

Труды МАИ. 2023. № 133

Trudy MAI, 2023, no. 133

Научная статья

УДК 539.3:534.1

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177656>

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ КРАЯМИ**

**Артем Юрьевич Добрышкин<sup>1</sup>✉, Олег Евгеньевич Сысоев<sup>2</sup>, Евгений Олегович  
Сысоев<sup>3</sup>**

<sup>1,2,3</sup>Комсомольский-на-Амуре государственный университет,

Комсомольск-на-Амуре, Россия

<sup>1</sup>[wwwartem21@mail.ru](mailto:wwwartem21@mail.ru)✉

***Аннотация.*** В работе рассмотрены результаты экспериментальных исследований по проверке новой математической модели свободных колебаний тонкостенной пластины с жестко-защемленными краями. В настоящее время широко используются конструкции пластин с жестко закрепленными краями в самолетостроении и строительных конструкциях: зданиях и сооружениях, а также в различных отраслях промышленности. Вместе с тем на эти конструкции воздействуют различные нагрузки (ветровые, снеговые и вибрационные), что вызывает свободные колебания и приводят к явлениям резонанса, в некоторых случаях разрушению конструкции и техногенным катастрофам. Экспериментальные исследования на сегодня являются одними из самых действенных. Воздействие на

оболочку внешних сил позволяет получать в испытательном стенде экспериментальные зависимости частотной характеристики колебаний оболочки и величины присоединенной массы. Изучение свободных колебаний пластины позволяет изучать резонансные режимы колебаний, параметры их наступления, для предотвращения разрушения реальных оболочечных конструкций. Колебания с умеренными амплитудами свободных колебаний были разложены согласно полученных уравнений. Дискретная нелинейная модель колебаний тонкой оболочки, заземленной по краям, полученная при проведении исследований, проводилась с применением метода многих масштабов. При проведении экспериментальных исследований использован бесконтактный измеритель частотных характеристик системы HSV-2000 состоит из контроллера HSV2001/2002, лазерного блока HSV-800 и прочной компактной сенсорной головки HSV-700. Лазерный блок содержит интерферометр и маломощный лазер, а также осциллограф Rohde&Schwarz RTB2002. По результатам исследований проведена экспериментальная проверка математической модели свободных колебаний пластины с жестко заземленными краями. Как результат работы - описана зависимость первого собственного числа  $\lambda$  от  $\varepsilon$  для рекурсивной формулировки теории возмущений и аппроксимации Паде, а также экспериментальные данные. Предельная величина параметра  $\varepsilon$ , при котором различие в результатах, полученных при помощи рекурсивной формулировки теории возмущений и аппроксимации Паде будут находиться в пределах 5%,  $-\varepsilon = 0.4$ .

**Ключевые слова:** пластина, жесткое закрепление, свободные колебания

*Для цитирования:* Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О.  
Экспериментальная проверка математической модели свободных колебаний  
пластины с жестко заземленными краями // Труды МАИ. 2023. № 133. URL:  
<https://trudymai.ru/published.php?ID=177656>

Original article

## **EXPERIMENTAL VERIFICATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF FREE VIBRATIONS OF A PLATE WITH RIGIDLY CLAMPED EDGES**

**Artem Yu. Dobryshkin<sup>1</sup>✉, Oleg E. Sysoev<sup>2</sup>, Evgeny O. Sysoev<sup>3</sup>**

<sup>1,2,3</sup> Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia

<sup>1</sup>[wwwartem21@mail.ru](mailto:wwwartem21@mail.ru)✉

**Abstract.** The article considers the results of experimental studies on testing a new mathematical model of a thin-walled plate with rigidly clamped edges free oscillations. As of today, plate designs with rigidly fixed edges are widely employed in aircraft building and construction structures: buildings and structures, as well as in various industries. At the same time, these structures are subjected to various loads (wind, snow, and vibration), which cause free vibrations and lead to resonance phenomena, in some cases, structural failure and technogenic disasters. Experimental studies today is one of the most effective. The external forces impact on the shell allows obtaining experimental dependences of the frequency response of the shell vibrations and the value of the attached mass with the test

bench. The study of plate free vibrations allows studying the resonant vibration modes, the parameters of their onset, prevent destruction of the real shell structures. Vibrations with moderate amplitudes of free oscillations were decomposed according to the obtained equations. Verification of the discrete nonlinear oscillations model of the thin shell pinched at the edges, obtained during the research, was conducted using the multi-scale method. When performing experimental studies, a non-contact frequency response meter of the HSV-2000 system was applied. It consists of the HSV2001/2002 controller, HSV-800 laser unit and the rugged compact HSV-700 sensor head. The laser unit contains the interferometer and the low-power laser, as well as the Rohde & Schwarz RTB2002 oscilloscope. Based on the results of the research, experimental verification of the free oscillations mathematical model of a plate with rigidly clamped edges was performed. The results of the work allowed describing the dependence of the first eigenvalue  $\lambda$  on  $\varepsilon$  for the recursive formulation of the perturbation theory and the Padé approximation, as well as experimental data. The limiting value of the  $\varepsilon$  parameter, at which the difference in the results obtained by the recursive formulation of the perturbation theory and the Padé approximation will be within 5%, is  $\varepsilon = 0.4$ .

**Keywords:** plate, rigid fixing, free vibrations

**For citation:** Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. Experimental verification of the mathematical model of free vibrations of a plate with rigidly clamped edges. *Trudy MAI*, 2023, no. 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177656>

## **1. Введение**

В настоящее время конструкции пластин с заземленными опорными краями находят все более широкое распространение при строительстве зданий и сооружений и в других отраслях промышленности. На пластины, используемые в строительстве, воздействуют различные нагрузки, которые являются причиной запуска динамических процессов, например, взаимодействие изгибных и радиальных колебаний. Нагрузки могут иметь циклический характер (ветровые и снеговые) и вызывают вынужденные колебания, оказывают существенное влияние на процессы колебаний конструкции в целом. Присутствие всего комплекса воздействующих сил на конструкции приводит к наложению волновых процессов [1-6] и увеличению амплитуд колебаний, что может привести к разрушению.

Эти явления необходимо учитывать при проектировании конструкций. Но существующие расчетные модели имеют значительные расхождения с экспериментальными данными. Поэтому требуются новые уточненные математические модели расчета колебаний пластин из композитных материалов, а также их экспериментальные проверка.

## **2. Постановка задачи**

В рамках курса уточнения расчетных моделей необходимо провести исследования процессов свободных колебаний композитных пластин и разработать или уточнить математическую модель [14-17], для расчета частотных характеристик свободных колебаний композитных пластин при их проектировании.

### 3. Теоретические исследования

При исследовании свободных колебаний тонкой прямоугольной в плане пластины, с жестко заземленной с двух сторон используем общее уравнение колебаний пластины (1).

Перейдем к рассмотрению математической модели собственных колебаний прямоугольной пластины  $\left(-\frac{a}{2} \leq \bar{x} \leq \frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \leq \bar{y} \leq \frac{b}{2}\right)$  (рис.1) с жестко закрепленными краями

Уравнение движения, отражающее колебания тонкой прямоугольной пластины имеет вид:

$$D_1 \bar{W} + D_2 \bar{W} + \rho \bar{W}_n + C \bar{W} = 0 \quad (1)$$

Где  $D_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$ ,  $D_2 = D_1\nu + \frac{Gh^3}{6}$ ,  $C$  – коэффициент опирания;  $D_1$  – цилиндрическая жесткость;  $D_2$  – поворотная жесткость;  $E$  – модуль упругости;  $G$  – модуль сдвига;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $h$  – толщина оболочки.

Затем производим расщепление постоянных и временных в пространстве неизвестных ( $W=W(x,y)*T(t)$ ), переход к относительным величинам рассматриваемое уравнение окажется в следующем виде:

$$W_{xxxx} + 2\alpha_3 W_{xxyy} + \alpha_2 W_{yyyy} - \lambda W = 0 \quad (2)$$

где  $\alpha_3 = \frac{D_3}{D_1}$ ;  $\alpha_2 = \frac{D_2}{D_1}$ ;  $\lambda_1 = \frac{b^4(\bar{m}\theta^2 - c)}{D_1}$ ,  $\theta^2$  – круговая частота собственных поперечных колебаний,  $\lambda$  – собственное число задачи,  $c$  – коэффициент.

Добавим к дифференциальному уравнению граничные условия:

$$W_{xxx} + (2 - \nu_1)W_{yyx} = 0,$$

$$(1 - \varepsilon)W_x \pm k\varepsilon(W_{xx} + \nu_1 W_{yy}) = 0 \text{ при } x = \pm 0,5k;$$

$$W_{yyy} + (2 - \nu_2)W_{xxy} = 0,$$

$$(1 - \varepsilon)W_y \pm \varepsilon(W_{yy} + \nu_2 W_{xx}) = 0 \text{ при } y = \pm 0,5;$$

Свободные частоты и формы колебаний опишем в виде РТВ (рекурсивной формулировки теории возмущений.) С помощью вышеописанных рядов, вписанных в уравнение движения разомкнутой оболочки, малой кривизны, граничных условий, расстраивая на степени  $\varepsilon$ , приходим к некой возвратной хронологией граничных задач:

$$W_{0xxx} + 2 \alpha_3 W_{0xxyy} + \alpha_2 W_{0yyyy} - \lambda_0 W_0 = 0 \quad (3)$$

$$W_{0x} = 0, W_{0xxx} = 0 \text{ при } x = \pm 0,5k$$

$$W_{0y} = 0, W_{0yyy} = 0 \text{ при } y = \pm 0,5$$

$$W_{jxxxx} + 2 \alpha_3 W_{jxxyy} + \alpha_2 W_{jyyyy} - \lambda_0 W_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i W_{j-i} \quad (4)$$

$$W_{jxxx} + (2 - \nu_1)W_{jyyx} = 0$$

$$W_{jx} = \varepsilon k \sum_{i=0}^{j-1} (W_{ixx} + \nu_1 W_{iyy}) \text{ при } x = \pm 0,5k \quad (5)$$

$$W_{jyyy} + (2 - \nu_2)W_{jxxy} = 0$$

$$W_{jy} = \varepsilon \sum_{i=0}^{j-1} (W_{iyy} + \nu_2 W_{ixx}) \text{ при } y = \pm 0,5 \quad (6)$$

В нулевом приближении:

$$\lambda_0 = \pi^4 \left[ \frac{m^4}{k^4} + 2 \alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} + \alpha_2 n^4 \right]; \quad (7)$$

$$W_0 = X_0 Y_0 = \begin{cases} \sin \pi n y \\ \cos \pi n y \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi m}{k} x; n, m = 3, 5, 7, \dots \\ \cos \frac{\pi m}{k} x; n, m = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\} \quad (8)$$

Описание аппроксимаций в дальнейшем постараемся рассмотреть во всех подробностях для основных инвариантных частот колебаний  $n, m = 3, 5, 7, \dots$

Граничная задача основной аппроксимации:

$$W_{1xxxx} + 2 \alpha_3 W_{1xxyy} + \alpha_2 W_{1yyyy} - \lambda_0 W_1 = \lambda_2 \sin \pi n y \sin \frac{\pi m}{k} x; \quad (9)$$

$$W_{1xxx} + (2 - \nu_1) W_{yyx} = 0$$

$$W_{1x} = \pm k^2 \pi^2 \left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \pi n y \text{ при } x = \pm 0,5k;$$

$$W_{1yyy} + (2 - \nu_2) W_{1xxy} = 0$$

$$W_{1y} = \pm \pi^2 \left( n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{\pi m}{k} x; \text{ при } y = \pm 0,5;$$

Решение краевой задачи ищем в виде:

$$W_1 = X_1(x) \sin \pi n y + Y_1(y) \sin \pi \frac{m}{k} x; \quad (10)$$



$$\lambda_1 = \lambda_{1x} + \lambda_{1y}$$

Далее преобразовывая дистинктивное уравнение с помощью краевых условий, получается две характерные задачи:

$$X_1^{IV}(x) + 2\alpha_3\pi^2 n^2 X_1^{II}(x) - \pi^4 \left[ \frac{m^4}{k^4} + 2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} \right] X_1(x) = \lambda_{1x} \sin \frac{\pi m}{k}; \quad (11)$$

$$X_1^I(x) = \pm k n^2 \left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \text{ при } x = \pm 0.5k;$$

$$X_1^{III}(x) - \pi^2 n^2 (2 - \nu_1) X_1^I(x) = 0$$

$$Y_1^{IV}(y) + 2\alpha_3\pi^2 \frac{m^2}{k^2} Y_1^{II}(y) - \pi^4 \left[ 2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} + n^4 \right] Y_1(y) = \lambda_{1y} \sin \pi n y; \quad (12)$$

$$Y_1^I(y) = \pm \pi^2 \left( n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \text{ при } y = \pm 0.5$$

$$Y_1^I(y) - \pi^2 \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2) Y_1^I(y) = 0$$

После построения условий разрешимости приводим окончательные выражения:

$$\lambda_{1x} = 4\pi^4 \left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) \left[ n^2 (2 - \nu_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right] \quad (13)$$

$$\lambda_{1y} = 4\pi^4 \left( n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right) \left[ \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right] \quad (14)$$

Затем получаем основное изменение к личной форме  $W_1$ :

$$W_1 = \frac{\pi \left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right)}{\left( \frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 n^2 \right)}$$

$$\left[ \frac{k \left\{ \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(-1)^{\frac{m}{2}}} \right\} \left( n^2 (2 - \nu_1) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{2\beta_2 \left\{ \frac{ch \frac{\pi}{2} \beta_2 k}{sh \frac{\pi}{2} \beta_2 k} \right\}} \left\{ \frac{sh \pi \beta_2 x}{ch \pi \beta_2 x} \right\} \right. \\ \left. - (-1)^m \frac{k}{m} \left( n^2 (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right) x \left\{ \frac{\cos \frac{\pi m}{k} x}{\sin \frac{\pi m}{k} x} \right\} \left\{ \frac{\sin \pi n y}{\cos \pi n y} \right\} \right] \\ + \frac{\pi \left( n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left( n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)}$$

$$\left[ \frac{\left\{ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(-1)^{\frac{n}{2}}} \right\} \left( \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2) n^2 \right)}{2\beta_1 \left\{ \frac{ch \frac{\pi}{2} \beta_1}{sh \frac{\pi}{2} \beta_1} \right\}} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi m}{k} x}{\cos \frac{\pi m}{k} x} \right\}; \right. \\ \left. \left\{ \frac{sh \pi \beta_1 y}{ch \pi \beta_1 y} \right\} - (-1)^n \frac{1}{n} \left( \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right) y \left\{ \frac{\cos \pi n y}{\sin \pi n y} \right\} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \{n, m = 1, 3, 5 \dots\} \\ \{n, m = 2, 4, 6 \dots\} \end{array} \right\} \quad (15)$$

Рассматривая второе приближение, определяем:

$$\begin{aligned}
\lambda_{2x} = & 4\pi^4 \left[ n^2(2 - \nu_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right] \left\{ \left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) \right. \\
& - \left. \frac{\left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right)}{\left( \frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 n^2 \right)} \right. \\
& \times \left[ \frac{\pi k}{2} \left( n^2(2 - \nu_1) + \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \operatorname{cth}^{(-1)^m} \frac{\pi}{2} \beta_2 - 2 \left( n^2(2 - \nu_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right) \right] \\
& - 2\nu_1 \frac{\left( n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left( n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \times \left( \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right) - \frac{\left( n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left( n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \\
& \times \left[ \frac{\left( \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_1) + n^2 \right) \left( \frac{m^2}{k^2} (1 - 2\nu_1 \alpha_3) - n^2 \right)}{\left( n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2n^2} \left( \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right) \times \left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) \right] \left. \right\} \\
& - \frac{\lambda_1 \left( \frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right)}{2 \left( n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \left\{ k \frac{\left( n^2(2 - \nu_1) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left( \frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 n^2 \right)} \right. \\
& + \frac{1}{n^2} \left( \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) \right. \\
& \left. \left. - n^2 \right) \right\}; \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\left( \lambda_{2y}; \frac{m^2}{k^2}; n^2; \nu_1; \nu_2; \beta_1 \right) \rightarrow \left( \lambda_{2x}; \frac{m^2}{k^2}; n^2; \nu_1; \nu_2; \beta_2 \right) \quad (17)$$

Рекурсивная формулировка теории возмущений [9,10] для собственного числа таково:

$$\lambda = \pi^4 \alpha^2 + 4\pi^2 \alpha \varepsilon + 4\pi \left\{ \pi \alpha + 2 \frac{n^2 \frac{m^2}{k^2}}{\pi \alpha^2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\alpha} \left( k \frac{m^2}{k^2} \beta_1 \operatorname{cth}^{(-1)^n} \frac{\pi}{2k} \beta_1 + n^2 \beta_2 \operatorname{cth}^{(-1)^n} \frac{\pi}{2} \beta_2 \right) \right\} \varepsilon^3 + \dots, \quad (18)$$

$$n, m = 1, 3, 5, \dots$$

#### 4. Экспериментальные исследования

Образец представляет собой квадратную в плане пластину, из двухслойного углепластика. Модуль Юнга образца равен 70 ГПа. Волокна направлены под углом 45 градусов. Геометрические характеристики объекта:  $a = 890$  мм,  $b = 890$  мм,  $h = 0,4$  мм. Схема проведения эксперимента изображена на рисунке 1.

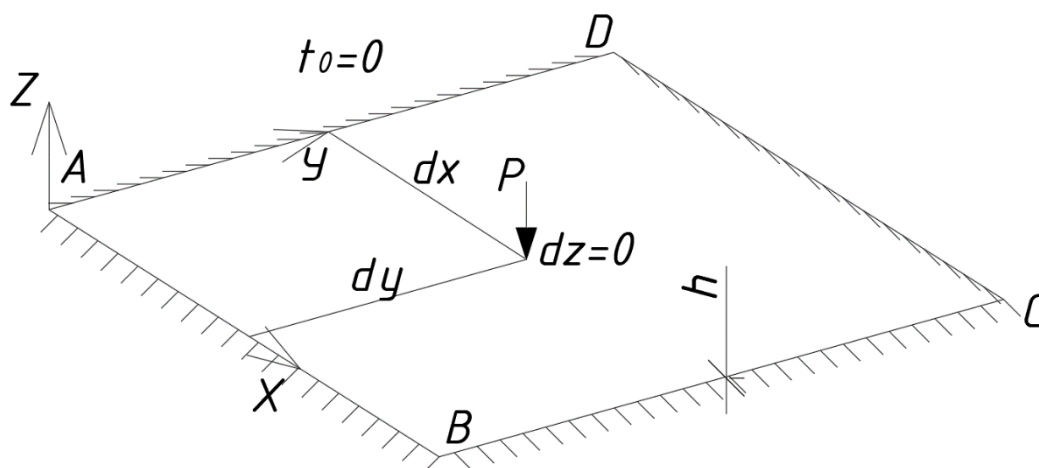


Рис. 1 Схема действия сил.

Для проведения экспериментальных исследований был создан испытательный стенд квадратной формы высокой жесткости. Для этого задействованы металлические уголки  $\angle 200 \times 16$  из стали СтЗсп, изготовленные согласно ГОСТ 8509-93. Испытательный образец с помощью болтов М1.1  $\varnothing 6$ мм. с шагом  $S=20$ мм. и прямоугольных удлиненных пластин из стали СтЗсп, закреплялся на испытательном стенде, создавая условия жесткого защемления пластины при её колебаниях близкие к математическим условиям задачи [7-10]. Колебания моделировались с помощью ударного молотка АУ03[11-14].

Измерения частотных характеристик проводились с помощью системы HSV. Система включает в себя лазерный модуль HSV - 800 с интерферометром и лазером низкой мощности, а также прочную и компактную сенсорную головку HSV - 700. Сенсор HSV основан на конструкции сенсора CLV. В данном случае HSV - 700 имеет фиксированный и переменный фокус. Фиксированный фокус имеет экстремально большую глубину резкости и рекомендуется для измерений

ощутимых перемещений, что применимо в нашем случае по причине значительного размера образца. Лазерный модуль (модули) подключается к контроллеру HSV, который может выполнять измерения с одним каналом (HSV - 2001) или разностные измерения (HSV - 2002). Блок–схема экспериментальной установки для проведения эксперимента представлена на рисунке 2.

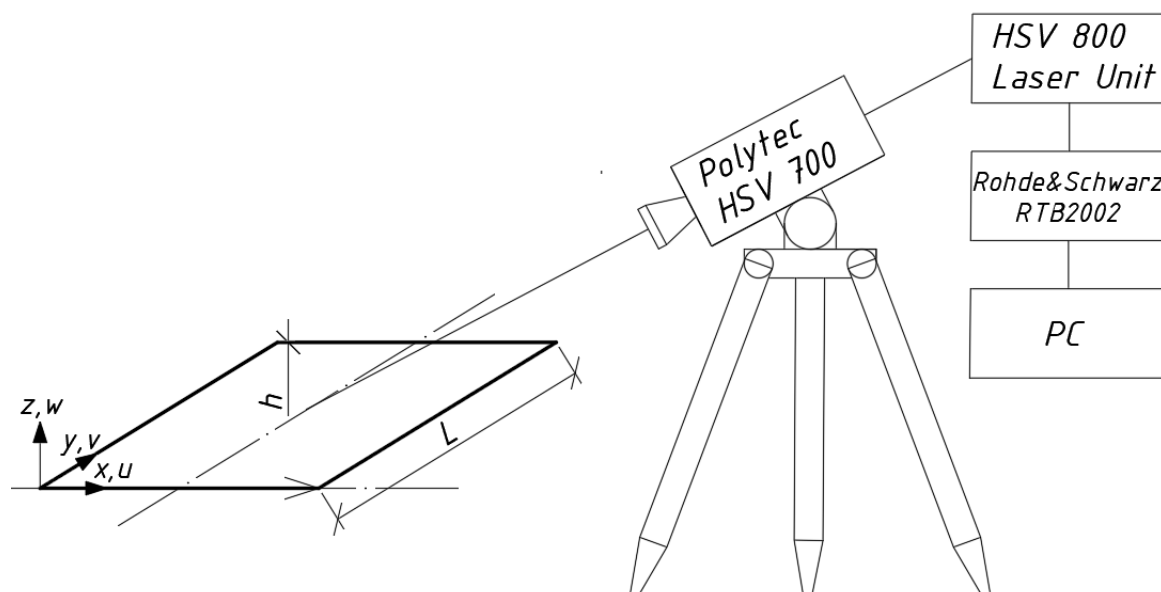


Рис. 2 Блок–схема экспериментальной установки.

Для повышения качества частотных характеристик в цепь был включен осциллограф Rohde&Schwarz RTB2002. Обработка результатов проводилась с помощью персонального компьютера.

Результаты проведения экспериментальных исследований стоит оценить, как удовлетворительные. Полученные амплитудно-частотных характеристики приемлемо на различных этапах соответствовали в среднем результатам расчета на основе рассматриваемых математических моделях (рис.3).

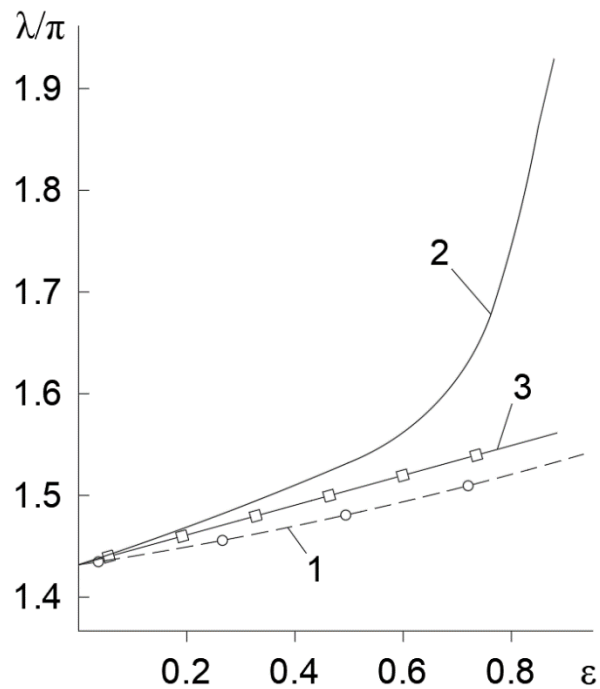


Рис. 3 Первое собственное число для квадратной в плане заземленной разомкнутой оболочки: 1 – Данные, полученные с помощью рекурсивной формулировки теории возмущений; 2 - Данные, полученные с помощью аппроксимации Паде; 3- Экспериментальные данные;

## 5. Результаты

На рисунке 3 представлена зависимость первого собственного числа  $\lambda^{(1)}$  от  $\varepsilon$  для рекурсивной формулировки теории возмущений (кривая 1) и аппроксимации Паде (кривая 2), экспериментальные данные (кривая 3). Видно, что предельная величина параметра  $\varepsilon$ , при котором различие в результатах, полученных при помощи рекурсивной формулировки теории возмущений и аппроксимации Паде будут находиться в пределах 5%, –  $\varepsilon=0.4$ . При  $\varepsilon = 1$  результаты, полученные при помощи решения, рассмотренного выше, очень далеки от численного решения и могут быть использованы скорее для оценки собственного числа снизу. Результаты,

полученные при помощи аппроксимации Паде, несколько выше численного решения, но их можно использовать для всех значений параметра  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Результаты экспериментальных исследований согласуются с численными результатами, полученными при помощи рекурсивной формулировки теории возмущений. При  $\varepsilon > 0.5$  результаты экспериментальных исследований отклоняются от результатов исчислений, полученных с помощью аппроксимации Паде.

Вывод: при расчетах прямоугольной пластины с жесткими защемленными краями нужно пользоваться математической моделью, представленной в данной работе, так как данная модель полностью подтверждается экспериментальными исследованиями. На рисунке 3 можно увидеть хорошую сходимость полученных данных.

### **Практическая значимость**

Новая математическая модель может быть использована для расчета конструкций в конструкторских бюро, занимающихся расчетом колебаний пластин в условиях жесткого закрепления.

### **Список источников**

1. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. - Киев: Наукова думка, 1984. – 220 с.



2. Антуфьев Б.А. Колебания неоднородных тонкостенных конструкций: монография. - М.: Изд-во МАИ, 2011. – 176 с.
3. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн Сит Наинг Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98.  
URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>
4. Гусева Ж.И. Особенности планирования производства на авиационном предприятии // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 4 (52). С. 99-104.
5. Z. Wang, Q. Han, D. H. Nash, P. Liu. Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell // Thin-Walled Structures, 2017, no. 119, pp. 438-446. DOI: [10.1016/j.tws.2017.07.002](https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.07.002)
6. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Y., Nyein Sitt Naing et al. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell // Materials Science Forum, 2019, vol. 945, pp. 885-892. DOI: [10.4028/www.scientific.net/MSF.945.885](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.945.885)
7. Sysoev O.E., Dobrychkin A.Yu. Natural vibration of a thin desing with an added mass as the vibrations of a cylindrical shell and curved batten // Journal of Heilongjiang university of science and technology, 2018, vol. 28, no. 1, pp.75–78.
8. Y. Qu, Y. Chen, X. Long, H. Hua, and G. Meng. Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method //

Applied Acoustics, 2013, vol. 74, no. 3, pp. 425-439. DOI:  
[10.1016/J.APACOUST.2012.09.002](https://doi.org/10.1016/J.APACOUST.2012.09.002)

9. Foster N., Fernández-Galiano L. Norman Foster: in the 21st Century, AV, Monografías, Artes Gráficas Palermo, 2013, pp. 163–164.

10. Eliseev V.V., Moskalets A.A., Oborin E.A. One-dimensional models in turbine blades dynamics // Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2016, vol. 9, pp. 93-104. DOI:  
[10.1007/978-3-319-29579-4\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-29579-4_10)

11. Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А. Статическое и динамическое поведение пологих оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий // Труды МАИ. 2015. № 82. URL:  
<http://trudymai.ru/published.php?ID=58524>

12. Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л. Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Труды МАИ. 2013. № 71. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=46621>

13. Феоктистов С.И. Определение растягивающих усилий вдоль образующей пуансона с учётом трения при изгибе с растяжением // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 1 (49). С. 76-82.

14. Канашин И.В., Григорьева А.Л., Хромов А.И., Григорьев Ян.Ю., Машевский В.А. Растяжение сжимаемой полосы с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 3 (51). С. 39-41.

15. Demin A.A., Golubeva T.N., Demina A.S. The program complex for research of fluctuations' ranges of plates and shells in magnetic field // 11th Students' Science Conference «Future Information technology solutions», Bedlewo, 3-6 October 2013, pp. 61-66.
16. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58589>
17. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
18. Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models, Berlin, Humboldt University, 2014, 34 p.
19. Саблин П.А., Щетинин В.С. Повышение точности механообработки с помощью использования бесконтактных опор // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 3 (51). С. 104-106. DOI: [10.17084/20764359-2021-51-104](https://doi.org/10.17084/20764359-2021-51-104)
20. Андрианов И.К. Численная модель многокритериальной оптимизации тепловой защиты оболочечных элементов в условиях теплового и силового нагружения // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 3 (51). С. 14-20. DOI: [10.17084/20764359-2021-51-14](https://doi.org/10.17084/20764359-2021-51-14)

21. Иванкова Е.П. Моделирование и оптимизация выбора свойств материалов и структуры многослойных оболочковых форм по выплавляемым моделям // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2021. № 3 (51). С. 85-89. DOI: [10.17084/20764359-2021-51-85](https://doi.org/10.17084/20764359-2021-51-85)
22. Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Одинокоев В.И., Иванкова Е.П., Усанов Г.И., Петров В.В. Разработка новых структур многослойных оболочковых форм по выплавляемым моделям // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2020. № 7 (47). С. 104-107.

## References

1. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S., Krasnopol'skaya T.S. *Nelineinoe vzaimodeistvie form izgibnykh kolebaniy tsilindricheskikh obolochek* (Nonlinear interaction of shapes of cylindrical shells bending vibrations), Kiev, Naukova dumka, 1984, 220 p.
2. Antuf'ev B.A. *Kolebaniya neodnorodnykh tonkostennykh konstruktsii* (Oscillations of inhomogeneous thin-walled structures), Moscow, Izd-vo MAI, 2011, 176 p.
3. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein Sit Naing. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>
4. Guseva Zh.I. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2021, no. 4 (52), pp. 99-104. DOI: [10.17084/20764359-2021-52-99](https://doi.org/10.17084/20764359-2021-52-99)

5. Z. Wang, Q. Han, D. H. Nash, P. Liu. Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell, *Thin-Walled Structures*, 2017, no. 119, pp. 438-446. DOI: [10.1016/j.tws.2017.07.002](https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.07.002)
6. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Y., Nyein Sitt Naing et al. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell, *Materials Science Forum*, 2019, vol. 945, pp. 885-892. DOI: [10.4028/www.scientific.net/MSF.945.885](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.945.885)
7. Sysoev O.E., Dobrychkin A.Yu. Natural vibration of a thin desing with an added mass as the vibrations of a cylindrical shell and curved batten, *Journal of Heilongjiang university of science and technology*, 2018, vol. 28, no. 1, pp.75–78.
8. Y. Qu, Y. Chen, X. Long, H. Hua, and G. Meng. Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method, *Applied Acoustics*, 2013, vol. 74, no. 3, pp. 425-439. DOI: [10.1016/J.APACOUST.2012.09.002](https://doi.org/10.1016/J.APACOUST.2012.09.002)
9. Foster N., Fernández-Galiano L. *Norman Foster: in the 21st Century*, AV, Monografías, Artes Gráficas Palermo, 2013, pp. 163–164.
10. Eliseev V.V., Moskalets A.A., Oborin E.A. One-dimensional models in turbine blades dynamics, *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2016, vol. 9, pp. 93-104. DOI: [10.1007/978-3-319-29579-4\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-29579-4_10)
11. Belostochnyi G.N., Myl'tsina O.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58524>

12. Kuznetsova E.L., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V., Medvedskii A.L. *Trudy MAI*, 2013, no. 71. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=46621>
13. Feoktistov S.I. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2021, no. 1 (49), pp. 76-82. DOI: [10.17084/20764359\\_2021\\_49\\_76](https://doi.org/10.17084/20764359_2021_49_76)
14. Kanashin I.V., Grigor'eva A.L., Khromov A.I., Grigor'ev Yan.Yu., Mashevskii V.A. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2021, no. 3 (51), pp. 39-41. DOI: [10.17084/20764359-2021-51-39](https://doi.org/10.17084/20764359-2021-51-39)
15. Demin A.A., Golubeva T.N., Demina A.S. The program complex for research of fluctuations' ranges of plates and shells in magnetic field, *11th Students' Science Conference «Future Information technology solutions»*, Bedlewo, 3-6 October 2013, pp. 61-66.
16. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I., Klyshnikov K.Yu., Ovcharenko E.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 82, URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58589>
17. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>
18. Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. *Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models*, Berlin, Humboldt University, 2014, 34 p.
19. Sablin P.A., Shchetinin V.S. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2021, no. 3 (51), pp. 104-106. DOI: [10.17084/20764359-2021-51-104](https://doi.org/10.17084/20764359-2021-51-104)

20. Andrianov I.K. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2021, no. 3 (51), pp. 14-20. DOI: [10.17084/20764359-2021-51-14](https://doi.org/10.17084/20764359-2021-51-14)
21. Ivankova E.P. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2021, no. 3 (51), pp. 85-89. DOI: [10.17084/20764359-2021-51-85](https://doi.org/10.17084/20764359-2021-51-85)
22. Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Odinson V.I., Ivankova E.P., Usanov G.I., Petrov V.V. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2020, no. 7 (47), pp. 104-107.

Статья поступила в редакцию 27.11.2023

Одобрена после рецензирования 03.12.2023

Принята к публикации 25.12.2023

The article was submitted on 27.11.2023; approved after reviewing on 03.12.2023; accepted for publication on 25.12.2023