. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1992.
107. Салмин В. В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой. М.: Машиностроение, 1987.
108. Wiesel W. E., Alfano S. Optimal Many-Revolution Orbit Transfer // *Journal of Guidance*. 1985. January-February. Vol. 8, no. 1. P. 155–157.
109. Sawyer D. M., Vette J. I. AP-8 Trapped Proton Environment for Solar Maximum and Solar Minimum. NASA-TM-X-72605. NSSDC/WDC-A-R&S 76-06. 1976.
110. Vette J. I. Trapped Radiation Environment Model Program (1964–1991). NSSDC/WDC-A-R&S 91-29. 1991. November.
111. Vette J. I. The AE-8 Trapped Electron Model Environment. NSSDC/WDC-A-R&S 91-24. 1991.
112. Heynderickx D. Comparison between methods to compensate for the secular motion of the south Atlantic anomaly // *Rad. Meas.* 1996. Vol. 26, no. 3. P. 369–373.
113. Problems with Models of the Radiation Belts / E. J. Daly, J. Lemaire, D. Heynderickx et al. // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1996. Vol. 43, no. 2. P. 403–415.
114. Jensen D. C., Cain J. C. An Interim Geomagnetic Field // *J. Geophys. Res.* 1962. Vol. 67. P. 3568–3569.
115. A Proposed Model for the International Geomagnetic Reference Field-1965 / J. C. Cain, S. J. Hendricks, R. A. Langel et al. // *J. Geomag. Geoelec.* 1967. Vol. 19. P. 335–355.
116. Olson W. P., Pfitzer K. A. A Quantitative Model of the Magnetospheric Magnetic Field // *J. Geophys. Res.* 1974. Vol. 79, no. 25. P. 3739–3748.
117. Seltzer S. M. Updated calculations for routine space-shielding radiation dose estimates: SHIELDDOSE-2. NIST Publication, NISTIR 5477. Gaithersburg. 1994.
118. SPENVIS: The European Space Agency Space Environment Information System, <http://www.spennis.oma.be/>.
119. IRENE: International Radiation Environment Near Earth, version 1.50.001, <https://www.vdl.afrl.af.mil/programs/ae9ap9/downloads.php>.

120. Vampola A. L. Outer Zone Energetic Electron Environment Update // Conference on the High Energy Radiation Background in Space. Workshop Record. Snowmass, CO, USA: 1997.
121. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1985.
122. Reinsch C. Smoothing by Spline Functions // Numer. Math. 1967. Vol. 10. P. 177–183.
123. MATLAB Curve Fitting Toolbox Documentation. <https://www.mathworks.com/help/curvefit/spaps.html>
124. MATLAB Curve Fitting Toolbox Documentation. <https://www.mathworks.com/help/curvefit/fnder.html>.
125. MATLAB Curve Fitting Toolbox Documentation. <https://www.mathworks.com/help/curvefit/chbpnt.htm>
126. MATLAB Curve Fitting Toolbox Documentation. <https://www.mathworks.com/help/curvefit/spapi.html>.
127. Smits F. M. The Degradation of Solar Cells under Van Allen Radiation // IEEE Transactions on Nuclear Science. 1963. Vol. 10, no. 1. P. 88–96.
128. Radiation degradation characteristics of component subcells in inverted metamorphic triple-junction solar cells irradiated with electrons and protons / M. Imaizumi, T. Nakamura, T. Takamoto et al. // Prog. Photovolt: Res. Appl. 2017. Vol. 25. P. 161–174.
129. Spectrolab 25.1% GaInP₂/GaAs/Ge Triple Junction Solar Cells Data Sheet, <http://www.spectrolab.com/DataSheets/TJCell/tj.pdf>.
130. O'Brien P., Bourdarie S. IRBEM-LIB, <https://sourceforge.net/projects/irbem/>.
131. General EQFlux Computer Program, <https://opensource.gsfc.nasa.gov/projects/eqflux/index.php>.
132. MATLAB Curve Fitting Toolbox Documentation. <https://www.mathworks.com/help/curvefit/fnxtr.html>.
133. MATLAB Curve Fitting Toolbox Documentation. <https://www.mathworks.com/help/curvefit/fit.html>.
134. Легостаев В. П., Лопота В. А., Синявский В. В. Перспективы и эффективность применения космических ядерно-энергетических установок и ядерных электроракетных двигательных установок // Космическая техника и технологии. 2013. № 1. С. 4–15.
135. Выбор параметров эллиптической орбиты базирования для повышения безопасности применения многоразовых ядерных буксиров / Н. И. Архангельский, В. Н. Акимов, Е. Ю. Кувшинова [и др.] // Космическая техника и технологии. 2016. № 2. С. 45–54.