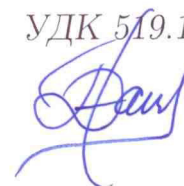


МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи
УДК 519.1, 519.6



Гайнанов Дамир Насибуллович

**Математическое и программное обеспечение
вычислительных комплексов для решения задач анализа
несовместных систем с массивно параллельной
обработкой данных**

Специальность 05.13.11 —

«Математическое и программное обеспечение вычислительных машин,
комплексов и компьютерных сетей»

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор
Кибзун Андрей Иванович

Москва — 2018

Оглавление

Введение	5
1. Базовое математическое обеспечение вычислительного	
комплекса	38
1.1. Несовместные монотонные системы условий	38
Распознавание образов и синтез комитетов.	40
Булевы функции.	41
1.2. Структурные и комбинаторные свойства несовместных монотонных систем условий	43
1.3. Абстрактные симплицальные комплексы	50
2. Теоретико–графовые методы математического	
моделирования несовместных систем	58
2.1. Граф системы независимости	59
2.2. Граф МСП несовместной системы линейных неравенств	74
3. Комбинаторно–геометрические методы математического	
моделирования несовместных систем	102
3.1. Грани и диагонали выпуклых многогранников	102
3.1.1. Три понятия диагоналей и их взаимосвязи	103
3.1.2. Диагонали и классификация многогранников	112
3.2. Положительные базисы линейных пространств	115
3.2.1. Максимальные односторонние подмножества положительного базиса	118
3.2.2. Симплицальное представление положительного базиса	121
3.2.3. Регулярные положительные базисы	123
3.3. Многогранники и несовместные системы неравенств	127
3.3.1. Комбинаторные свойства многогранников	129
3.3.2. Комбинаторно дуальные системы	135
3.3.3. Оценки количества подсистем	138
3.3.4. Диагонали циклических многогранников	146

4. Численные методы решения задач анализа несовместных систем	152
4.1. Системы неравенств и комитеты	152
4.1.1. Граф МСП и комитеты	152
Алгоритм КОМБ выделения МСП.	153
Алгоритм формирования блокатора.	154
Экономная реализация алгоритма КОМБ.	158
Алгоритмы ГРАФ КОМБ выделения МСП.	160
Приближенные алгоритмы.	162
Нечетные циклы в графе МСП и комитеты.	164
4.1.2. Альтернативные покрытия	164
Альтернативные покрытия и комитеты.	165
Альтернативные покрытия и логические решающие деревья.	169
4.1.3. Оптимальное разбиение множества классов	170
Решающая функция для узла.	170
Предварительное разбиение множества классов.	177
Алгоритмы дихотомии.	180
4.2. Булевы функции и комплексы	187
4.2.1. Оптимальная расшифровка булевых функций	188
4.2.2. Булевы функции и системы неравенств	198
4.2.3. Булевы функции и графы	200
Эвристический алгоритм поиска наибольшего независимого множества.	202
Алгоритм с абсолютной оценкой точности.	203
Свойства алгоритма в классе деревьев.	208
Вычислительные эксперименты.	210
4.3. Графы и параллельная обработка данных	211
4.3.1. Алгоритм декомпозиции	223
5. Прикладные задачи анализа несовместных систем	236
5.1. Задача управления транспортными процессами в условиях противоречивости	236
5.1.1. Задача планирования грузовых железнодорожных перевозок	237

5.1.2.	Задача о назначении и перемещении локомотивов	242
5.1.3.	Параллельная обработка данных в задаче о назначении и перемещении локомотивов	246
5.2.	Задача управления технологическими маршрутами на дискретном производстве	249
5.2.1.	Общая постановка задачи	251
5.2.2.	Задача прогнозирования брака в производстве	257
5.2.3.	Параллельная обработка данных в задаче управления технологическими маршрутами	261
6.	Вычислительный комплекс для решения прикладных задач анализа несовместных систем	264
6.1.	Управление технологическими маршрутами на металлургическом производстве	266
6.2.	Управление транспортными процессами в условиях противоречивости	275
	Заключение	288
	Список литературы	292

Введение

Оптимизация технологических процессов на производстве и в транспорте традиционно являются важнейшими областями применения математических методов, программного обеспечения и новейших достижений аппаратного обеспечения вычислительных средств. Современный этап развития теории и практики оптимизации технологических процессов на производстве и в транспорте характеризуется существенным ростом объемов обрабатываемых данных. Сегодня появились возможности фиксации большого числа параметров и условий, при которых осуществляются технологические процессы, практически для каждого отдельного изделия или оказываемого сервиса. В результате в системах хранения данных накапливаются и архивируются большие объемы исторических данных о реализованных технологических процессах. При этом важную роль начинают играть системы предиктивной аналитики, основанные на обработке больших объемов исторических данных, и системы оптимизации технологических процессов в качестве инструментов внедрения полученных прогнозных аналитик. В настоящей работе оптимизация технологических процессов занимает важную роль и реализуется при решении двух классов прикладных задач: оптимизация технологических процессов на металлургическом производстве и оптимизация технологических процессов при планировании и организации грузовых железнодорожных перевозок.

Оптимизация технологических процессов на металлургическом производстве является актуальной областью исследования, поскольку металлургия представляет собой одну из важнейших отраслей экономики с большим экспортным потенциалом. Оптимизация технологических процессов при планировании и организации грузовых железнодорожных перевозок, в свою очередь, играет важнейшую роль для обеспечения территориальной целостности страны, и также является важным интеграционным фактором, влияющим на развитие экономики. В обеих задачах очень важную роль играет инфраструктура, представляющая собой машины и металлургические агрегаты в первом случае, и инфраструктуру железнодорожной сети — во втором. Развитие инфраструктуры требует значительных капитальных вложений и является, вследствие этого, достаточно инерционным процессом. В

то же время потребности в росте качества производимой продукции, объемов (металлургического производства) и качества оказываемых сервисных услуг (транспорта) отличается значительно большей динамикой. Закономерным следствием этого является возрастающее влияние инфраструктурных ограничений в процессах оптимизации технологических процессов и появление конфликтов или противоречий в системах ограничений, то есть, другими словами, несовместных условий.

В связи с этим **актуальным** является систематическое изучение свойств несовместных систем условий с применением различных математических подходов, которые являются одним из основных объектов исследования в настоящей диссертации.

В настоящей работе предлагается разработка математических моделей и методов анализа различных классов несовместных систем условий, а также разработка численных методов и алгоритмов анализа несовместных систем условий на основе полученных математических результатов. На базе разработанных численных методов и алгоритмов разрабатывается математическое и программное обеспечение вычислительных комплексов, ориентированных на решение рассматриваемых в работе прикладных проблем, характеризующихся большими объемами исторических данных. Наконец, большое внимание в работе уделяется разработке методов параллельной обработки данных с использованием средств теории графов. Эти методы используются для создания управляющих программ вычислительных комплексов, организующих массивно параллельную обработку данных.

Таким образом, **целью диссертационной работы** является разработка математического и программного обеспечения вычислительного комплекса для решения задач анализа несовместных систем с использованием массивно параллельной обработки данных. Этот вычислительный комплекс предназначен для решения прикладных задач анализа несовместных систем, возникающих в условиях ограниченности инфраструктурных ресурсов таких, как железнодорожная транспортная сеть, или в условиях технологических процессов с большим числом ограничений таких, как металлургическое производство.

В работах [84, 85, 116–119] получены важные результаты в области разработки математического и программного обеспечения вычислительных

комплексов и автоматизированных систем различного назначения. В том числе в этих работах получены результаты в области разработки моделей и методов параллельной и распределенной обработки данных. В диссертационной работе разрабатывается вычислительный комплекс специального назначения — для решения задач анализа несовместных систем условий. Такие задачи, как уже было отмечено, часто возникают в производственной деятельности в условиях большого количества ограничений и характеризуются, как правило, большой размерностью и высокой комбинаторной сложностью. Этими обстоятельствами мотивирована разработка специального программного обеспечения, моделей и методов массивно параллельной обработки данных, а также управляющих программных средств для реализации этих методов.

В работах [21, 137, 153, 154] разрабатываются модификации классических оптимизационных методов управления производственными процессами, таких как глубокое обучение, MES и ERP-технологии.

Значимые результаты в области разработки методов распознавания и классификации данных получены в работах [67, 76, 89, 90, 182]. Одним из эффективных методов решения задачи распознавания образов в геометрической постановке является комитетный метод. С практической точки зрения наибольший интерес представляют комитеты систем линейных неравенств, ввиду их широкого применения в области моделирования противоречивых задач. Систематическое исследование различных комитетных конструкций было начато в работах [105, 106] и трансформировалось в работах [104, 107–110] в самостоятельную область математических исследований. В этой связи разработка эффективных методов численного решения задач распознавания образов в геометрической постановке представляется актуальной, при этом эффективность понимается в контексте вычислительной сложности алгоритмов и практической значимости результатов. В частности, в диссертации разработан новый подход к решению задачи синтеза комитетов минимальной мощности, в основе которого лежит специальная математическая конструкция — альтернативные покрытия. В рамках этого подхода сформулирован дополнительный критерий оптимальности решения, а также разработаны эффективные алгоритмы разделения обучающей выборки.

Другая прикладная область, на исследование которой ориентирован вычислительный комплекс, — это задача управления транспортными процессами в условиях противоречивости.

Большой вклад в развитие математических методов решения задач организации перевозок на железнодорожном транспорте внесли авторы работ [97–99, 204, 220, 221]. В работах [146, 147] в контексте задач логистики исследуются вопросы планирования перевозок, необходимых к последующему исполнению. В диссертационной работе задача управления транспортными процессами на этапе планирования грузовых железнодорожных перевозок получила новую формулировку в терминах задачи поиска всех максимальных совместных подсистем (МСП) соответствующей несовместной системы условий. Условиями при этом являются потенциальные маршруты следования поездов, а МСП определяет набор допустимых, с точки зрения одновременного исполнения, маршрутов. Таким образом прикладная задача управления транспортными процессами в условиях противоречивости также может быть решена с помощью разрабатываемого вычислительного комплекса.

В области решения задачи управления транспортными процессами на этапе назначения локомотивов важные результаты получены в работах [91, 120, 215, 216]. Этот этап, ввиду ряда естественных ограничений на доступность и использование локомотивов, характеризуется высокой комбинаторной сложностью. Назначение, оптимальное в части количества используемых ресурсов и равномерности их загрузки, требует разработки эффективных эвристических алгоритмов. Так, например, в работах [61, 62, 205, 217, 218] разрабатываются эффективные алгоритмы для решения различных оптимизационных задач, в том числе связанных с назначением заданного множества ресурсов. В диссертации предлагается новый подход для решения задачи о назначении локомотивов в вычислительном комплексе, ориентированный на снижение размерности без существенной потери качества приближенного решения.

В рамках разработки математического обеспечения вычислительного комплекса в диссертационной работе с различных позиций исследуются комбинаторные и структурные свойства несовместных систем. Для этих целей в рассмотрение вводится базовая математическая конструкция — абстрактный симплициальный комплекс — структурные и комбинаторные

свойства которой связаны с аналогичными свойствами несовместных систем. Абстрактные симплициальные комплексы подробно рассматриваются, например, в работах [19, 128, 140, 241, 245]. В диссертации на основе этой базовой математической конструкции разрабатываются теоретико–графовые математические модели для решения задач анализа несовместных систем.

Из литературы по теории графов следует отметить фундаментальные работы [11, 68, 69, 83, 96, 136, 145, 155, 177]. Теоретико–графовой математической моделью для исследования структурных и комбинаторных свойств конечных несовместных систем линейных неравенств является граф максимальных совместных подсистем (граф МСП). Это понятие было впервые введено в работе [32] в результате обобщения конструкций, предложенных в работе [151]. В результате систематического исследования свойств графа МСП получены важные результаты, на основе которых разработаны эффективные вычислительные алгоритмы для решения задач анализа несовместных систем условий.

Другой подход к исследованию структурных и комбинаторных свойств несовместных систем линейных неравенств основан на методах комбинаторной геометрии. В этой связи особый интерес представляет исследование диагональной структуры выпуклых многогранников и адекватная их классификация по этому критерию. Так, например, в работах [209–211, 236] исследуются свойства диагоналей различных типов. В частности, в работе [167] было введено понятие A –диагонали, а в работе [183] — понятие F –диагонали. Однако, комбинаторные типы многогранников, определяемые семействами A – и F –диагоналей, не совпадают с комбинаторным типом, определяемым решеткой граней. В диссертационной работе в рассмотрение вводится новый тип диагоналей, названный G –диагональю, классификация по которому в точности совпадает с классической. Этот результат получил эффективное приложение в области разработки методов численного решения задач анализа несовместных систем. Установлено, что семейства всех МСП и МНП (минимальных несовместных подсистем) несовместной системы линейных неравенств однозначно соответствуют семействам G –диагоналей и граней соответствующего выпуклого многогранника. При этом сам многогранник может быть получен с помощью преобразования Гейла на множестве задающих векторов системы (подробнее о преобразованиях и диаграммах Гейла см.,

например, [60, 66, 68, 168, 230, 232], [231, §5.6], [246, Ch. 5], [253, §3.6]). Кроме того, из установленной взаимосвязи получены нижние оценки для числа МСП несовместной системы линейных неравенств.

В работах [175, 239, 240, 243] и [173, Ch. 2], [244, Ch. 1] исследуются комбинаторные свойства конечномерных пространств, при этом основным объектом исследования выступают положительные базисы. В диссертации эти объекты получили новое приложение в задачах анализа несовместных систем и были всесторонне исследованы как геометрические представления МНП систем линейных неравенств.

Обзор теории монотонных булевых функций (МБФ) и их разнообразных применений представлен, например, в работах [94, 103, 111, 122, 132, 174, 254]. Взаимосвязь задачи расшифровки МБФ и задачи выделения МСП несовместных систем линейных неравенств обоснована в основополагающей работе [76]. В рамках этой взаимосвязи в диссертации разрабатываются эффективные алгоритмы расшифровки МБФ и приводятся оценки вычислительных сложностей этих алгоритмов. При этом эффективность алгоритмов показана либо в терминах оптимальности по ряду критериев, либо в терминах абсолютного отклонения приближенного решения.

Как уже было отмечено, вычислительный комплекс для решения задач анализа несовместных систем условий предназначен для исследования таких предметных областей как управление технологическими маршрутами на дискретном производстве и транспортными процессами в условиях противоречивости (общая структурная схема вычислительного комплекса представлена на Рис. 1).

Компоненты, разработке которых посвящена диссертационная работа, — это математическое обеспечение (МО) и специальное программное обеспечение (ПО). В общем случае управляющие программы (см. Рис. 1) относят к блоку системных программ базового программного обеспечения. Как было отмечено ранее, прикладные задачи анализа несовместных систем возникают в условиях большой размерности и высокой комбинаторной сложности. В этой связи **актуальной** представляется разработка адекватных моделей и эффективных методов параллельной обработки данных в вычислительном комплексе, реализация которых определяет функционал управляющих программ специального программного обеспечения.



Рис. 1 Структурная схема вычислительного комплекса

В **Главе 1** описываются основные математические модели несовместных систем, которые далее более детально исследуются в **Главах 2 и 3**. Вводится аксиоматическое определение несовместной системы условий в наиболее общем виде (в рамках настоящей работы) на языке отображений булевой решетки в множество подмножеств некоторого множества.

Далее описывается хорошо известное понятие комитета несовместной системы линейных неравенств и его применение в задаче распознавания образов в геометрической постановке. Данный класс несовместных систем условий играет очень большую роль в исследованиях, проводимых в последующих главах.

Другой моделью несовместных систем условий служат монотонные булевы функции (МБФ). Любой конечной монотонной несовместной системе условий может быть поставлена в соответствие некоторая МБФ от m двоичных переменных, где m — количество условий в исходной несовместной системе. При этом совместным подсистемам ставятся в соответствие нули МБФ, а несовместным подсистемам — единицы. При изучении комбинаторных свойств несовместных систем условий важнейшую роль играют семейства максимальных совместных подсистем (МСП) и семейства минимальных несовместных подсистем (МНП). В МБФ, поставленной в соответствие исходной монотонной системе несовместных условий, семейству МСП соответствует множество верхних нулей МБФ и семейству МНП — множество нижних

единиц МБФ. Таким образом, теория МБФ служит одним из инструментов анализа комбинаторных свойств несовместных систем условий. Практическое использование аппарата МБФ будет показано в Главе 4.

В качестве следующих базовых математических моделей для исследования задач анализа несовместных систем условий предлагаются абстрактные симплициальные комплексы и близкие к ним системы независимости. Каждой монотонной несовместной системе условий можно поставить в соответствие абстрактный симплициальный комплекс на множестве вершин, мощность которого равна числу условий в исходной системе. Тогда семейству МСП исходной системы будет поставлено в соответствие семейство гиперграней абстрактного симплициального комплекса.

На языке абстрактных симплициальных комплексов в Главе 1 выводится ряд общих свойств семейств совместных подсистем, такие как соотношение между семействами совместных подсистем различной мощности, а также утверждение о мощности наименьшей МНП и наибольшей МСП исходной системы. Заметим, что эти соотношения действуют в общем случае, независимо от природы самих условий, входящих в несовместную систему, и являются базовыми общими свойствами несовместных систем условий.

В Главе 2 разрабатываются теоретико-графовые методы математического моделирования несовместных систем условий. Предлагается подход, в рамках которого исследование сводится к рассмотрению структурных и комбинаторных свойств графов систем независимости. С помощью этой математической модели в Главе 4 будут разрабатываться методы численного решения задач подсчета и выделения всех МСП и МНП несовместных систем.

Методы теории графов предоставляют адекватный аппарат для исследования структурных свойств несовместных систем условий. В рассмотрении вводится специальная конструкция — граф системы независимости — и рассматриваются свойства такого графа для различных классов систем независимости.

Показано, что класс графов независимости достаточно широк: всякий конечный простой граф изоморфен некоторому графу системы независимости, и установлено соотношение между количеством элементов системы независимости и числом вершин и ребер соответствующего графа.

Самой общей моделью несовместной системы условий в настоящей работе является семейство упорядоченных пар множеств, каждая из которых является подмножеством некоторого топологического пространства X .

Центральным результатом главы является утверждение о связности графа системы независимости, состоящей из семейства упорядоченных пар замкнутых подмножеств топологического пространства X . Этот результат интересен тем, что связность графа системы независимости выводится из связности самого топологического пространства. На основе этого результата формулируются достаточные условия связности графа системы независимости, порождаемой несовместной системой неравенств, определяемых непрерывными вещественными функциями.

Отдельно рассматриваются несовместные системы нестрогих неравенств и несовместные системы строгих неравенств, определяемых непрерывными вещественными функциями, и получены достаточные условия связности порождаемых такими системами графов системы независимости.

Доказано, что граф системы независимости нестрогих неравенств, определяемых вещественными функциями над связным топологическим пространством, связан. Для аналогичного случая, но со строгими неравенствами, получены достаточные условия связности соответствующего графа системы независимости, состоящие в том, что объединение попарных пересечений нуль-множеств вещественных непрерывных функций, определяющих неравенства системы, не разделяет топологическое пространство X . Этот результат имеет важные для исследований в настоящей работе следствия. Например, если вещественные непрерывные функции, определяющие неравенства в системе, являются попарно взаимно простыми полиномами, то соответствующий граф системы независимости связан.

Наибольший прикладной интерес представляет случай линейных функций над пространством \mathbb{R}^n . В этом случае достаточное условие связности графа системы независимости формулируется как отсутствие противоположных векторов среди векторов, определяющих линейные неравенства. Тогда попарное пересечение их нуль-множеств имеет размерность $n - 2$ и объединение конечного числа плоскостей размерности $n - 2$ не разделяет связное пространство \mathbb{R}^n . Это условие является общепринятым при рассмотрении несовместных систем однородных строгих линейных неравенств

в задачах распознавания образов в геометрической постановке. Важность последнего результата связана с тем, что граф системы независимости для несовместной системы линейных неравенств может быть эффективно использован в алгоритмах выделения МСП этой системы, что, в свою очередь, играет важную роль в задаче синтеза комитетов. Эти вопросы будут подробно обсуждаться при разработке численных методов и алгоритмов.

В связи с указанной практической значимостью несовместных систем линейных неравенств, далее в Главе 2 более подробно изучаются свойства графов систем независимости, порождаемых такими системами. Эти графы были названы в работе графами МСП несовместной системы линейных неравенств.

Как уже было сказано выше, важнейшим свойством графа МСП является то, что этот граф связан. Следующим, не менее важным свойством графа МСП является наличие в нем цикла нечетной длины. Это свойство в Главе 4 будет положено в основу приближенного алгоритма построения комитета и будут приведены оценки, подтверждающие его эффективность.

Для несовместных систем над пространством \mathbb{R}^2 приводится характеристика графов МСП: это будут простые циклы нечетной длины, большей или равной 3.

Далее в Главе 2 рассматриваются более сильные типы связности, присущие графам МСП. Во-первых, граф МСП не имеет мостов, то есть удаление любого ребра не нарушает связности этого графа. Во-вторых, если ранг каждой подсистемы из трех неравенств равен 3, то граф МСП является 2-связным, то есть удаление любой вершины графа МСП не нарушает его связность. Более сильный тип связности повышает надежность приближенных алгоритмов выделения МСП, о чем подробнее будет сказано в Главе 4.

Получено следующее локальное свойство графа МСП: если любая подсистема из $k + 1$ неравенств совместна ($1 \leq k \leq n - 1$), то степень любой вершины графа МСП не меньше $k + 1$. Это свойство также эффективно используется при построении численных методов в Главе 4.

Для графов МСП получены следующие оценки:

(1) граф МСП содержит простой цикл нечетной длины, не превосходящей числа неравенств в исходной системе,

(2) диаметр графа МСП не превосходит $\lceil \frac{m}{2} \rceil$, где m — число неравенств в исходной системе неравенств.

В Главе 4 эти оценки также будут использоваться для разработки методов численного решения задач анализа несовместных систем.

В Главе 3 несовместные системы линейных неравенств рассматриваются с позиций комбинаторной геометрии. Установлена тесная взаимосвязь между комбинаторными свойствами систем линейных неравенств и аналогичными свойствами выпуклых многогранников.

В этой главе вводится важное новое понятие G -диагонали выпуклого многогранника. Введенное понятие соотносится с двумя другими понятиями A -диагоналей и F -диагоналей. Выводятся все попарные зависимости между шестью свойствами многогранников такими, как «быть циклическим», «иметь вершины в общем положении», «быть симплициальным» и три свойства попарных совпадений семейств A -, F - и G -диагоналей.

Говорят, что два многогранника имеют одинаковый комбинаторный тип, если их решетки граней изоморфны. Будем говорить, что два многогранника имеют одинаковые A -, F - или G -диагональные типы, если соответственно семейства A -, F - или G -диагоналей этих многогранников комбинаторно изоморфны. Отношение «иметь одинаковый диагональный комбинаторный тип» также является отношением эквивалентности и порождает комбинаторную классификацию на множестве многогранников. В настоящей работе показано, что определение G -диагоналей отличается от определений A - и F -диагоналей тем, что классификация многогранников по комбинаторному типу совпадает с классификацией по диагональному типу только для G -диагоналей. В связи с этим введение понятия G -диагоналей и изучение комбинаторных свойств G -диагоналей многогранников приобретает особый научный и практический интерес.

Положительный базис (ПБ) линейного пространства определяется как минимальное по включению подмножество линейного пространства, положительная оболочка которого совпадает со всем линейным пространством. Положительные базисы в \mathbb{R}^n изучаются в Главе 3 с точки зрения комбинаторной структуры двух семейств подмножеств — так называемых минимальных подбазисов и максимальных односторонних подмножеств. Для максимального одностороннего подмножества ПБ $B \subset \mathbb{R}^n$ рассматриваются

две характеристики: $\alpha(\mathbf{B})$ — мощность наибольшего максимального одностороннего подмножества, и $\beta(\mathbf{B})$ — мощность наименьшего максимального одностороннего подмножества. Показано, что положительный базис $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^n$ является строго положительным (то есть пересечение положительных оболочек любых непересекающихся подмножеств \mathbf{B} состоит из единственного нулевого вектора) тогда и только тогда, когда

$$\alpha(\mathbf{B}) = \beta(\mathbf{B}) = n.$$

В результате исследования свойств ПБ также получены оценки для характеристик $\alpha(\mathbf{B})$ и $\beta(\mathbf{B})$ для положительных базисов $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^n$.

Особый случай, интересный для рассмотрения в теории положительных базисов — это регулярные базисы. Положительный базис \mathbf{B} пространства \mathbb{R}^n называется регулярным, если для некоторого его симплициального представления $(\mathbf{B}', \mathbf{B}'')$ выполняется включение:

$$\mathbf{B} \subset \text{conv } \mathbf{B}',$$

где conv — выпуклая оболочка. В рамках исследования свойств ПБ в Главе 3 также были получены характеристики регулярных положительных базисов $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^n$.

Неравенство, входящее в несовместную систему неравенств, называется существенным, если оно не входит хотя бы в одну МСП этой системы. Система неравенств называется несократимой, если все входящие в нее неравенства являются существенными. Доказывается, что несовместные системы линейных неравенств несократима тогда и только тогда, когда положительные оболочки векторов, определяющих неравенства системы, образует линейное пространство.

Центральным результатом Главы 3 является полученная двойственная связь между комбинаторной структурой несовместной системы линейных неравенств и комбинаторной структурой некоторого соответствующего выпуклого многогранника. Для построения указанной двойственности используются преобразования Гейла конечной последовательности точек

$$\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \subseteq \mathbb{R}^r$$

такой, что

$$\text{aff } \mathbf{X} = \mathbb{R}^r .$$

Основная в Главе 3 теорема устанавливает двойственную связь между любой несократимой несовместной системой линейных неравенств над пространством \mathbb{R}^r и некоторым набором точек

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)$$

аффинной размерности $\alpha = m - r - 1$. При этом набор определяющих векторов данной несовместной системы линейных неравенств является преобразованием Гейла набора точек \mathbf{B} с точностью до положительных множителей. Тогда справедливо следующее.

- (1) Семейство МСП несовместной системы линейных неравенств комбинаторно изоморфно семейству дополнений диагоналей набора \mathbf{B} .
- (2) Семейство МНП несовместной системы линейных неравенств комбинаторно изоморфно семейству дополнений гиперграней набора \mathbf{B} .

Установленная двойственная связь играет важную роль при исследовании комбинаторных свойств несовместных систем линейных неравенств в связи с тем, что результаты комбинаторной геометрии в области исследования выпуклых многогранников могут быть использованы для исследования свойств семейств МСП и МНП несовместных систем линейных неравенств. И, напротив, свойства семейств МСП и МНП несовместных систем линейных неравенств могут быть использованы для исследования свойств диагоналей и гиперграней конечных наборов точек.

В качестве примера использования полученной двойственности, в работе получена оценка снизу для максимального количества МСП несовместной системы линейных неравенств. Для этого используется циклический многогранник, представляющий собой выпуклую оболочку конечного числа точек параметрической кривой вида

$$(t^1, t^2, \dots, t^\alpha) \in \mathbb{R}^d .$$

Циклический многогранник известен своими экстремальными свойствами. В работе получены оценки для числа диагоналей в циклическом многограннике.

С помощью установленной двойственности полученные оценки для числа диагоналей транслируются в оценку снизу для максимального числа МСП несовместной системы линейных неравенств.

В Главе 4 разрабатываются численные методы решения задач анализа несовместных систем условий, которые лежат в основе разработки математического обеспечения вычислительного комплекса.

На основе результатов, полученных в Главе 2, разрабатывается ряд алгоритмов выделения МСП несовместных систем линейных неравенств, построения их графов МСП и алгоритмов решения задачи построения минимального комитета несовместной системы линейных неравенств. Программная реализация этих алгоритмов является компонентой математического обеспечения вычислительного комплекса.

Базовый алгоритм КОМБ выделения МСП решает задачу выделения всех МСП несовместной системы, содержащих некоторую выделенную совместную подсистему L . Алгоритм КОМБ основан на построении блокатора семейства дополнений уже найденных МСП до всей системы. В случае $L = \emptyset$ алгоритм КОМБ будет находить все МСП несовместной системы.

Использование факта связности графа МСП несовместной системы линейных неравенств позволяет построить алгоритм ГРАФ–КОМБ путем сведения задачи выделения всех МСП системы к серии задач меньшей размерности. Каждая подзадача из этой серии состоит в поиске МСП, смежных с выделенной МСП в графе МСП исходной системы. Связность графа МСП гарантирует, что при таком подходе будут найдены все МСП исходной системы, содержащие выделенную совместную подсистему — дополнение выделенной МСП до всей системы всегда совместно.

В Разделе 4.1 Главы 4 рассматриваются варианты алгоритмов КОМБ и ГРАФ–КОМБ, обозначаемые как КОМБ^(k) и ГРАФ–КОМБ^(k). Отличия этих алгоритмов состоят в том, что при поиске МСП, содержащих выделенную подсистему, они останавливаются, если уже найдено k таких МСП, или исчерпаны все элементы блокаторов. Следует отметить, что алгоритм ГРАФ–КОМБ^(k) даже при очень малых значениях k , скажем, близких к n , находит, благодаря связности графа МСП, большое количество МСП. При этом вычислительные затраты на выделение очередной МСП растут тем медленнее, чем меньше значение k .

Одним из центральных результатов Главы 4 является теорема о том, что если в последовательности МСП, образующей цикл нечетной длины в графе МСП, взять по одному решению для каждой МСП, то полученное множество векторов является комитетом исходной несовместной системы линейных неравенств. Данная теорема, в сочетании с утверждением из Главы 2 о существовании цикла нечетной длины в графе МСП, мотивировала разработку приближенного алгоритма построения комитета минимальной мощности несовместной системы линейных неравенств.

В Главе 4 впервые вводится понятие альтернативного покрытия и мощности альтернативного покрытия. Целью введения этого понятия явилась необходимость уточненной классификации комитетов несовместных систем линейных неравенств. На основе введенного понятия, вводится дополнительный критерий классификации комитетов. Содержательный смысл этого критерия состоит в том, что при равенстве числа членов двух комитетов, приоритетным считает тот из них, для которого мощность соответствующего альтернативного покрытия меньше. Для подтверждения работоспособности такого подхода в Главе 4 приводится пример, который показывает, что существуют два комитета с равным числом членов, но с различными мощностями соответствующих альтернативных покрытий.

Для построения альтернативных покрытий в диссертации разработан подход, связанный с построением логических решающих деревьев. На этом этапе важной стандартной задачей является построение решающей функции для узла дерева. С этой целью рассматривается задача оптимального разбиения множества классов и формализуется критерий качества разбиения для узла дерева. Разрабатываются приближенные алгоритмы решения задачи, а также приводятся результаты вычислительных экспериментов и оценки качества решений, доставляемых этими приближенными алгоритмами. Близость решений для двух различных разбиений оценивается по расстоянию Хэмминга между двоичными кодами, представляющими эти разбиения. В частности, в серии из 100 экспериментов со случайными выборками, результаты демонстрируют в среднем близость в 89,4% между разбиениями, полученными полным перебором (со сложностью $\mathcal{O}(n \cdot 2^m)$) и приближенным алгоритмом (со сложностью $\mathcal{O}(n \cdot m^2)$). Это означает, что в среднем приближенный алгоритм

получает решение весьма близкое к оптимальному при существенно меньшей сложности вычислений.

Как уже было ранее отмечено, в терминах МБФ мультииндексы МСП и МНП соответствуют верхним нулям и нижним единицам некоторой МБФ, связанной с системой. В Главе 4 рассматривается взаимосвязь задач поиска максимальных совместных подсистем с задачей расшифровки монотонных булевых функций. Классическая задача расшифровки МБФ подразумевает использование оракула, который по предъявленному двоичному набору возвращает значение МБФ на этом наборе. В качестве критерия оптимальности алгоритма расшифровки традиционно принимается число обращений этого алгоритма к оракулу, то есть говорят о минимизации этого числа. При этом значения МБФ на остальных наборах (для которых обращения к оракулу не происходило) должны однозначно восстанавливаться, исходя из свойств монотонности. Так, например, классический минимаксный критерий Шеннона требует от оптимального алгоритма в худшем случае минимального числа обращений к оракулу среди всех алгоритмов расшифровки. Оптимальный по этому критерию алгоритм был построен в работе [8], где была также получена точная оценка для алгоритма расшифровки МБФ m переменных вида:

$$\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} + \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor + 1}.$$

Поскольку значения МБФ для верхних нулей и нижних единиц не могут быть восстановлены по принципу монотонности, исходя из значений МБФ в других точках, то число обращений к оракулу не может быть меньше, чем сумма числа верхних нулей — \mathfrak{P} , и числа нижних единиц — \mathfrak{Q} . Исходя из этого в диссертации вводится новый нормированный критерий оптимальности алгоритма расшифровки МБФ, в котором число обращений к оракулу нормируется на сумму $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, то есть на общее количество верхних нулей и нижних единиц МБФ. Этот критерий, таким образом, учитывает объективную сложность расшифровки конкретной МБФ. В области исследования свойств нового критерия в работе получены оценки сверху и снизу, а также разработаны приближенные алгоритмы расшифровки МБФ, доставляющие минимальное (как можно меньшее) значение этого критерия. Для известного тестового примера приводится сравнение приближенного алгоритма с алгоритмами, оптимальными по критерию Шеннона и разработанными в работах [8] и [139].

Результаты этого сравнения показали, что разработанный в диссертации приближенный алгоритм потребовал не более 71 обращения к оракулу, в то время, как вышеупомянутые алгоритмы потребовали 252 обращения.

Интересный результат с использованием введенного критерия оптимальности был получен в работе для МБФ, порожденной несовместной системой линейных неравенств. В рассмотрение был введен модернизированный оракул. Для заданного двоичного набора новый оракул должен выдать значение МБФ. В случае, если значение функции равно 1, то оракул должен вернуть дополнительно любую нижнюю единицу, двоичный набор для которой меньше или равен двоичного набора, предложенного оракулу. Для такой постановки в диссертации разработан алгоритм, который требует не более $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ обращений к оракулу. Исходя из того, что никакой другой алгоритм не может иметь менее $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ обращений, получаем, что предложенный алгоритм является оптимальным по введенному критерию (значение критерия для этого алгоритма равно 1).

Следующий класс МБФ, рассматриваемый в работе, составляют МБФ, порожденные неориентированными графами. Такая МБФ на некотором двоичном наборе принимает значение 0, если подмножество вершин графа, состоящее из вершин, номера которых соответствуют единичным компонентам этого набора, не содержит ребер. Для расшифровки этой МБФ могут быть использованы как известные, так и разработанные в диссертации алгоритмы. Для практических целей особый интерес представляют максимальные верхние нули МБФ или, в терминах теории графов, наибольшее независимое множество вершин (Maximum Independent Set — MIS) в неориентированном графе, порождающем МБФ. В Главе 4 разработан эвристический алгоритм поиска максимального независимого множества с абсолютной оценкой отклонения приближенного решения от оптимального.

С этой целью вводится понятие (k, m) -вершины в графе, где k — количество вершин в окрестности вершины в графе, а m — количество ребер, недостающих в окрестности вершины до полного порожденного подграфа. Доказано, что если в графе существует $(k, 0)$ -вершина, то она входит в некоторое наибольшее независимое множество. Если же параметр m вершины не равен 0, то эта вершина входит в некоторое независимое множество и при этом число вершин в этом множестве отличается от числа вершин в

наибольшем независимом множестве не более, чем на m вершин. На основе этих свойств разработан алгоритм последовательного выбора (k, m) -вершин в серии подграфов исходного графа. В результате формируется независимое множество и абсолютная оценка отклонения приближенного решения от оптимального — количество вершин в приближенном решении меньше, чем количество вершин в оптимальном решении, не более, чем на M . Здесь M — это сумма значений параметров m всех вершин в последовательности отобранных (k, m) -вершин. В случае если все вершины в отобранной последовательности являются $(k, 0)$ -вершинами, то полученное решение будет точным. Например, это имеет место для дерева. Для дополнительных графов тестовой библиотеки DIMACS в работе приводятся результаты вычислительных экспериментов с использованием разработанного эвристического алгоритма. При этом алгоритм демонстрирует высокую эффективность. Полученные приближенные решения либо совпадают с наилучшими, известными на сегодняшний день, либо очень близки к ним. Следует отметить также высокую эффективность алгоритма в части сложности вычислений, которая подтверждается той же серией экспериментов.

В Главе 4 также разработан общий подход к реализации массивно параллельной обработки данных с графовой структурой. В основе этого подхода лежит идея декомпозиции набора ориентированных путей на множестве сильно связанных подграфов ориентированного графа. Разработанный метод параллельной обработки данных положен в основу одной из компонент программного обеспечения вычислительного комплекса — управляющей программы для реализации метода параллельной обработки данных с графовой структурой. Эта управляющая программа используется в приложении вычислительного комплекса для решения задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости (в частности, на этапе организации грузовых железнодорожных перевозок).

Математическая постановка задачи параллельной обработки данных с графовой структурой состоит в следующем. Задан ориентированный граф, набор ориентированных путей этого графа и набор сильно связанных подграфов, объединение которых полностью покрывает исходный граф. Необходимо декомпонировать набор ориентированных путей на множество подпутей таким образом, чтобы каждый подпуть целиком лежал в некотором сильно связанном

подграфе. При этом декомпозиция оценивается по трем критериям: сложность декомпозиции (количество полученных подпутей), баланс декомпозиции (общее количество пар взаимно обратных подпутей в полученном множестве подпутей) и равномерность декомпозиции (показатель распределения подпутей по сильно связным подграфам). Для решения этой многокритериальной задачи, и, как следствие, для реализации метода параллельной обработки данных с графовой структурой, в диссертации разработан эвристический алгоритм, основанный на идее быстрой сортировки строк специальным образом построенной таблицы. В работе также приводятся результаты в области сравнения по сложности разработанного эвристического алгоритма с алгоритмом полного перебора.

В Главе 5 исследуются классы прикладных задач, для решения которых могут быть использованы методы анализа несовместных систем условий. Другими словами, задачи этих классов могут быть эффективно решены с помощью вычислительного комплекса для решения задач анализа несовместных систем с массивно параллельной обработкой данных.

Первой рассматривается задача управления транспортными процессами в условиях противоречивости. В частности, рассматривается задача организации грузовых железнодорожных перевозок, которая включает два этапа: этап планирования перевозок и этап назначения локомотивов для исполнения заданного плана перевозок. В задаче планирования основным объектом рассмотрения являются нормативные нитки графика движения поездов. Нормативные нитки определяются как ориентированные пути в графе сети. При этом для каждой дуги заданы путь, по которому осуществляется движение на соответствующем перегоне. Кроме того, для каждой вершины в пути заданы время прибытия и время отправления из соответствующей станции. Элементы инфраструктуры сети такие, как пути на перегонах, приемо-отправочные пути, являются основными ресурсами, которые используют вышеупомянутые нормативные нитки графика. В работе формализовано понятие конфликтности двух любых нормативных ниток. На основе этого понятия вводится определение графа конфликтов, вершинами которого служит множество нормативных ниток, а ребрами связаны такие пары вершин, для которых соответствующие нормативные нитки конфликтны. В этих терминах независимые системы вершин графа конфликтов определяют бесконфликтные наборы нормативных ниток. Таким образом, бесконфликтный

набор нормативных ниток может служить допустимым расписанием для осуществления перевозок. При этом с практической точки зрения интересны максимальные бесконфликтные наборы. Следовательно, задача планирования грузовых железнодорожных перевозок сводится в рамках разработанной теоретико-графовой модели к задаче поиска максимального независимого множества вершин в неориентированном графе конфликтов. В Главе 4 для решения этой задачи разработан эвристический алгоритм с абсолютной оценкой отклонения приближенного решения от оптимального.

В Разделе 5.1 Главы 5 рассматривается задача о назначении и перемещении локомотивов с целью исполнения некоторого бесконфликтного набора нормативных ниток. Отметим, что набор, подлежащий исполнению, формируется на этапе планирования грузовых железнодорожных перевозок, и считается заданным на этом этапе. При этом предполагается заданной также информация о доступных локомотивах с их локализацией и временем готовности к перевозкам. В бесконфликтном наборе нормативных ниток выделяется некоторое подмножество, которое реализует заданные размеры движения или, другими словами, план перевозок. Такой набор бесконфликтных ниток называется вариантным графиком движения поездов. В диссертации исследуется задача о назначении и перемещении локомотивов, суть которой состоит в том, чтобы для каждой нормативной нитки из вариантного графика, был назначен локомотив, с учетом условий доступности локомотивов. При этом один локомотив может выполнить последовательно несколько нормативных ниток графика. Таким образом, задача состоит в том, чтобы выполнить весь объем перевозок, используя минимальное количество локомотивов. Данная задача переформулирована в работе на языке теории графов. С этой целью вводится в рассмотрение ориентированный граф зависимостей нормативных ниток из вариантного графика. Вершинами этого графа являются нормативные нитки, и дуга следует из одной вершины в другую, если соответствующие нормативные нитки могут быть исполнены последовательно одним и тем же локомотивом. Тогда задача оптимального назначения и перемещения локомотивов сводится к задаче поиска минимального числа ориентированных путей графа зависимостей нормативных ниток таких, что их объединение полностью покрывает все его вершины. При этом пути могут иметь пересечения. Тогда следующая модификация задачи

состоит в том, чтобы общее количество вершин во всех найденных путях было минимальным.

В реальных системах организации грузовых железнодорожных перевозок есть существенная особенность. Она состоит в том, что все локомотивы «приписаны» к некоторому множеству депо (так называемое депо приписки). При этом локомотивы могут перемещаться только в некоторой ограниченной подсети всей железной дороги, определяемой для каждого депо приписки. Таким образом, ориентированный граф сети может быть представлен как объединение сильно связанных подграфов, каждый из которых определяет некоторое депо приписки. Таким образом, для каждого сильно связанного подграфа будет задан ресурс — те локомотивы (и их условия доступности), которые приписаны к соответствующему депо. При этом сильно связанные подграфы имеют пересечения. В связи с этим возникает задача декомпозиции вариантного графика на поднитки, каждая из которых будет целиком расположена в области обслуживания локомотивов некоторого депо. Другими словами, пути ориентированного графа необходимо декомпозировать так, чтобы каждый подпуть целиком лежал в некотором сильно связанном подграфе.

В Главе 4 был разработан эффективный метод параллельной обработки данных такого типа. Таким образом, эта задача может быть решена с помощью разработанного ранее алгоритма декомпозиции множества ориентированных путей на множестве сильно связанных подграфов. Этот алгоритм был использован для решения тестовой задачи, имеющей прикладное происхождение (реальные данные). Вариантный график размерности 1215 (количество нормативных ниток) был декомпозирован на множестве сильно связанных подграфов размерности 16 (количество локомотивных депо на Московской железной дороге). В результате для каждого сильно связанного подграфа был сформирован набор подпутей. При этом максимальная размерность набора для отдельно взятого сильно связанного подграфа составила 197 подпутей, а минимальная — 12 подпутей. Таким образом, в результате использования разработанного метода параллельной обработки данных с графовой структурой размерность подзадач, подлежащих решению, снижается почти на порядок по сравнению с размерностью исходной задачи.

В Разделе 5.2 Главы 5 рассматривается задача управления технологическими маршрутами на дискретном производстве. Не уменьшая

общности, задача исследуется на примере металлургического производства. В частности, в диссертации исследуется задача оптимального назначения технологических маршрутов в процессе изготовления продукции.

Идея оптимального назначения основана на возможности сбора и архивирования больших объемов исторических данных о реализации технологических процессов. Возможность дальнейшего использования этих данных мотивирует исследование задач прогнозирования и распознавания качества конечной продукции с целью выбора оптимального маршрута для продолжения технологического процесса. Конечной целью такого выбора является исключение брака производства или повышение объемов выпуска товарной продукции на единицу затрат. Заметим, что накапливаемая информация имеет все признаки больших данных, а именно:

- имеют значительные объемы, измеряемые многими терабайтами информации,
- накопление информации происходит в потоковом режиме с большой скоростью,
- накапливаемая информация характеризуется большим разнообразием и содержит значения тысяч и даже десятков тысяч параметров.

В работе вводится в рассмотрение инфраструктурный граф, вершины которого соответствуют технологическим агрегатам производства. Из одной вершины выходит дуга в другую вершину, если единица продукции после обработки на первом агрегате может проследовать в этом направлении на обработку на втором агрегате. Вершиной–развилкой инфраструктурного графа называется вершина, из которой выходит более одной дуги. В таких и только таких вершинах может приниматься решение о переназначении технологического маршрута. Любой исполненный технологический маршрут представляет собой ориентированный путь инфраструктурного графа. Каждой вершине в этом пути присваивается набор параметров, характеризующих конкретную реализацию технологического маршрута для данного исполненного технологического маршрута. При этом исполненный технологический маршрут является продуктовым, если он завершается выпуском товарной продукции. Для каждого продуктового исполненного технологического маршрута определяется параметр принадлежности продукции к некоторому классу эффективности. В частности, могут рассматриваться два класса: годные и

бракованные изделия. Тогда рассматриваемая задача состоит в снижении брака производства путем оптимального назначения технологических маршрутов в ходе их исполнения.

Таким образом, в результате накопления технологической информации возникает большая база данных с продуктовыми исполненными технологическими маршрутами (ИТМ) с маркерами классов эффективности. Все продуктовые ИТМ могут быть разбиты на классы по принципу принадлежности к одному и тому же ориентированному пути в инфраструктурном графе. На каждом таком пути может располагаться одна и более вершин–развилки. Для каждого такого класса и каждой такой вершины–развилки может быть поставлена задача прогнозирования или, другими словами, задача распознавания класса эффективности, которому будет принадлежать готовое изделие, если технологический маршрут данного класса будет продолжен далее при достижении данной вершины–развилки. Обучающая выборка для такой задачи будет состоять из подвекторов продуктовых исполненных технологических маршрутов, ограниченных начальным участком ориентированного пути инфраструктурного графа от начальной вершины до рассматриваемой вершины–развилки. Каждый такой подвектор будет снабжен маркером принадлежности некоторому классу эффективности. Таким образом, возникает целая серия задач распознавания образов в геометрической постановке, каждая из которых состоит из большого числа конечномерных векторов, снабженных маркером принадлежности к одному из классов эффективности. Для этих векторов необходимо построить решающее правило для отнесения нового такого вектора к одному из классов эффективности.

Численные методы решения таких задач подробно рассматриваются в Главе 4 диссертации.

Полный цикл работ показан на примере задачи прогнозирования и снижения брака на производстве. Предположим, что рассматривается всего два класса эффективности: годное и бракованное изделие. Предположим также, что для всех указанных выше задач распознавания построены решающие правила. Рассмотрим механизм использования полученной сети решающих правил для снижения брака производства. Пусть выбран для реализации некоторый технологический маршрут, который связан с

некоторым ориентированным путей в инфраструктурном графе. Пусть исполняемый технологический маршрут достиг первой вершины–развилки на рассматриваемом маршруте. Следовательно, получен конечномерный вектор параметров для начального участка до этой вершины–развилки. Используя построенное ранее решающее правило, можно определить, какой будет результат при продолжении технологического маршрута дальше. Если прогнозируется годное изделие, то технологический маршрут продолжается по плану. Если же прогнозируется брак, то следует испытать все другие маршруты, имеющие такой же начальный участок до рассматриваемой вершины–развилки. Для всех этих случаев, используя соответствующие найденные ранее решающие правила, будет получен прогноз о качестве конечной продукции. Если найдутся маршруты с прогнозом годного изделия, то следует выбрать один из них для дальнейшего продолжения. Если же для всех технологических маршрутов прогнозируется брак, то текущий технологический процесс следует прекратить, а единицу продукции отправить на переработку.

В Главе 5 также разработан метод параллельной обработки данных, возникающих в процессе управления технологическими маршрутами. Рассматривается вся сеть задач распознавания образов, каждая из которых определяется выделенными начальными участками исполненных технологических маршрутов до некоторой вершины–развилки. Суть метода состоит в том, чтобы запускать процесс дообучения системы по мере поступления новых данных в приоритетном порядке независимо для каждого класса исполненных технологических маршрутов. Этот метод реализован в управляющей программе вычислительного комплекса, которая функционирует согласно принятому в вычислительном комплексе механизму передачи данных на параллельную обработку.

В Главе 6 приводится описание вычислительного комплекса для решения задач анализа несовместных систем с массивно параллельной обработкой данных в приложении к решению задач, исследуемых в Главе 5.

Математическое обеспечение вычислительного комплекса представляет собой программную реализацию алгоритмов численного решения задач анализа несовместных систем, разработанных в Главе 4. Программное обеспечение, в свою очередь, состоит из двух управляющих программ для реализации

методов параллельной обработки данных, и двух комплексов проблемно-ориентированных прикладных программ. Отметим, что вышеупомянутые методы параллельной обработки данных были также разработаны в Главах 4 и 5 диссертации.

Вычислительный комплекс состоит из нескольких компонент: сервер сбора данных, сервер хранения данных, сервер математических моделей, сервер управляющих программ, сервер планирования и сервер принятия решений. В каждом из этих серверов функционируют специализированные программы. При этом сервер сбора данных и сервер принятия решений оснащены также каналами связи с внешними системами и уровнем пользователей соответственно.

Математическое обеспечение вычислительного комплекса располагается на сервере математических моделей и взаимодействует с сервером планирования и сервером управляющих программ. В рамках взаимодействия сервера математических моделей с сервером управляющих программ в вычислительном комплексе реализованы такие методы параллельной обработки данных, как декомпозиция множества путей ориентированного графа на множестве сильно связанных подграфов, а также параллельная обработка на сети задач распознавания (прогнозной аналитики).

В Главе 6 также разрабатываются комплексы проблемно-ориентированных программ для решения исследуемых задач управления технологическими маршрутами на дискретном производстве и транспортными процессами в условиях противоречивости.

Комплекс программ «Управление технологическими маршрутами» состоит из двух программных компонент: программа «DATA TRACK» и программа «EXPERT BASE». В рамках архитектуры вычислительного комплекса программа «DATA TRACK» располагается на серверах сбора и хранения данных. Таким образом, программа «DATA TRACK» взаимодействует в вычислительном комплексе с внешними системами и с сервером управляющих программ. Основным функционалом этой программы является сбор, архивирование и первичная обработка данных о завершившихся и действующих технологических процессах. Аналогично, будучи расположенной на серверах планирования и принятия решений, программа «EXPERT BASE» взаимодействует в вычислительном комплексе

с сервером управляющих программ, сервером математических моделей и с уровнем пользователей. Основной задачей этой программной компоненты является непосредственно формирование решающих правил о продолжении или переназначении действующих технологических маршрутов, а также подготовка и представление на уровень пользователей информации рекомендательного характера.

Комплекс программ «Управление транспортными процессами» также состоит из двух компонент: программа «Регистратор прохождения транспорта» и программа «PLAMER». Обе эти программные компоненты в рамках архитектуры вычислительного комплекса располагаются на сервере сбора данных и взаимодействуют с внешними системами и сервером хранения данных. Программа «Регистратор прохождения транспорта» предназначена для сбора данных о доступных ресурсах локомотивного и вагонного парка, а также для формирования отчетности о локализации задействованных ресурсов в режиме реального времени. В свою очередь, программа «PLAMER» предназначена для планирования местной работы. Обработка информации, предоставляемой программой «PLAMER», является неотъемлемой составляющей этапа формирования размеров движения.

Таким образом, в диссертации получены следующие **новые результаты**.

1. Предложены новые методы разработки прикладного программного обеспечения, основанные на анализе несовместных систем и моделях массивно параллельной обработки данных, позволяющие разработать математическое и программное обеспечение вычислительных комплексов для решения задач в таких важных предметных областях как управление технологическими маршрутами на дискретном производстве и управление транспортными процессами в условиях противоречивости. Разработана общая архитектура вычислительного комплекса и функционал составляющих элементов.

2. Разработаны новые методы математического моделирования и анализа несовместных систем условий с позиций теории графов и комбинаторной оптимизации (графы систем независимости), комбинаторной геометрии (свойства семейств диагоналей и граней выпуклых многогранников) и теории булевых функций (максимальные верхние нули монотонных булевых функций).

3. Всесторонне рассмотрены свойства графов систем независимости для различных классов. Для ряда классов систем независимости, представляющих прикладной интерес, доказана связность графа системы независимости, вытекающая из связности соответствующего топологического пространства и являющаяся важнейшим свойством графа системы независимости, эффективно используемым при построении алгоритмов выделения их экстремальных подсистем.

4. Получены новые результаты для класса систем независимости, порождаемых несовместными системами линейных неравенств, доказаны связность графа максимальных совместных подсистем (графа МСП) и достаточные условия более сильного типа связности графа МСП, а также получены оценки степеней вершин и диаметра графа МСП. Полученные результаты имеют важное значение при построении алгоритмов выделения максимальных совместных подсистем (МСП) несовместной системы линейных неравенств. Доказана теорема о существовании цикла нечетной длины в графе МСП, на базе которой предложен новый приближенный алгоритм построения минимального комитета несовместной системы линейных неравенств и получена оценка его эффективности в сравнении с известными алгоритмами. Впервые введено понятие альтернативного покрытия, на основе которого разработан новый критерий классификации классических инструментов обработки данных таких как комитеты и решающие деревья.

5. Введено понятие G -диагонали выпуклого многогранника и получены новые результаты о взаимосвязи между семействами МСП и МНП (минимальных несовместных подсистем) несовместной системы линейных неравенств и семействами диагоналей и граней соответствующего выпуклого многогранника, что позволило применить глубоко разработанный арсенал методов и средств комбинаторной геометрии для анализа несовместных систем линейных неравенств и получить оценки снизу для максимального числа МСП и новые результаты о комбинаторных свойствах выпуклых многогранников, которые описываются в терминах графов систем независимости двойственных конструкций. Показано, что классификация многогранников по комбинаторному типу совпадает с классификацией многогранников по типам G -диагоналей. Исследованы комбинаторные свойства положительных базисов конечномерных евклидовых пространств,

представляющих все многообразие элементов семейства МНП несовместных систем линейных неравенств.

6. Построены новые полиномиальные эвристические алгоритмы дихотомии для решения многоклассовой задачи распознавания образов в геометрической постановке на этапе разделения обучающей выборки. Эффективность разработанных алгоритмов показана в сравнении с алгоритмами полного перебора всех возможных решений и подтверждается результатами вычислительных экспериментов для большой выборки из случайных наборов векторов.

7. Разработаны новые точные и приближенные комбинаторные и комбинаторно-графовые алгоритмы выделения всех МСП несовместных систем линейных неравенств. Актуальность приближенных алгоритмов связана с тем, что, с практической точки зрения оказывается достаточным выделение некоторого связного подграфа графа МСП, содержащего цикл нечетной длины.

8. Введен новый естественный критерий оптимальности алгоритма расшифровки монотонной булевой функции (МБФ), нормированный на общее число верхних нулей и нижних единиц МБФ и учитывающий объективную сложность задачи. Для МБФ, порождаемых несовместными системами линейных неравенств, построен оптимальный алгоритм по этому критерию.

9. Разработан новый полиномиальный эвристический алгоритм расшифровки МБФ, порождаемых неориентированными графами, с абсолютной оценкой точности приближенного решения. Показана взаимосвязь задачи расшифровки МБФ и классической задачи комбинаторной оптимизации о наибольшем независимом множестве. Проведены вычислительные эксперименты на известных примерах графов из библиотеки DIMACS, для которых показана эффективность разработанного алгоритма в сравнении с известными быстрыми алгоритмами.

10. Разработан новый подход к оптимизации управления технологическими маршрутами на дискретном производстве, состоящий в формировании сети задач распознавания образов, решаемых с помощью разработанных в работе методов анализа несовместных систем. Разработана модель параллельной обработки данных для решения задач в такой сети.

11. Разработана новая математическая модель управления транспортными процессами в условиях противоречивости на примере задачи

управления грузовыми железнодорожными перевозками и показано, что эта задача может быть решена методами анализа несовместных систем с помощью разрабатываемого в работе вычислительного комплекса. Показано, что формирование множества бесконфликтных наборов нормативных ниток (потенциальных расписаний, допустимых для совместного исполнения) может быть сведено к расшифровке МБФ, порожденной неориентированным графом.

12. Разработан новый общий подход к декомпозиции набора ориентированных путей в графе на множестве сильно связанных подграфов этого графа. На основе этого подхода разработана модель параллельной обработки данных для задачи назначения локомотивов на исполнение ниток графика плана перевозок, имеющей высокую комбинаторную сложность. Важным преимуществом разработанной модели параллельной обработки является существенное снижение размерности задачи, что приобретает особую актуальность в условиях оперативной организации транспортных процессов.

13. Разработана управляющая программа для организации параллельной обработки данных в задаче управления технологическими маршрутами на дискретном производстве. Разработан комплекс проблемно-ориентированных прикладных программ для решения задач управления технологическими маршрутами на дискретном производстве, а также принципы его взаимодействия с другими компонентами вычислительного комплекса.

14. Разработана управляющая программа для организации параллельной обработки данных в задаче управления транспортными процессами в условиях противоречивости. Разработан комплекс проблемно-ориентированных прикладных программ для решения задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости, а также принципы взаимодействия его с другими компонентами вычислительного комплекса.

Таким образом, **на защиту выносятся следующие положения.**

1. Методы разработки программного обеспечения вычислительного комплекса, основанные на анализе несовместных систем и моделях массивно параллельной обработки данных. Общая архитектура вычислительного комплекса и функционал составляющих элементов.

2. Формализация задачи управления технологическими маршрутами на дискретном производстве как задачи распознавания образов в геометрической постановке. Новый эффективный метод параллельной обработки данных

на сети задач распознавания образов: кластеризация векторов обучающей выборки каждой задачи сети по мере накопления данных.

3. Формализация задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости как задачи расшифровки монотонной булевой функции (МБФ). Для решения этой задачи предложен новый полиномиальный алгоритм расшифровки МБФ, порождаемых неориентированными графами, с абсолютной оценкой точности приближенного решения. Проведены вычислительные эксперименты на известных примерах графов из библиотеки DIMACS, для которых показана эффективность разработанного подхода в сравнении с известными быстрыми алгоритмами.

4. Новые теоретико–графовые методы математического моделирования несовместных систем. Теоремы о связности графов для широкого класса систем независимости. Для класса несовместных систем линейных неравенств доказана теорема о существовании цикла нечетной длины в графе максимальных совместных подсистем (граф МСП) и впервые установлена взаимосвязь таких циклов с комитетами исходной системы. На основе полученных результатов разработаны эффективные алгоритмы построения графа МСП с последующим синтезом комитетов с числом членов, близким к минимальному.

5. Эффективные полиномиальные алгоритмы дихотомии с линейными разделяющими функциями в многоклассовой задаче распознавания образов для этапа разделения обучающей выборки. Метод альтернативных покрытий для повышения эффективности комитетных конструкций.

6. Новые комбинаторно–геометрические методы математического моделирования несовместных систем. Введено новое для комбинаторной геометрии понятие G -диагонали выпуклого многогранника и впервые несовместной системе линейных неравенств поставлен в соответствие (по определенному правилу) выпуклый многогранник таким образом, что семейства МСП (максимальных совместных подсистем) и МНП (минимальных несовместных подсистем) системы неравенств комбинаторно изоморфны семействам дополнений G -диагоналей и дополнений гиперграней многогранника. Исследованы комбинаторные свойства положительных базисов конечномерных евклидовых пространств, представляющих все многообразие элементов семейства МНП несовместных систем линейных неравенств.

7. Новый подход к оптимальной расшифровке МБФ: введен новый для теории булевых функций критерий оптимальной расшифровки, нормированный по числу обращений к оракулу и учитывающий объективную сложность МБФ. В рамках этого подхода разработан алгоритм расшифровки МБФ, оптимальный по введенному нормированному критерию для несовместных систем линейных неравенств.

8. Новый общий подход к параллельной обработке данных путем декомпозиции набора ориентированных путей в графе на множестве сильно связанных подграфов этого графа. На основе этого подхода разработана модель параллельной обработки данных для задачи назначения локомотивов на исполнение ниток графика плана перевозок, имеющей высокую комбинаторную сложность. Важным преимуществом разработанной модели параллельной обработки данных является существенное снижение размерности задачи.

9. Управляющая программа для организации параллельной обработки данных в задаче управления технологическими маршрутами на дискретном производстве. Комплекс проблемно-ориентированных программ для решения задач управления технологическими маршрутами на дискретном производстве.

10. Управляющая программа для организации параллельной обработки данных в задаче управления транспортными процессами в условиях противоречивости. Комплекс проблемно-ориентированных прикладных программ для решения задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости.

Все результаты диссертационной работы получены **лично** автором в ходе научно-исследовательской деятельности. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертационную работу включен только принадлежащий автору материал.

Основные результаты диссертации изложены в 56 научных работах, включая 2 монографии, 25 статей в рецензируемых научных журналах, из которых 23 журнала входят в международные базы цитирования Scopus или Web of Science, и 13 журналов входят в перечень ВАК, а также 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ и 4 патента на изобретения.

Основные результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных научных конференциях и семинарах.

1. Научно–техническая конференция «Методы математического программирования и их программное обеспечение» (Свердловск, 1981).
2. 1-я конференция по комбинаторной геометрии и ее приложениям (Батуми, 1985).
3. 23–24 международные научные конференции «Microwave and Telecommunication Technology (CRIMICO)» (Севастополь, 2013–2014).
4. XLII–XLIII международные научные конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2016–2017).
5. XXI–XXII международные научные конференции «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2016–2017).
6. Всероссийская научная конференция «Управление большими системами» (Самара, 2016).
7. Международная научная конференция «Математика, информатика и физика и их приложения в науке и образовании» (Москва, 2016).
8. Международная научно–практическая конференция «Big Data and Advanced Analytics» (Минск, 2017).
9. Международная научная конференция «Big Data Conference (BDC)» (Москва, 2017).
10. Международная научная конференция «OPTIMA» (Petrovac, 2017).
11. Семинар отдела «Математическое программирование» ИММ им. Н. Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, 2017–2018).
12. Семинар отдела «Дискретная оптимизация» Омского филиала ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН (Омск, 2017).
13. Общероссийский семинар «Информатика, управление и системный анализ» факультета «Вычислительная математика и кибернетика» МГУ им. М. В. Ломоносова (Москва, 2017).
14. Семинар отдела «Теории расписаний и дискретной оптимизации» ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН (Москва, 2018)
14. Семинар лаборатории «Дискретная оптимизация в исследовании операций» ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 2018).
15. Семинар лаборатории «Анализ данных» ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 2018).

Результаты диссертации были использованы в научно–исследовательских работах по гранту 218–03–167 в соответствии с договором № 02.G25.31.0055

с Министерством образования и науки России от 12 февраля 2013 года в рамках проекта «Разработка автоматизированной системы слежения, контроля, моделирования, анализа и оптимизации полного цикла выпуска металлургической продукции на основе создания и интеграции математических моделей технологических, логистических и бизнес-процессов предприятия».

Автор является лауреатом премии им. Е. А. и М. Е. Черепановых по направлению научно-технической деятельности (2000 г.) и премии Правительства России в области науки и техники (2004 г.).

1. Базовое математическое обеспечение вычислительного комплекса

В этой главе вводится общее определение несовместной системы условий. Приводится описание основных классов моделей несовместных систем, исследуемых в диссертационной работе.

Далее в главе разрабатываются базовые методы исследования несовместных систем, основанные на взаимосвязи несовместных систем и специальных математических конструкций — абстрактных симплициальных комплексов. Разработке методов математического моделирования и численного решения задач анализа несовместных систем будут посвящены последующие главы. Отметим, что абстрактные симплициальные комплексы являются одним из ключевых объектов исследования диссертационной работы, поскольку разрабатываемые в дальнейшем методы математического моделирования и численные методы решения задач анализа несовместных систем тесно связаны с их структурными и комбинаторными свойствами.

1.1. Несовместные монотонные системы условий

Несовместные системы условий занимают важное место в исследованиях по дискретной математике и математической кибернетике [104]. Среди широкого многообразия объектов подобного рода со свойством монотонности наиболее близки к области диссертационного исследования несовместные системы линейных неравенств [70–74, 104].

Пусть $\mathfrak{S} := \{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \dots, \mathfrak{s}_m\}$ — конечная непустая система условий и $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$ — множество индексов условий, которыми помечены элементы множества \mathfrak{S} . Множеству $[m]$ можно поставить в соответствие булеву решетку $\mathbb{B}(m)$ всех его подмножеств, частично упорядоченных по теоретико-множественному включению. Тогда произвольный элемент $B \in \mathbb{B}(m)$ — это мультииндекс подсистемы $\{\mathfrak{s}_i : i \in B\}$ системы \mathfrak{S} (во многих исследованиях употребляется более краткий термин — индекс подсистемы). При этом отношению $A \subseteq B$ включения мультииндексов $A, B \subseteq [m]$ отвечает отношение сравнения $A \preceq B$ элементов A и B в решетке $\mathbb{B}(m)$. Множество атомов $\mathbb{B}(m)^{(1)} := \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}\}$ решетки $\mathbb{B}(m)$ находится во взаимно-

однозначном соответствии с множеством условий \mathfrak{S} . Наименьший элемент $\hat{0}$ решетки $\mathbb{B}(m)$ — это мультииндекс пустой подсистемы \emptyset системы \mathfrak{S} , а наибольший элемент $\hat{1}$ решетки $\mathbb{B}(m)$ является мультииндексом $[m]$ всей системы \mathfrak{S} .

Пусть задано отображение $\pi: \mathbb{B}(m) \rightarrow \mathbf{2}^\Gamma$ в семейство подмножеств некоторого непустого множества Γ со следующими свойствами.

- Пустая подсистема системы \mathfrak{S} совместна, то есть

$$\pi(\hat{0}) \neq \emptyset, \quad (1.1)$$

при этом обычно полагают $\pi(\hat{0}) := \Gamma$.

- Каждое условие в отдельности выполнимо или, иными словами, каждая подсистема, состоящая из единственного условия, совместна:

$$B \in \mathbb{B}(m)^{(1)} \implies \pi(B) \neq \emptyset. \quad (1.2)$$

- Любая подсистема совместной системы совместна. Причем:

$$A, B \in \mathbb{B}(m), \quad A \preceq B \implies \pi(A) \supseteq \pi(B), \quad (1.3)$$

а значит, и

$$A, B \in \mathbb{B}(m) \implies \pi(A) \cap \pi(B) \supseteq \pi(A \vee B),$$

где $A \vee B$ обозначает наименьшую верхнюю грань (то есть объединение множеств $A \cup B$) элементов A и B в решетке $\mathbb{B}(m)$.

- Система \mathfrak{S} несовместна:

$$\pi(\hat{1}) = \emptyset. \quad (1.4)$$

Определение 1.1. *Конечной монотонной несовместной системой условий называется система \mathfrak{S} , для которой связанные с ней отображение π и семейство $\mathbf{2}^\Gamma$ значений этого отображения удовлетворяют условиям (1.1)÷(1.4).*

Задачи анализа несовместных систем условий связаны главным образом с исследованиями комбинаторных и структурных свойств семейств их максимальных совместных и минимальных несовместных подсистем. В

этой связи актуальным представляется рассмотрение различных аспектов несовместных систем, а также их взаимосвязей с другими математическими объектами. С основными проблемами комбинаторной оптимизации можно ознакомиться подробнее в работах [11, 127, 206, 208, 219, 223].

Распознавание образов и синтез комитетов. Приведем краткое описание двухклассовой задачи распознавания образов (подробнее см. [104]).

Определение 1.2. *Комитетом несовместной системы,*

$$\mathfrak{S} := \{ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{a}_i\| = 1, i \in [m]; i_1 \neq i_2 \Rightarrow \mathbf{a}_{i_1} \neq -\mathbf{a}_{i_2} \}, \quad (1.5)$$

однородных строгих линейных неравенств ранга n над вещественным евклидовым пространством \mathbb{R}^n , чье множество задающих векторов $\mathbf{A}(\mathfrak{S}) := \{\mathbf{a}_i : i \in [m]\}$ не содержит пар антиподов, называется конечное множество векторов $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$, удовлетворяющее соотношению

$$|\{\mathbf{x} \in \mathcal{K} : \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0\}| > \frac{1}{2}|\mathcal{K}|,$$

для каждого задающего систему \mathfrak{S} вектора $\mathbf{a}_i, i \in [m]$.

Отметим, что определение комитета системы \mathfrak{S} впервые дано в [164, 165]: комитетом системы \mathfrak{S} называется такое множество $\mathcal{K} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{2k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$, что каждому неравенству системы \mathfrak{S} удовлетворяют не менее $k + 1$ векторов множества \mathcal{K} .

Метод комитетов эффективно используется для решения несовместных задач принятия решений и, в частности, при обучении распознаванию. Задача комитетного разделения так называемой обучающей выборки, с целью формирования решающих правил распознавания, может быть сведена к основной двухклассовой постановке.

Пусть $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\tilde{\mathbf{C}}$ — конечные множества векторов пространства признаков \mathbb{R}^{n-1} , составляющие упомянутую обучающую выборку. Искусственно дополнив каждый вектор из множеств $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\tilde{\mathbf{C}}$ новой n -ой компонентой, равной 1, получим два множества $\mathbf{B}, \mathbf{C} \subset \mathbb{R}^n$ расширенных векторов обучающей выборки.

Необходимо найти вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\begin{cases} \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > 0, & \mathbf{a} \in \mathbf{B}, \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle < 0, & \mathbf{a} \in \mathbf{C}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь используются строгие неравенства, поскольку, с позиций практики, их нестрогость была бы связана с дополнительным риском получения неустойчивых решающих правил.

Если \mathbf{x} — решение системы (1.6), то классификация вновь предъявленного расширенного вектора $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ (то есть отнесение \mathbf{g} к одному из классов, частично представленных множествами \mathbf{B} и \mathbf{C}) производится в зависимости от знака скалярного произведения $\langle \mathbf{x}, \mathbf{g} \rangle$. Однако указанная система может оказаться несовместной, и этот, наиболее часто встречающийся на практике, случай требует разработки особых методов решения задачи.

Унификация двух подсистем, составляющих систему (1.6),

$$\begin{cases} \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > 0, & \mathbf{a} \in \mathbf{B}, \\ -\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > 0, & \mathbf{a} \in \mathbf{C}, \end{cases}$$

приводит (после нормализации задающих векторов) к конструкциям \mathfrak{S} вида (1.5).

Таким образом, задача анализа несовместной системы условий сводится к задаче распознавания образов в геометрической постановке, эффективное решение которой может быть найдено с помощью комитетного метода.

Булевы функции. Рассмотрим конечную несовместную монотонную систему условий \mathfrak{S} , для которой поставленные ей в соответствие отображение π и семейство 2^Γ значений этих отображений удовлетворяют условиям (1.1)÷(1.4).

Для комбинаторного анализа систем \mathfrak{S} единственным существенным обстоятельством является пустота или непустота образов $\pi(B)$ различных мультииндексов $B \in \mathbb{B}(m)$ подсистем при отображении π . По этой причине общепринятой является постановка задачи анализа указанных систем на языке монотонных булевых функций; к вопросу об оптимальной расшивке этих функций мы вернемся в Главе 5.

Пусть \mathbf{B} обозначает двухэлементное множество $\{0,1\}$. На единичном дискретном m -мерном кубе \mathbf{B}^m вводится следующее отношение \leq частичного порядка: для произвольных двоичных наборов $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ и $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ полагают $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in [m]$. Булева функция $\mathbf{f}: \mathbf{B}^m \rightarrow \mathbf{B}$ называется монотонной, если из $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$ следует $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) \leq \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})$. Всякая монотонная булева функция индуцирует разбиение $\mathbf{B}^m = \mathbf{f}^{-1}(0) \dot{\cup} \mathbf{f}^{-1}(1)$. Множество $\mathbf{f}^{-1}(0)$ составляют так называемые нули функции \mathbf{f} , а множество $\mathbf{f}^{-1}(1)$ составляют единицы этой функции. Подмножество $\mathbf{max} \mathbf{f}^{-1}(0)$ максимальных элементов частично упорядоченного множества $\mathbf{f}^{-1}(0)$ называют множеством верхних нулей функции \mathbf{f} ; подмножество $\mathbf{min} \mathbf{f}^{-1}(1)$ минимальных элементов частично упорядоченного множества $\mathbf{f}^{-1}(1)$ называют множеством нижних единиц функции \mathbf{f} .

Системе \mathfrak{S} может быть естественным образом сопоставлена монотонная булева функция \mathbf{f} , определенная следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0 &\iff \pi \left(\bigcup_{\{a_i\} \in \mathbb{B}(m)^{(1)}: \alpha_i=1} \{a_i\} \right) \neq \emptyset, \\ \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 1 &\iff \pi \left(\bigcup_{\{a_i\} \in \mathbb{B}(m)^{(1)}: \alpha_i=1} \{a_i\} \right) = \emptyset. \end{aligned}$$

Элементы множества $\mathbf{f}^{-1}(1)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с мультииндексами несовместных подсистем системы $\mathfrak{S}: \boldsymbol{\alpha}$ — единица для \mathbf{f} тогда и только тогда, когда множество $\bigcup_{\{a_i\} \in \mathbb{B}(m)^{(1)}: \alpha_i=1} \{a_i\}$ является мультииндексом несовместной подсистемы из \mathfrak{S} . Сходным образом, элементы множества $\mathbf{f}^{-1}(0)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с мультииндексами совместных подсистем системы $\mathfrak{S}: \boldsymbol{\alpha}$ — нуль для \mathbf{f} тогда и только тогда, когда множество $\bigcup_{\{a_i\} \in \mathbb{B}(m)^{(1)}: \alpha_i=1} \{a_i\}$ является мультииндексом совместной подсистемы из \mathfrak{S} . Наконец, $\boldsymbol{\alpha}$ — нижняя единица для \mathbf{f} тогда и только тогда, когда $\bigcup_{\{a_i\} \in \mathbb{B}(m)^{(1)}: \alpha_i=1} \{a_i\}$ является мультииндексом минимальной несовместной подсистемы системы \mathfrak{S} , и $\boldsymbol{\alpha}$ — верхний нуль для \mathbf{f} тогда и только тогда, когда $\bigcup_{\{a_i\} \in \mathbb{B}(m)^{(1)}: \alpha_i=1} \{a_i\}$ является мультииндексом максимальной совместной подсистемы системы \mathfrak{S} .

Многочисленные примеры наборов $(\mathfrak{S}, \Gamma, \pi)$, для которых выполнены ограничения (1.1) \div (1.4), доставляют конечные несовместные системы

уравнений, неравенств или смешанные системы уравнений и неравенств над векторными пространствами.

Для целей диссертационного исследования особый интерес представляют наборы $(\mathfrak{S}, \mathbb{R}^n, \pi)$, где

$$\mathfrak{S} := \{ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{a}_i\| = 1, i \in [m] \} \quad (1.7)$$

— конечная несовместная система однородных строгих линейных неравенств ранга n над конечномерным пространством \mathbb{R}^n . Здесь $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle := \sum_{k \in [n]} a_{ik} x_k$ обозначает стандартное скалярное произведение; $\|\mathbf{a}_i\| := \sqrt{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle}$ — евклидова норма вектора \mathbf{a}_i . Отображение π , по определению, сопоставляет мультииндексу $T \in \mathbb{B}(m)$ открытый конус решений подсистемы $\{ \langle \mathbf{a}_t, \mathbf{x} \rangle > 0 : t \in T \}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi(T) &:= \bigcap_{t \in T} \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}_t, \mathbf{x} \rangle > 0 \}, \\ \pi(\hat{0}) &:= \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отображение π , определенное в (1.8), индуцирует разбиение

$$\mathbb{B}(m) = \{ T \in \mathbb{B}(m) : \pi(T) = \emptyset \} \dot{\cup} \{ T \in \mathbb{B}(m) : \pi(T) \neq \emptyset \}$$

или, иными словами, разбиение вида (1.8) решетки $\mathbb{B}(m)$ на множества элементов, порождаемые семействами мультииндексов максимальных совместных и минимальных несовместных подсистем.

1.2. Структурные и комбинаторные свойства несовместных монотонных систем условий

В этом разделе обсуждаются свойства систем условий, которые существенно связаны с представительностью множеств.

Взаимная представительность множеств A и B произвольной природы связана с ответом на вопрос о непустоте их пересечения $A \cap B$. Проблематика раздела восходит к стандартной задаче комбинаторной оптимизации: для непустого семейства $\mathcal{A} := \{ A_1, \dots, A_\alpha \}$ непустых попарно различных

подмножеств конечного подстилающего множества $V(\mathcal{A}) := \bigcup_{i=1}^{\alpha} A_i$ дать структурное и комбинаторное описание свойств пары $(\mathcal{A}, \mathfrak{B}(\mathcal{A}))$, где $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — семейство всех минимальных (по включению) систем представителей для \mathcal{A} . Для этих объектов существует несколько других равноправных терминов, которые будут упомянуты ниже. По определению, любое множество из $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ имеет непустое пересечение с каждым множеством из семейства \mathcal{A} и, будучи лишенным произвольного своего элемента, перестает обладать указанным свойством.

Определение 1.3. *Подмножество $B \subseteq V(\mathcal{A})$, удовлетворяющее условию*

$$B \cap A_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in [\alpha], \quad (1.9)$$

называется системой представителей, блокирующим множеством, трансверсалью, или трансверсальным множеством семейства \mathcal{A} . С точки зрения теории графов, семейство \mathcal{A} — это множество гиперребер гиперграфа на множестве вершин $V(\mathcal{A})$, и в этом контексте множество B со свойством (1.9) называется вершинным покрытием гиперграфа.

Отметим, что система представителей B для \mathcal{A} содержит в себе в качестве подмножества по меньшей мере одну минимальную систему представителей.

Если семейство \mathcal{A} обладает свойством

$$A_i \not\subseteq A_j \quad \forall i, j \in [\alpha], \quad i \neq j,$$

(иными словами, если любые два различные множества из \mathcal{A} попарно несравнимы по включению), то для него используются следующие термины: семейство Шпернера, беспорядок, или антицепь. Отметим, что каким бы ни было семейство \mathcal{A} , отвечающее ему семейство $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$, по определению, является семейством Шпернера.

В теории комбинаторной оптимизации семейство $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ называется блокатором семейства \mathcal{A} . Составляющие его множества $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ называются минимальными (по включению) блокирующими множествами, минимальными трансверсальями, минимальными трансверсальными множествами или минимальными системами представителей (последние три термина не следует путать с родственными им терминами, используемыми при анализе систем

различных представителей, с которыми исследование диссертационной работы не связано).

На задачу о системах представителей для семейства $\mathcal{A} := \{A_1, \dots, A_\alpha\}$ с подстилающим множеством $V(\mathcal{A}) = [m]$ непустых попарно различных множеств существуют несколько точек зрения.

1) Функции алгебры логики (подробнее см. [83]).

Задача о системах представителей удобна для разъяснения основных принципов применения булевой алгебры и весьма употребительного приема «превращения элементов и множеств в высказывания».

Высказывание о том, что некоторое множество B является системой представителей для семейства \mathcal{A} , выглядит следующим образом:

$$\left(\bigvee_{x \in A_1} \langle x \in B \rangle \right) \wedge \left(\bigvee_{x \in A_2} \langle x \in B \rangle \right) \wedge \dots \wedge \left(\bigvee_{x \in A_\alpha} \langle x \in B \rangle \right) = 1. \quad (1.10)$$

Вместо высказывания $\langle x \in B \rangle$ для краткости можно писать сам символ x , понимаемый как булева переменная (значение которой равно 1, если x принадлежит множеству B , и равно 0 в ином случае). Кроме того, дизъюнкцию удобно записывать как сложение, а конъюнкцию — как умножение. Тогда высказывание « B есть система представителей для \mathcal{A} » вида (1.10) может быть представлено так:

$$\left(\sum_{x \in A_1} x \right) \cdot \left(\sum_{x \in A_2} x \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{x \in A_\alpha} x \right) = 1, \quad (1.11)$$

и этому уравнению удовлетворяют все те и только те наборы значений булевых переменных x_1, x_2, \dots, x_m , при которых высказывание истинно.

Чтобы найти минимальные системы представителей для \mathcal{A} , левую часть уравнения (1.11) приводят к минимальной дизъюнктивной нормальной форме:

$$\prod_{x \in B_1} x + \prod_{x \in B_2} x + \dots + \prod_{x \in B_\beta} x = 1,$$

раскрывая скобки и используя закон поглощения. Такая форма единственна. Множества $B_1, B_2, \dots, B_\beta \subseteq V(\mathcal{A})$ являются минимальными системами представителей для семейства \mathcal{A} и все вместе составляют его блокатор $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$.

2) $(0,1)$ -матрицы (подробнее см. [142]).

Покрытию \mathcal{A} множества $[m]$ может быть поставлена в соответствие $(0,1)$ -матрица инцидентности размера $\alpha \times m$, чей (i, j) -ый элемент, по определению, равен 1, если $j \in A_i$, и равен 0 в противном случае.

Матрицы инцидентности служат основным связующим звеном между комбинаторными задачами о существовании и выборе, с одной стороны, и теорией матриц — с другой.

Шириной матрицы инцидентности называют минимальное количество таких ее столбцов, что сумма элементов в каждой строке образованной ими подматрицы положительна. Ширина этой матрицы совпадает с наименьшей среди мощностей систем представителей для семейства \mathcal{A} .

3) Трансверсальные множества (вершинные покрытия) гиперграфов (подробнее см. [69])

Как отмечалось выше, в теории графов множество $V(\mathcal{A})$ вместе с семейством \mathcal{A} понимается как гиперграф на множестве вершин $V(\mathcal{A})$ с семейством гиперребер \mathcal{A} . Если каждое гиперребро гиперграфа имеет мощность r , то такой гиперграф называют r -однородным. 2-однородные гиперграфы называют простыми графами без изолированных вершин.

Трансверсальные множества гиперграфа — это в точности системы представителей для семейства гиперребер \mathcal{A} . Минимальную мощность трансверсального множества называют числом трансверсальности гиперграфа.

Важность проблематики трансверсального числа гиперграфов связана с тем, что большое количество комбинаторных задач может быть переформулировано в терминах поиска числа трансверсальности некоторого гиперграфа.

4) Двудольные графы и бинарные отношения (подробнее см. [1]).

Двудольным графом называется простой граф $\mathbf{G}(V_1, V_2; \mathcal{E})$, множество вершин $V_1 \dot{\cup} V_2$ которого представляет собой объединение двух непустых непересекающихся множеств (долей или классов) V_1 и V_2 , причем каждое ребро из семейства \mathcal{E} соединяет вершины из разных классов. Если сориентировать все ребра $\mathbf{G}(V_1, V_2; \mathcal{E})$ в направлении от V_1 к V_2 , то граф $\mathbf{G}(V_1, V_2; \mathcal{E})$ может быть отождествлен с бинарным отношением на классах V_1 и V_2 , то есть с некоторым подмножеством декартова произведения $V_1 \times V_2$.

Сопоставим с рассматриваемым семейством множеств \mathcal{A} двудольный граф $\mathbf{G}(V(\mathcal{A}), \mathcal{A}; \mathcal{E})$, в котором, по определению, для всех вершин $v \in V(\mathcal{A})$ и множеств $A \in \mathcal{A}$ включения $(v, A) \in \mathcal{E}$ выполнены тогда и только тогда, когда $v \in A$. Системы представителей для семейства \mathcal{A} находятся во взаимно однозначном соответствии с такими подсемействами семейства ребер \mathcal{E} , для которых множества инцидентных им элементов из класса \mathcal{A} покрывают этот класс.

5) Системы различных представителей (подробнее см. [234, 235]).

Это последнее из упоминаемых направлений исследований в комбинаторной оптимизации остается полностью за пределами рассмотрения диссертационной работы. Родственными к системам различных представителей объектами являются паросочетания двудольных графов, трансверсальные матроиды и перманенты матриц инцидентности (подробнее см. [1, 4, 5, 11, 13, 114, 134]).

Подмножество $B \subseteq V(\mathcal{A})$ называется системой различных представителей для семейства \mathcal{A} , если существует биекция $\phi: B \rightarrow [\alpha]$, при которой для каждого элемента $b \in B$ выполняется включение $b \in A_{\phi(b)} \in \mathcal{A}$.

Ясно, что (возможно, пустое) семейство всех систем различных представителей для \mathcal{A} является подсемейством семейства всех систем различных представителей для \mathcal{A} . Кроме того, заметим, что любая система различных представителей (если таковые существуют) содержит в качестве подмножества хотя бы одно множество из блокатора $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$.

Напомним связь основных комбинаторных свойств двух частично упорядоченных (ч.у.) множеств, естественным образом возникающих вместе со специфическими разбиениями булевых решеток. Пусть $\mathbb{B}(m)$ — булева решетка ранга $m \geq 1$, под которой будем вновь понимать решетку всех подмножеств множества $[m]$. Эта решетка представляет собой булеан $\mathbf{2}^{[m]}$ множества $[m]$, элементы или грани которого частично упорядочены по теоретико-множественному включению. Как и прежде, обозначим через $\hat{0}$ наименьший элемент решетки $\mathbb{B}(m)$, то есть пустое подмножество \emptyset множества $[m]$. Пусть $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_\gamma\} \subseteq \mathbb{B}(m) - \{\hat{0}\}$ — некоторое непустое семейство множеств, оснащенное упорядочением, индуцированным частичным порядком \preceq на $\mathbb{B}(m)$. Обозначим через $\mathbf{min} \mathcal{V}$ и $\mathbf{max} \mathcal{V}$ множества минимальных и максимальных элементов ч.у. множества \mathcal{V} соответственно.

Определение 1.4. *Порядковым идеалом $\mathfrak{I}(\mathcal{V}) = \mathfrak{I}(\mathbf{max}\mathcal{V})$ решетки $\mathbb{B}(m)$, порожденным множеством \mathcal{V} , называется ч.у. подмножество $\mathfrak{I}(\mathcal{V}) := \{E \in \mathbb{B}(m) : \exists V \in \mathcal{V}, E \preceq V\}$.*

Пусть $\rho: \mathbb{B}(m) \longrightarrow \{0\} \dot{\cup} [m]$ — ранговая функция на $\mathbb{B}(m)$, отображающая подмножества из $[m]$ в их мощности. Вновь обозначим через $\mathbb{B}(m)^{(1)} := \{D \in \mathbb{B}(m) : \rho(D) = 1\} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}\}$ уровень атомов решетки $\mathbb{B}(m)$, то есть семейство одноэлементных подмножеств множества $[m]$.

Определение 1.5. *Если \mathcal{V} — антицепь или, иными словами, если все элементы из множества \mathcal{V} попарно несравнимы в $\mathbb{B}(m)$, то есть $\mathcal{V} = \mathbf{min}\mathcal{V} = \mathbf{max}\mathcal{V}$, то неупорядоченное семейство множеств*

$$\Delta := \{F \subseteq [m] : F \in \mathfrak{I}(\mathcal{V})\} \quad (1.12)$$

называется абстрактным симплициальным комплексом на множестве вершин $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$, с семейством гиперграней \mathcal{V} . Множества из комплекса Δ называются его гранями, а идеал $\mathfrak{I}(\mathcal{V})$ принято называть ч.у. множеством граней комплекса Δ .

Абстрактный симплициальный комплекс — фундаментальный объект алгебраической и комбинаторной топологии, дискретной математики и математической кибернетики, в ряде случаев называемый также системой независимости, — в этом контексте вместо граней и гиперграней комплексов говорят о независимых множествах и базах систем независимости.

Комплекс (1.12) построен на основе антицепи булевой решетки подмножеств конечного множества, при этом антицепь понимается как семейство гиперграней. Часто понятие абстрактного симплициального комплекса вводится без первоначального обращения к булевым решеткам и без использования каких-либо упорядочений: пусть \mathcal{A} — семейство Шпернера, абстрактным симплициальным комплексом на множестве вершин $V(\mathcal{A})$ с семейством гиперграней \mathcal{A} называется семейство множеств

$$\Delta := \{F \subseteq V(\mathcal{A}) : \exists A \in \mathcal{A}, F \subseteq A\} . \quad (1.13)$$

Еще раз обратим внимание на то, что произвольный абстрактный симплициальный комплекс Δ характеризуется свойством

$$G \in \Delta, \quad F \subseteq G \quad \Longrightarrow \quad F \in \Delta,$$

в частности, $\emptyset \in \Delta$.

Дальнейшее исследование основано на том, что комплексы могут быть реконструированы по их семействам гиперграней. Будем обозначать через $\Delta(\mathcal{A})$ комплекс с заданным семейством гиперграней \mathcal{A} .

Пусть $\Delta(\mathcal{A}) \subsetneq \mathbf{2}^{[m]}$, то есть $\mathcal{A} \neq \{\hat{1}\}$. Рассмотрим дополнение $\mathbf{2}^{[m]} - \Delta(\mathcal{A})$ семейства $\Delta(\mathcal{A})$ до булеана $\mathbf{2}^{[m]}$. Если $B \in \mathbf{2}^{[m]} - \Delta(\mathcal{A})$, то $B \not\subseteq A$ или, эквивалентно, $B \cap ([m] - A) \neq \emptyset$, для всех гиперграней $A \in \mathcal{A}$. Иначе говоря, такое множество B является системой представителей для семейства $\mathcal{A}^\perp := \{[m] - A : A \in \mathcal{A}\}$. С этой точки зрения, блокатор $\mathfrak{B}(\mathcal{A}^\perp)$ есть множество $\mathbf{min}(\mathbb{W}(m) - \mathfrak{I}(\mathcal{A}))$ минимальных элементов ч.у. подмножества $\mathbb{W}(m) - \mathfrak{I}(\mathcal{A})$. При этом ч.у. подмножество $\mathbb{W}(m) - \mathfrak{I}(\mathcal{A})$, отвечающее семейству $\mathbf{2}^{[m]} - \Delta(\mathcal{A})$, несет на себе структуру порядкового фильтра в решетке $\mathbb{W}(m)$.

Определение 1.6. Пусть $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{W}(m)$. Порядковым фильтром $\mathfrak{F}(\mathcal{W}) = \mathfrak{F}(\mathbf{min} \mathcal{W})$, порожденным \mathcal{W} , называется ч.у. подмножество $\mathfrak{F}(\mathcal{W}) := \{E \in \mathbb{W}(m) : \exists W \in \mathcal{W}, E \succeq W\}$.

Таким образом, семейство $\mathbf{2}^{[m]} - \Delta(\mathcal{A})$ представлено в решетке $\mathbb{W}(m)$ порядковым фильтром $\mathbb{W}(m) - \mathfrak{I}(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{B}(\mathcal{A}^\perp))$.

Итак, любая антицепь $\mathcal{A} \subset \mathbb{W}(m) - \{\hat{1}\}$ индуцирует разбиение решетки $\mathbb{W}(m)$ вида

$$\mathbb{W}(m) = \mathfrak{I}(\mathcal{A}) \dot{\cup} \mathfrak{F}(\mathfrak{B}(\mathcal{A}^\perp)); \quad (1.14)$$

ниже напомним основные комбинаторные свойства пары $(\mathfrak{I}(\mathcal{A}), \mathfrak{F}(\mathfrak{B}(\mathcal{A}^\perp)))$.

Вернемся к упомянутой в Разделе 1.1 решетке $\mathbb{W}(m)$.

Пусть $[m]$ — множество индексов, которыми помечены условия, вместе составляющие некоторую несовместную монотонную систему условий \mathfrak{S} , описываемую в общем виде посредством (1.1)÷(1.4). Предписанное системе \mathfrak{S} свойство монотонности означает, что каждая подсистема совместной подсистемы из \mathfrak{S} совместна, и каждая подсистема, содержащая несовместную подсистему, также несовместна.

Пусть \mathbf{I} — семейство мультииндексов минимальных (по включению) или несократимых несовместных подсистем (МНП), а \mathbf{J} — семейство мультииндексов максимальных (по включению) совместных подсистем (МСП) системы \mathfrak{S} . Ключевым объектом, связанным с этой системой, является разбиение

$$\mathbb{W}(m) = \mathfrak{J}(\mathbf{J}) \dot{\cup} \mathfrak{F}(\mathbf{I}). \quad (1.15)$$

Поскольку

$$\mathbf{I} = \mathfrak{B}(\mathbf{J}^\perp), \quad (1.16)$$

то есть семейство мультииндексов МНП — это блокатор семейства дополнений до мультииндексов МСП, то имеем $\mathfrak{F}(\mathbf{I}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{B}(\mathbf{J}^\perp))$.

Будем называть систему \mathfrak{S} несократимой, если $\bigcap_{J \in \mathbf{J}} J = \emptyset$, и сократимой в противном случае.

1.3. Абстрактные симплициальные комплексы

Пусть вновь $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$ — конечное семейство конечных, непустых и попарно различных множеств. Напомним, что множество B называется системой представителей для семейства \mathcal{A} , если для всех $i \in [\alpha]$ выполняется $B \cap A_i \neq \emptyset$. В семействе систем представителей для \mathcal{A} выделяют блокатор $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ этого семейства, то есть семейство всех минимальных (по включению) систем представителей для \mathcal{A} . Множество B , по определению, принадлежит блокатору $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) B — система представителей для \mathcal{A} ; 2) для любого элемента $b \in B$ найдется такой индекс $j \in [\alpha]$, что $(B - \{b\}) \cap A_j = \emptyset$.

Напомним также, что семейство \mathcal{A} называется семейством Шпернера, если для всех индексов $i, j \in [\alpha]$, $i \neq j$, выполняется условие $A_i \not\subseteq A_j$.

Следующий результат является одним из ключевых инструментов исследований в дискретной математике (доказательство приводится в [180, 224, 225]).

Утверждение 1.1. *Если \mathcal{A} — семейство Шпернера, то*

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{B}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}.$$

Отметим, что основное свойство блокаторов, сформулированное в Утверждении 1.1, дополняет наблюдение (1.16), сделанное по отношению к семействам мультииндексов минимальных несовместных и максимальных совместных подсистем несовместных монотонных систем условий, двойственным результатом:

$$\mathbf{J} = \mathfrak{B}(\mathbf{I})^\perp. \quad (1.17)$$

Если Δ — абстрактный симплициальный комплекс и $F \in \Delta$, то размерность $\dim(F)$ грани F , по определению, на единицу меньше ее мощности: $\dim(F) = |F| - 1$. Размерность $\dim \Delta$ комплекса Δ — это величина $\max\{\dim F : F \in \Delta\}$. $f_j(\Delta)$ обозначает количество граней Δ размерности j . Упорядоченную совокупность чисел $f_j(\Delta)$ называют f -вектором комплекса Δ . По определению, $f_{-1}(\Delta) = 1$, и $f_0(\Delta)$ — это количество вершин комплекса Δ . $\#\Delta$ обозначает общее количество граней комплекса Δ .

Если A — некоторое подмножество множества $[m]$, то обозначим через A^\perp его дополнение $[m] - A$, и для покрытия $\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$ множества $[m] = \bigcup_{i=1}^\alpha A_i$ мы будем, как и прежде, обозначать через \mathcal{A}^\perp соответствующее семейство дополнений $\mathcal{A}^\perp := \{A_1^\perp, A_2^\perp, \dots, A_\alpha^\perp\}$.

Рассматривая абстрактный симплициальный комплекс $\Delta(\mathcal{A})$ с семейством гиперграней \mathcal{A} , и отвечающий ему порядковый идеал $\mathfrak{I}(\mathcal{A})$ булевой решетки $\mathbb{B}(m)$, часто оказывается удобным исследовать структуру не непосредственно дополнения $\mathbb{B}(m) - \mathfrak{I}(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{B}(\mathcal{A}^\perp))$, а тесно связанного с ним объекта $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}(\mathcal{A}^\perp))^\perp$; последний представляет собой ч.у. множество граней симплициального комплекса с гипергранями, являющимися дополнениями до множества $[m]$ минимальных систем представителей для семейства \mathcal{A}^\perp . Итак, исследование пары $(\Delta(\mathcal{A}), \mathbf{2}^{[m]} - \Delta(\mathcal{A}))$ чаще всего заменяют исследованием пары симплициальных комплексов

$$(\Delta(\mathcal{A}), \Delta(\mathfrak{B}(\mathcal{A}^\perp)^\perp)); \quad (1.18)$$

здесь $\Delta(\mathfrak{B}(\mathcal{A}^\perp)^\perp) = (\mathbf{2}^{[m]} - \Delta(\mathcal{A}))^\perp$.

С точки зрения комбинаторной топологии, семейство множеств $\Delta(\mathfrak{B}(\mathcal{A}^\perp)^\perp)$ — это комплекс, двойственный к комплексу $\Delta(\mathcal{A})$ по Александру.

Если отвлечься от ключевого аспекта представительности множеств, характеризующей связь между семействами (1.18), двойственные по Александру комплексы традиционно определяют следующим образом:

Если $\Delta \subsetneq \mathbf{2}^{[m]}$ — абстрактный симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, то комплекс Δ^\vee , двойственный к Δ по Александру, — это семейство

$$\Delta^\vee := \{G^\perp : G \subseteq [m], G \notin \Delta\}.$$

Таким образом, для шпернерова покрытия \mathcal{A} множества $[m]$ такого, что $\mathcal{A} \neq \{[m]\}$, мы имеем $\Delta(\mathcal{A})^\vee = \Delta(\mathfrak{B}(\mathcal{A}^\perp)^\perp)$.

Следующее простое наблюдение связано с тем, что количество элементов ранга j (или, на языке комбинаторной теории ч.у. множеств, j -ое число Уитни второго рода), соответствующих подмножествам мощности j множества $[m]$ в булевой решетке $\mathbb{B}(m)$, есть биномиальный коэффициент $\binom{m}{j} := \frac{m!}{j!(m-j)!}$.

Утверждение 1.2. Пусть $\Delta \subsetneq \mathbf{2}^{[m]}$ — абстрактный симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Тогда для всех j , $-1 \leq j \leq m-1$, выполняется $f_j(\Delta) + f_{m-j-2}(\Delta^\vee) = \binom{m}{j+1}$.

Это наблюдение позволяет сделать несколько выводов. В формулировке первого из них мы используем δ -символ Кронекера $\delta(s, t)$, равный, по определению, 1, если $s = t$, и равный 0 в противном случае. Речь идет о том, что количества граней всевозможных размерностей комплекса Δ^\vee определяют размерность комплекса Δ .

Следствие 1.1. Пусть $\Delta \subsetneq \mathbf{2}^{[m]}$ — абстрактный симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Тогда

$$\begin{aligned} \dim(\Delta) &= m - \sum_{j=-1}^{m-1} \delta\left(f_j(\Delta^\vee), \binom{m}{j+1}\right) - 1 \\ &= m - \max\{i \in \{0\} \dot{\cup} [m] : f_{i-1}(\Delta^\vee) = \binom{m}{i}\} - 2. \end{aligned}$$

Общее количество граней в рассматриваемом разбиении равно количеству множеств в булеане $\mathbf{2}^{[m]}$, а именно $\#\Delta + \#\Delta^\vee = 2^m$.

Обозначим количества всех совместных и несовместных подсистем мощности k несовместной монотонной системы \mathfrak{S} через ν_k и τ_k соответственно.

Имеем

$$\nu_k + \tau_k = f_{k-1}(\Delta(\mathbf{J})) + f_{m-k-1}(\Delta(\mathbf{I}^\perp)) = \binom{m}{k}$$

для всех $k \in [m]$, и $\#\Delta(\mathbf{J}) + \#\Delta(\mathbf{I}^\perp) = 2^m$.

Если говорить о комбинаторных механизмах точного подсчета количества граней комплекса с известной структурой семейства гиперграней, то следует напомнить, что комбинаторный принцип включения-исключения формулируется в одном из своих многочисленных вариантов следующим образом.

– Количество $N_k(\mathcal{A})$ k -подмножеств множества $[m]$, содержащих в качестве подмножества по меньшей мере одно из множеств $A_i \in \mathcal{A}$, равно

$$N_k(\mathcal{A}) = - \sum_{j \in [\alpha]} (-1)^j \cdot \sum_{\substack{T \subseteq [\alpha]: \\ |T|=j}} \binom{m - |\bigcup_{t \in T} A_t|}{m - k}; \quad (1.19)$$

– количество $N_k(\mathcal{A}^\perp)$ k -подмножеств множества $[m]$, содержащих в качестве подмножества по меньшей мере одно из множеств $A_i^\perp \in \mathcal{A}^\perp$, равно

$$N_k(\mathcal{A}^\perp) = - \sum_{j \in [\alpha]} (-1)^j \cdot \sum_{\substack{T \subseteq [\alpha]: \\ |T|=j}} \binom{|\bigcap_{t \in T} A_t|}{m - k}; \quad (1.20)$$

– количество $R_k(\mathcal{A})$ k -подмножеств множества $[m]$, содержащихся хотя бы в одном из множеств семейства $\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$, равно

$$R_k(\mathcal{A}) = - \sum_{j \in [\alpha]} (-1)^j \cdot \sum_{\substack{T \subseteq [\alpha]: \\ |T|=j}} \binom{|\bigcap_{t \in T} A_t|}{k}; \quad (1.21)$$

– количество $R_k(\mathcal{A}^\perp)$ k -подмножеств множества $[m]$, содержащихся хотя бы в одном из множеств $A_i^\perp \in \mathcal{A}^\perp$, равно

$$R_k(\mathcal{A}^\perp) = - \sum_{j \in [\alpha]} (-1)^j \cdot \sum_{\substack{T \subseteq [\alpha]: \\ |T|=j}} \binom{m - |\bigcup_{t \in T} A_t|}{k}. \quad (1.22)$$

Если строение семейства \mathbf{J} мультииндексов МСП или семейства \mathbf{I} мультииндексов МНП системы \mathfrak{S} известно, то принцип включения-исключения

(см. [1, 6, 95, 134, 141]) позволяет вычислить количество ν_k всех совместных подсистем мощности k и количество τ_k всех несовместных подсистем мощности k .

Воспользуемся соотношениями (1.19) и (1.21). Учитывая, что всякая совместная подсистема содержится по меньшей мере в одной МСП, и всякая несовместная подсистема содержит по меньшей мере одну МНП, приходим к заключению.

Утверждение 1.3. Пусть \mathfrak{S} — конечная несовместная монотонная система условий, \mathbf{I} и \mathbf{J} — семейства мультииндексов ее МНП и МСП соответственно. Пусть τ_k и ν_k — количества несовместных и совместных подсистем мощности k , соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}\tau_k &= \binom{m}{k} - \nu_k = - \sum_{s \in [\#\mathbf{I}]} (-1)^s \cdot \sum_{\substack{T \subseteq [\#\mathbf{I}]: \\ |T|=s}} \binom{m - |\bigcup_{t \in T} I_t|}{m - k}, \\ \nu_k &= \binom{m}{k} - \tau_k = - \sum_{s \in [\#\mathbf{J}]} (-1)^s \cdot \sum_{\substack{T \subseteq [\#\mathbf{J}]: \\ |T|=s}} \binom{|\bigcap_{t \in T} J_t|}{k}.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Если количества τ_k и ν_k известны, то Следствие 1.1 позволяет определить для системы \mathfrak{S} экстремальные размеры ее МНП и МСП.

Утверждение 1.4. Пусть \mathfrak{S} — конечная несовместная монотонная система условий. Наименьшая среди мощностей МНП есть

$$\begin{aligned}\min_{I \in \mathbf{I}} |I| &= \sum_{t=0}^m \delta(\nu_t, \binom{m}{t}) = \\ &= \max \left\{ k \in \{0\} \dot{\cup} [m] : \nu_k = \binom{m}{k} \right\} + 1.\end{aligned}$$

Наибольшая среди мощностей МСП есть

$$\begin{aligned}\max_{J \in \mathbf{J}} |J| &= m - \sum_{t=0}^m \delta(\tau_{m-t}, \binom{m}{t}) = \\ &= m - \max \left\{ k \in \{0\} \dot{\cup} [m] : \tau_{m-k} = \binom{m}{k} \right\} - 1.\end{aligned}$$

Теперь обсудим кратко некоторые комбинаторные характеристики гиперграфов, сопоставленных с простыми графами посредством систем представителей.

Пусть $\mathbf{H}([m], \mathcal{A})$ — гиперграф с множеством вершин $[m]$ и семейством гиперребер $\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$. Как обычно, $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ обозначает блокатор семейства \mathcal{A} . Каким должен быть гиперграф $\mathbf{H}([m], \mathcal{A})$, чтобы гиперграф $\mathbf{H}([m], \mathfrak{B}(\mathcal{A}))$ являлся конечным простым графом? Для ответа на этот вопрос понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 1.5. *Если семейство \mathcal{A} — семейство Шпернера, то $\bigcap_{E \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})} E = \emptyset$ тогда и только тогда, когда семейство \mathcal{A} не содержит одноэлементные множества.*

Доказательство. Обозначим семейство $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ через \mathcal{E} . В силу Утверждения 1.1, $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathcal{E})$.

Докажем достаточность. Так как $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E = \emptyset$, то ни один элемент x из $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ не является системой представителей для \mathcal{E} , то есть \mathcal{A} не содержит одноэлементные множества.

Докажем необходимость. Предположим противное, то есть $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E =: X \neq \emptyset$. Тогда любое одноэлементное подмножество $\{x\} \subseteq X$ является минимальной системой представителей для \mathcal{E} , то есть $\{x\} \in \mathcal{A}$, что противоречит условию. \square

Выясним, каким условиям должно удовлетворять семейство множеств \mathcal{A} , чтобы размерность комплекса $\Delta(\mathfrak{B}(\mathcal{A})^\perp)$ не превышала заданной величины или, напротив, была больше заданной величины.

Согласно Следствию 1.1,

$$\dim \Delta(\mathfrak{B}(\mathcal{A})^\perp) = m - \sum_{j=-1}^{m-1} \delta \left(f_j \left(\Delta(\mathcal{A}^\perp) \right), \binom{m}{j+1} \right) - 1.$$

Если эта размерность не должна превышать k , то должно выполняться соотношение

$$\sum_{j=-1}^{m-1} \delta \left(f_j \left(\Delta(\mathcal{A}^\perp) \right), \binom{m}{j+1} \right) \geq m - k - 1.$$

С другой стороны, если $\dim \Delta(\mathfrak{B}(\mathcal{A})^\perp) > k$, то должно выполняться соотношение

$$\sum_{j=-1}^{m-1} \delta \left(f_j (\Delta(\mathcal{A}^\perp)), \binom{m}{j+1} \right) < m - k - 1.$$

Объединим приведенные соображения в следующее утверждение:

Утверждение 1.6. *Если \mathcal{A} — семейство непустых, конечных и попарно различных множеств, покрывающих множество $[m]$, то для фиксированного k выполнены соотношения:*

- 1) *Если для всех j , $-1 \leq j \leq m - k - 3$, выполняется $f_j (\Delta(\mathcal{A}^\perp)) = \binom{m}{j+1}$, то $\dim \Delta(\mathfrak{B}(\mathcal{A})^\perp) \leq k$. В частности, если равенство выполнено для всех j , $-1 \leq j \leq m - 4$, то комплекс $\Delta(\mathfrak{B}(\mathcal{A})^\perp)$ является простым графом (возможно, с изолированными вершинами).*
- 2) *Если $f_{m-k-3} (\Delta(\mathcal{A}^\perp)) < \binom{m}{k+2}$, то $\dim \Delta(\mathfrak{B}(\mathcal{A})^\perp) > k$.*

Методы исследования несовместных систем в контексте абстрактных симплициальных комплексов лежат в основе математического обеспечения вычислительного комплекса. В последующих главах разрабатываются методы математического моделирования и алгоритмы численного решения задач подсчета МСП и МНП системы, а также задач выделения всех МСП и МНП. Алгоритмы численного решения также лежат в основе математического обеспечения, а их программная реализация является одной из компонент прикладного программного обеспечения.

Выводы по Главе 1

Основными задачами Главы 1 являлись введение общего определения несовместной монотонной системы условий, описание основных классов моделей несовместных систем, исследуемых в диссертационной работе, а также рассмотрение наиболее общих комбинаторных свойств несовместных систем условий.

Выводы по Главе 1.

1. Предложена структурная схема вычислительного комплекса, для которого в работе разрабатывается математическое и программное обеспечение.
2. Введено аксиоматическое определение монотонных несовместных систем условий общего вида.

3. Рассмотрены основные классы моделей несовместных систем условий: абстрактные симплициальные комплексы, системы независимости, монотонные булевы функции, несовместные системы линейных неравенств и их взаимосвязи. Рассмотрены общие утверждения о комбинаторных свойствах абстрактных симплициальных комплексов.

4. Установлена взаимосвязь исследуемых задач анализа несовместных систем с задачей распознавания образов в геометрической постановке и с задачей расшифровки монотонных булевых функций. Эти результаты используются (в Главе 5 диссертационной работы) при рассмотрении различных классов прикладных задач анализа несовместных систем.

2. Теоретико–графовые методы математического моделирования несовместных систем

Главы 2, 3 и 4 посвящены разработке компонент математического обеспечения (МО) вычислительного комплекса — математических моделей для исследования задач анализа несовместных систем и алгоритмов их численного решения.

В Главе 2 исследуются различные классы несовместных систем условий и разрабатываются теоретико–графовые методы математического моделирования несовместных систем условий.

Во многих задачах комбинаторной оптимизации требуется выделить в абстрактном симплициальном комплексе гипергрань или совокупность гиперграней с теми или иными свойствами, например, с наибольшим числом элементов. Как было показано в Главе 1, одной из компонент математического обеспечения вычислительного комплекса являются методы исследования несовместных систем в контексте абстрактных симплициальных комплексов. При этом мультииндексы (или помечаемые ими конструкции) совместных подсистем составляют грани симплициальных комплексов. В связи с этим представляет интерес изучение структурных свойств семейства гиперграней комплекса и, в частности, изучение связанного с ним специфического графа, который описывает покрытия множества вершин комплекса парами гиперграней. Для этой конструкции в работе впервые вводится понятие графа системы независимости, которое является обобщением понятия графа максимальных совместных подсистем (граф МСП).

В алгоритмическом плане интересны ситуации, когда графы систем независимости связны, поскольку связность таких графов может быть эффективно использована при построении алгоритмов выделения семейств гиперграней. В этой связи исследуются комбинаторные свойства графов систем независимости для различных классов несовместных систем условий. Получены достаточные условия связности таких графов.

Особое внимание уделяется исследованию связности графов, доставляемых специфическими классами комплексов — графов МСП конечных несовместных систем линейных неравенств. Для таких графов исследуются более сильные типы связности, а также получены локальные его свойства

такие, как оценки смежных вершин и оценки диаметра. Доказана важная теорема о существовании в графе МСП цикла нечетной длины. Полученные результаты используются далее в Главе 4 при построении алгоритмов решения задач анализа несовместных систем линейных неравенств, играющих важную роль при решении прикладных задач распознавания образов в геометрической постановке.

Отметим, что эти алгоритмы разрабатываются в последующих главах и являются одной из компонент МО вычислительного комплекса.

2.1. Граф системы независимости

Для удобства дальнейшего изложения обозначим через (V, Δ) абстрактный симплицальный комплекс Δ , с семейством гиперграней $\mathbf{max} \Delta$, на множестве вершин $V := \bigcup_{H \in \mathbf{max} \Delta} H$.

Определение 2.1. *Графом системы независимости $ISG(V, \Delta)$ называется простой граф, определяемый следующим образом:*

- множеством вершин графа $ISG(V, \Delta)$ является семейство гиперграней $\mathbf{max} \Delta$;
- семейством ребер графа $ISG(V, \Delta)$ является семейство всех неупорядоченных пар гиперграней $\{H, H'\} \subseteq \mathbf{max} \Delta$, покрывающих множество вершин:

$$H \cup H' = V .$$

Обозначим через $\overrightarrow{ISG}(V, \Delta)$ ориентированный граф системы независимости, с множеством вершин $\mathbf{max} \Delta$ и семейством дуг $\vec{\mathcal{E}}$, полученный из графа $(\mathbf{max} \Delta, \mathcal{E}) := ISG(V, \Delta)$ заданием некоторой ориентации каждого ребра из семейства \mathcal{E} .

Для двух комплексов (V, Δ) и (V', Δ') отображение $\varphi: V \rightarrow V'$ множества их вершин называется гомоморфизмом (или симплицальным отображением), если образ $\varphi(F)$ каждой грани $F \in \Delta$ является гранью в Δ' , то есть $\varphi(F) \in \Delta'$. Если существует биективный гомоморфизм $\mathbf{i}: V \rightarrow V'$ такой, что обратное отображение $\mathbf{i}^{-1}: V' \rightarrow V$ также является гомоморфизмом, то комплексы (V, Δ) и (V', Δ') называются изоморфными, а отображение \mathbf{i} — изоморфизмом. Если

комплексы (V, Δ) и (V', Δ') изоморфны, то будем отмечать это с помощью записи $(V, \Delta) \simeq (V', \Delta')$.

Поскольку простые графы являются абстрактными симплициальными комплексами, те же определения относятся и к ним: отображение φ множества вершин простого графа \mathbf{G} в множество вершин простого графа \mathbf{G}' называется гомоморфизмом, если образы вершин любого ребра из графа \mathbf{G} при отображении φ являются вершинами ребра в графе \mathbf{G}' или совпадают. Гомоморфизм i графов \mathbf{G} и \mathbf{G}' называется изоморфизмом, если он взаимно однозначен, и обратное отображение i^{-1} также является гомоморфизмом; при выполнении указанных условий графы \mathbf{G} и \mathbf{G}' называются изоморфными.

Изоморфным комплексам (V, Δ) и (V', Δ') , очевидно, соответствуют изоморфные графы $\text{ISG}(V, \Delta)$ и $\text{ISG}(V', \Delta')$.

Утверждение 2.1. *Если существует сюръективный гомоморфизм $\varphi: V \rightarrow V'$ комплекса (V, Δ) в комплекс (V', Δ') , то существует гомоморфизм графа $\text{ISG}(V, \Delta)$ в граф $\text{ISG}(V', \Delta')$.*

Доказательство. Если комплекс (V, Δ) — булеан 2^V множества V , то соответствующий граф системы независимости $\text{ISG}(V, \Delta)$ — изолированная вершина $\{V\}$, а комплекс (V', Δ') представляет собой булеан $2^{V'}$, поскольку $\varphi(V) = V' \in \Delta'$ и, значит, граф $\text{ISG}(V', \Delta')$ — изолированная вершина $\{V'\}$; в этом случае единственным гомоморфизмом $\text{ISG}(V, \Delta) \rightarrow \text{ISG}(V', \Delta')$ является отображение $\{V\} \mapsto \{V'\}$.

Предположим, что (V, Δ) не является булеаном 2^V , то есть граф $\text{ISG}(V, \Delta)$ имеет несколько вершин. Для каждой гиперграны $H \in \mathbf{max} \Delta$ выберем произвольную гипергрань $\gamma(H) \in \mathbf{max} \Delta'$ комплекса Δ' такую, что $\gamma(H) \supseteq \varphi(H)$, определив тем самым некоторое отображение $\gamma: \mathbf{max} \Delta \rightarrow \mathbf{max} \Delta'$ семейств гиперграней рассматриваемых комплексов.

– Если граф $\text{ISG}(V, \Delta)$ является безреберным, то отображение γ — его гомоморфизм в граф $\text{ISG}(V', \Delta')$.

– Если граф $\text{ISG}(V, \Delta)$ не является безреберным, то для каждого его ребра $\{H_1, H_2\}$ имеем $\gamma(H_1) \cup \gamma(H_2) \supseteq \varphi(H_1) \cup \varphi(H_2) = \varphi(H_1 \cup H_2) = \varphi(V) = V'$, что означает

$$\gamma(H_1) \cup \gamma(H_2) = V' ,$$

то есть,

- либо $\gamma(H_1) = \gamma(H_2)$, комплекс Δ' — булеан $2^{V'}$ множества V' и граф $\text{ISG}(V', \Delta')$ представляет собой изолированную вершину $\{V'\}$,
- либо $\{\gamma(H_1), \gamma(H_2)\}$ — ребро графа $\text{ISG}(V', \Delta')$, связанного с комплексом (V', Δ') , отличным от булеана $2^{V'}$,

вследствие чего отображение γ есть гомоморфизм $\text{ISG}(V, \Delta)$ в $\text{ISG}(V', \Delta')$. \square

Рассмотрим вопрос о представлении произвольного графа в виде графа системы независимости.

Утверждение 2.2. *Всякий конечный простой граф \mathbf{G} изоморфен некоторому графу системы независимости.*

Доказательство. Если граф \mathbf{G} представляет собой изолированную вершину, то он изоморфен графу системы независимости $(V, 2^V)$ для любого непустого конечного множества V .

Пусть $\overline{\mathbf{G}} := (V, \mathcal{E})$ — граф с множеством вершин V , $|V| > 1$, и множеством ребер \mathcal{E} , дополнительный к графу \mathbf{G} . Рассмотрим объединенную совокупность $A := V \cup \mathcal{E}$ вершин и ребер, то есть семейство непустых граней комплекса $\overline{\mathbf{G}}$, и обозначим через A_v множество A после удаления из него вершины v и всех инцидентных ей ребер (при этом вершины указанных ребер, отличные от v , не удаляются). Для любых двух различных вершин v и u графа $\overline{\mathbf{G}}$, множества A_v и A_u несравнимы по включению, так как $v \in A_u - A_v$ и $u \in A_v - A_u$; иными словами, $\{A_v : v \in V\}$ — семейство Шпернера.

Определим систему независимости (A, Δ) на множестве вершин A следующим образом: некоторая совокупность $F \subseteq A$ вершин и ребер графа $\overline{\mathbf{G}}$ является гранью комплекса (A, Δ) , $F \in \Delta$, тогда и только тогда, когда найдется вершина $w \in V$, для которой $F \subseteq A_w$; то есть (A, Δ) — комплекс с семейством гиперграней $\mathbf{max} \Delta = \{A_v : v \in V\}$, причем $\#\mathbf{max} \Delta = |V|$. Две различные гиперграни A_u и A_v комплекса (A, Δ) покрывают множество A тогда и только тогда, когда пара $\{u, v\}$ не является ребром графа $\overline{\mathbf{G}}$, $\{u, v\} \notin \mathcal{E}$. Таким образом, отображение $V \rightarrow \mathbf{max} \Delta$, $v \mapsto A_v$ — изоморфизм графа \mathbf{G} в граф системы независимости $\text{ISG}(A, \Delta)$, что и доказывает утверждение. \square

Следствие 2.1. *Всякий конечный простой граф $\mathbf{G} = (V, \mathcal{E})$ с множеством вершин V и семейством ребер \mathcal{E} является графом системы независимости $\text{ISG}(A, \Delta)$, связанным с некоторым комплексом (A, Δ) , причем $2|A| \leq |V|^2 + |V| - 2\#\mathcal{E}$.*

На семействе упорядоченных пар подмножеств непустого конечного множества V введем отношение частичного порядка: $(V_1, V_2) \preceq (V'_1, V'_2)$, если $V_1 \subseteq V'_1$ и $V_2 \subseteq V'_2$ или $V_1 \subseteq V'_2$ и $V_2 \subseteq V'_1$.

Утверждение 2.3. Пусть задан комплекс (V, Δ) , чей граф системы независимости $(\mathbf{max} \Delta, \mathcal{E}) := \text{ISG}(V, \Delta)$ удовлетворяет условию $\#\mathcal{E} > 1$. Если существует разбиение семейства ребер $\mathcal{E} = \mathcal{C} \dot{\cup} \mathcal{D}$ на непустые подсемейства \mathcal{C} и \mathcal{D} , при котором никакое ребро из \mathcal{C} не инцидентно никакому ребру из \mathcal{D} , то не существуют дуги $\vec{c} \in \vec{\mathcal{C}}$ и $\vec{d} \in \vec{\mathcal{D}}$ ориентированного графа $(\mathbf{max} \Delta, \vec{\mathcal{E}}) := \overrightarrow{\text{ISG}}(V, \Delta)$ и непустые подмножества вершин $V_1, V_2 \subseteq V$ такие, что $V_1 \cup V_2 = V$ и $\vec{c} \succeq (V_1, V_2) \preceq \vec{d}$.

Доказательство. Предположим противное: пусть найдутся дуги $\vec{c} = (C_1, C_2) \in \vec{\mathcal{C}}$, $\vec{d} = (D_1, D_2) \in \vec{\mathcal{D}}$ графа $\overrightarrow{\text{ISG}}(V, \Delta)$ и непустые подмножества $V_1, V_2 \subseteq V$ такие, что $V_1 \cup V_2 = V$ и $\vec{c} \succeq (V_1, V_2) \preceq \vec{d}$. Не теряя общности, будем считать, что $C_1 \supseteq V_1$, $C_2 \supseteq V_2$, и $V_1 \subseteq D_1$, $V_2 \subseteq D_2$. Поскольку V_1 и V_2 покрывают множество V , то тем более, $C_1 \cup D_2 = V$ и, значит, $e := \{C_1, D_2\} \in \mathcal{E}$. Предположим для определенности, что $e \in \mathcal{C}$. Тогда $e \cap d = \{D_2\}$, то есть ребра $e \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ в графе $\text{ISG}(V, \Delta)$ инцидентны, в противоречии с условием. \square

Пусть задано некоторое конечное непустое мультисемейство $V := \{v_i := (X_i, X'_i) : i \in [m]\}$ упорядоченных пар подмножеств непустого множества X . Введем на этом мультисемействе операцию пересечения пар подмножеств: $(X_{i_1}, X'_{i_1}) \cap (X_{i_2}, X'_{i_2}) := (X_{i_1} \cap X_{i_2}, X'_{i_1} \cap X'_{i_2})$.

Рассмотрим комплекс (V, Δ_\cap) , в котором, по определению,

$$F \in \Delta_\cap \iff \bigcap_{v \in F} v \neq (\emptyset, \emptyset). \quad (2.1)$$

Обратимся к графам систем независимости, чья связность индуцируется связностью топологических пространств. Следует отметить, что связность — одна из важнейших сторон описания графов произвольной природы (см., например, [11, 68, 69, 83, 96, 136, 145, 155, 177]).

Утверждение 2.4. Пусть V — некоторое конечное мультисемейство упорядоченных пар $v_i := (\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}'_i)$, $i \in [m]$, замкнутых подмножеств $\mathbf{Z}_i \subseteq \mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}'_i \subseteq \mathbf{Z}$ связного топологического пространства \mathbf{Z} , покрывающих пространство: $\mathbf{Z}_i \cup \mathbf{Z}'_i = \mathbf{Z}$.

Если $\#\mathbf{max} \Delta_\cap > 1$, то граф системы независимости $\text{ISG}(V, \Delta_\cap)$ связан.

Доказательство. Покажем сначала, что граф $(\mathbf{max} \Delta_\cap, \mathcal{E}) := \text{ISG}(V, \Delta_\cap)$ не содержит изолированных вершин. Пусть $H \in \mathbf{max} \Delta_\cap$ — произвольная гипергрань рассматриваемого комплекса. Поскольку $H \in \Delta_\cap$, имеем $(\mathbf{A}, \mathbf{A}') := \bigcap_{v \in H} v \neq (\emptyset, \emptyset)$, по соглашению (2.1). Пусть, для определенности, $\mathbf{A} \neq \emptyset$. Зафиксируем некоторый элемент $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$. Из максимальности H следует, что для всякой пары $(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}'_i) \in V - H$, имеем $\mathbf{a} \notin \mathbf{Z}_i$ и, поскольку $\mathbf{Z}_i \cup \mathbf{Z}'_i = \mathbf{Z}$, то выполнено включение $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}'_i$, то есть $V - H \in \Delta_\cap$. Таким образом, найдется гипергрань $H' \in \mathbf{max} \Delta_\cap$, $H' \supseteq V - H$, такая, что $H \cup H' = V$, то есть вершина H в графе $\text{ISG}(V, \Delta_\cap)$ не изолирована. Если $\#\mathbf{max} \Delta_\cap = 2$, то доказательство завершено.

Предположим, что $\#\mathbf{max} \Delta_\cap > 2$ и, как следствие, $\#\mathcal{E} > 1$.

Будем использовать ориентированный граф $(\mathbf{max} \Delta_\cap, \vec{\mathcal{E}}) := \overrightarrow{\text{ISG}}(V, \Delta_\cap)$ системы независимости (V, Δ_\cap) с множеством вершин $\mathbf{max} \Delta_\cap$ и семейством дуг $\vec{\mathcal{E}}$, представляющих собой произвольным образом упорядоченные пары концевых вершин ребер графа $\text{ISG}(V, \Delta_\cap)$.

Свяжем с произвольным элементом $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ грани $F_{\mathbf{z}} \subset V$ и $F'_{\mathbf{z}} \subset V$ комплекса Δ_\cap , определяемые следующим образом: $F_{\mathbf{z}} := \{(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}'_i) \in V : \mathbf{z} \in \mathbf{Z}_i\}$ и $F'_{\mathbf{z}} := \{(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}'_i) \in V : \mathbf{z} \in \mathbf{Z}'_i\}$. Заметим, что они формируют покрытие $F_{\mathbf{z}} \cup F'_{\mathbf{z}}$ множества вершин V комплекса Δ_\cap .

Таким образом, для элемента $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ найдется дуга $\vec{e} := (H, H') \in \vec{\mathcal{E}}$, для которой

$$F_{\mathbf{z}} \subseteq H \in \mathbf{max} \Delta_\cap \quad \text{и} \quad F'_{\mathbf{z}} \subseteq H' \in \mathbf{max} \Delta_\cap,$$

либо

$$F_{\mathbf{z}} \subseteq H' \in \mathbf{max} \Delta_\cap \quad \text{и} \quad F'_{\mathbf{z}} \subseteq H \in \mathbf{max} \Delta_\cap,$$

то есть

$$(F_{\mathbf{z}}, F'_{\mathbf{z}}) \preceq \vec{e}. \quad (2.2)$$

Предположим, что граф $\text{ISG}(V, \Delta_\cap)$, без изолированных вершин, не связан, то есть существует такое разбиение $\mathcal{E} = \mathcal{C} \dot{\cup} \mathcal{D}$ семейства его ребер на непустые подсемейства \mathcal{C} и \mathcal{D} , что никакое ребро из \mathcal{C} не инцидентно никакому ребру из \mathcal{D} .

В пространстве \mathbf{Z} выделим его подмножества:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &:= \{z \in \mathbf{Z} : \exists \vec{c} \in \vec{\mathcal{C}}, (F_z, F'_z) \preceq \vec{c}\}, \\ \mathbf{Y}' &:= \{z \in \mathbf{Z} : \exists \vec{d} \in \vec{\mathcal{D}}, (F_z, F'_z) \preceq \vec{d}\}. \end{aligned}$$

Из (2.2) и из того, что $\mathcal{E} = \mathcal{C} \dot{\cup} \mathcal{D}$, следует

$$\mathbf{Y} \cup \mathbf{Y}' = \mathbf{Z}. \quad (2.3)$$

Далее, имеем $\mathbf{Y} \cap \mathbf{Y}' = \emptyset$, так как иначе для любого элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{Y} \cap \mathbf{Y}'$ найдутся такие дуги $\vec{c} \in \vec{\mathcal{C}}$ и $\vec{d} \in \vec{\mathcal{D}}$, что $\vec{c} \succeq (F_{\mathbf{x}}, F'_{\mathbf{x}}) \preceq \vec{d}$, в противоречии с Утверждением 2.3.

Для произвольного подмножества $U \subseteq V$ множества вершин комплекса Δ_{\cap} определим подмножества

$$\mathbf{T}(U) := \bigcap_{\substack{\mathbf{z}_i \subseteq \mathbf{Z}: \\ (\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i) \in U}} \mathbf{z}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{T}'(U) := \bigcap_{\substack{\mathbf{z}'_i \subseteq \mathbf{Z}: \\ (\mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i) \in U}} \mathbf{z}'_i$$

пространства \mathbf{Z} , причем $\mathbf{T}(\emptyset) = \mathbf{T}'(\emptyset) := \mathbf{Z}$. Покажем, что

$$\mathbf{Y} = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{Y}} (\mathbf{T}(F_{\mathbf{x}}) \cap \mathbf{T}'(F'_{\mathbf{x}})). \quad (2.4)$$

Для этого достаточно показать, что

$$\mathbf{T}(F_{\mathbf{x}}) \cap \mathbf{T}'(F'_{\mathbf{x}}) \subseteq \mathbf{Y} \quad (2.5)$$

для произвольного элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}$.

Пусть включение (2.5) не выполняется для некоторого элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{Y}$. Тогда найдется элемент $\mathbf{b} \in \mathbf{Y}' \cap \mathbf{T}(F_{\mathbf{a}}) \cap \mathbf{T}'(F'_{\mathbf{a}})$. Следовательно, найдутся такие дуги $\vec{c} \in \vec{\mathcal{C}}$ и $\vec{d} \in \vec{\mathcal{D}}$, что $\vec{d} \succeq (F_{\mathbf{b}}, F'_{\mathbf{b}}) \succeq (F_{\mathbf{a}}, F'_{\mathbf{a}}) \preceq \vec{c}$, в противоречии с Утверждением 2.3. Следовательно, соотношения (2.4) и (2.5) верны. Из замкнутости множеств $\mathbf{T}(U)$ и $\mathbf{T}'(U)$ для $U \subseteq V$ и конечности V , а также с учетом (2.4)), получаем, что \mathbf{Y} также замкнуто. Покажем, что $\mathbf{Y} \neq \emptyset$. Пусть $\vec{c} := (H_1, H_2) \in \vec{\mathcal{C}} \neq \emptyset$. Имеем $(\mathbf{A}, \mathbf{A}') := \bigcap_{v \in H_1} v \neq (\emptyset, \emptyset)$. Положим, для

определенности, $\mathbf{A} \neq \emptyset$, и выберем некоторый элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$. Тогда

$$F_{\mathbf{x}} = H_1 . \quad (2.6)$$

Из максимальности H_1 следует, что для $(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}'_i) \in V - H_1$ имеем $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}'_i$, то есть

$$F'_{\mathbf{x}} \supseteq V - H_1 . \quad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) следует

$$(F_{\mathbf{x}}, F'_{\mathbf{x}}) \succeq (H_1, V - H_1) . \quad (2.8)$$

Предположим, что $\mathbf{Y} = \emptyset$. Поскольку $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Y}' = \mathbf{Z}$, то $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}'$. По определению множества \mathbf{Y}' , найдется дуга $\vec{d} \in \vec{\mathcal{D}}$ такая, что $(F_{\mathbf{x}}, F'_{\mathbf{x}}) \preceq \vec{d}$. Тогда, с учетом (2.8), получаем

$$\vec{\mathcal{C}} \ni \vec{c} := (H_1, H_2) \succeq (H_1, V - H_1) \preceq (F_{\mathbf{x}}, F'_{\mathbf{x}}) \preceq \vec{d} \in \vec{\mathcal{D}} ,$$

в противоречии с Утверждением 2.3. Следовательно, $\mathbf{Y} \neq \emptyset$.

Аналогичным образом можно показать, что множество \mathbf{Y}' непусто и замкнуто. Таким образом, связное пространство \mathbf{Z} разбито на два непустых непересекающихся замкнутых подмножества \mathbf{Y} и \mathbf{Y}' , — полученное таким образом противоречие доказывает слабую связность ориентированного графа системы независимости $\overline{\text{ISG}}(V, \Delta_{\cap})$, а значит, и связность подстилающего его неориентированного графа $\text{ISG}(V, \Delta_{\cap})$, завершая доказательство. \square

Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{Z}) := \{f_i : i \in [m]\}$, $m > 1$, — конечная система вещественных непрерывных функций $f_i : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ над связным топологическим пространством \mathbf{Z} . Рассмотрим три класса комплексов Δ_{\geq} , $\bar{\Delta}$ и $\Delta_{>}$, на множестве вершин $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$, определяемых посредством своих непустых граней F , следующим образом:

– $F \in (\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{\geq})$ тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_{f \in F} \{(\alpha_f, \mathbf{z}) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbf{Z} : \alpha_f f(\mathbf{z}) \geq 0\} \neq \emptyset$$

или, эквивалентно, система неравенств $\{\alpha_F f(\mathbf{z}) \geq 0 : f \in F\}$ совместна для некоторого множителя $\alpha_F^* \in \mathbb{R} - \{0\}$;

– $F \in (\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \bar{\Delta})$ тогда и только тогда, когда $\bigcap_{f \in F} (\overline{\mathbf{C}_>(f)}, \overline{\mathbf{C}_<(f)}) \neq (\emptyset, \emptyset)$, где $\overline{\mathbf{C}_>(f)}$ и $\overline{\mathbf{C}_<(f)}$ обозначают замыкания множеств

$$\mathbf{C}_>(f) := \{\mathbf{z} \in \mathbf{Z} : f(\mathbf{z}) > 0\} \quad \text{и} \quad \mathbf{C}_<(f) := \{\mathbf{z} \in \mathbf{Z} : f(\mathbf{z}) < 0\}$$

соответственно;

– $F \in (\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_>)$ тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_{f \in F} \{(\alpha_f, \mathbf{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbf{Z} : \alpha_f f(\mathbf{z}) > 0\} \neq \emptyset$$

или, эквивалентно, когда система неравенств $\{\alpha_F f(\mathbf{z}) > 0 : f \in F\}$ совместна для некоторого множителя $\alpha_F^* \in \mathbb{R}$.

Замечание 2.1. Если F — непустая грань комплекса Δ_{\geq} на множестве вершин $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ и F' — грань этого же комплекса такая, что $F' \supseteq F$ (в частности, если F' — гипергрань, содержащая F), то есть подсистема $\{\alpha_{F'} f(\mathbf{z}) \geq 0 : f \in F'\}$ (не)совместной системы $\{\alpha_{\mathbf{F}(\mathbf{Z})} f(\mathbf{z}) \geq 0 : f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})\}$ совместна для некоторого множителя $\alpha_{F'}^*$, то система

$$\{\alpha_F f(\mathbf{z}) \geq 0 : f \in F\}$$

совместна и при $\alpha_F = \alpha_{F'}^*$. Аналогичное наблюдение справедливо для граней F комплекса $\Delta_>$.

Прокомментируем определения комплексов Δ_{\geq} и $\Delta_>$ на примере комплекса Δ_{\geq} и несовместной системы неравенств

$$\{f(\mathbf{z}) \geq 0 : f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})\}. \quad (2.9)$$

Пусть Γ — комплекс, гранями которого являются совместные подсистемы системы (2.9); иными словами, если система неравенств $\{\alpha_F f(\mathbf{z}) \geq 0 : f \in F\}$ совместна при множителе $\alpha_F^* := 1$, то $F \in \Gamma$. Если $H \in \mathbf{2}^{\mathbf{F}(\mathbf{Z})} - \Gamma$ — несовместная подсистема системы (2.9), то $H \in \Delta_{\geq} - \Gamma$ в том и только том случае, когда система неравенств $\{\alpha_H h(\mathbf{z}) \geq 0 : h \in H\}$ совместна для некоторого множителя $\alpha_H^* \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Если $G \subseteq H$, $G \neq \emptyset$, то согласно Замечанию 2.1, подмножество G является гранью комплекса Δ_{\geq} , поскольку система $\{\alpha_H^* g(\mathbf{z}) \geq 0 : g \in G\}$

совместна. Таким образом,

$$\Delta_{\geq} = \Gamma \cup \Delta(\mathbf{max}(\Delta_{\geq} - \Gamma)) .$$

Для непустой грани F комплекса Δ_{\geq} обозначим через \mathbf{A}_F^* множество всех отличных от нуля вещественных множителей α_F^* , при которых система неравенств $\{\alpha_F f(\mathbf{z}) \geq 0: f \in F\}$ совместна. Если $\mathcal{H}(F) := \{H \in \mathbf{max} \Delta_{\geq}: H \supseteq F\}$ — семейство гиперграней Δ_{\geq} , содержащих грань F , то система неравенств $\{\alpha_F f(\mathbf{z}) \geq 0: f \in F\}$ оказывается совместной при любом множителе

$$\alpha_F^* \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}(F)} \mathbf{A}_H^* \subseteq \bigcup_{H \in \mathcal{H}(F)} \mathbf{A}_H^* \subseteq \mathbf{A}_F^* .$$

Перейдем к исследованию связности графов систем независимости, отвечающих комплексам из трех определенных выше классов.

Утверждение 2.5. *Если $\#\mathbf{max} \Delta_{\geq} > 1$, то граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{\geq})$ связан.*

Доказательство. Рассмотрим мультисемейство $V := \{(\mathbf{C}_{\geq}(f), \mathbf{C}_{\leq}(f)): f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})\}$ упорядоченных пар, чьи множества $\mathbf{C}_{\geq}(f)$ и $\mathbf{C}_{\leq}(f)$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{C}_{\geq}(f) := \{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}: f(\mathbf{z}) \geq 0\} \quad \text{и} \quad \mathbf{C}_{\leq}(f) := \{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}: f(\mathbf{z}) \leq 0\} .$$

Из определения комплекса $(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{\geq})$ и из определения (2.1) комплекса (V, Δ_{\cap}) следует, что они изоморфны, $(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{\geq}) \simeq (V, \Delta_{\cap})$, — изоморфизм достигается отображением $\mathbf{F}(\mathbf{Z}) \rightarrow V$, $f \mapsto (\mathbf{C}_{\geq}(f), \mathbf{C}_{\leq}(f))$. Поскольку множество V удовлетворяет условиям Утверждения 2.4, граф системы независимости $\text{ISG}(V, \Delta_{\cap})$ связан и, следовательно, граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{\geq})$, изоморфный графу $\text{ISG}(V, \Delta_{\cap})$, также связан. \square

Если \mathbf{X} — подмножество пространства \mathbf{Z} , то для его границы в \mathbf{Z} будет использоваться обозначение $\text{Fr}(\mathbf{X})$.

Утверждение 2.6. *Если $\#\mathbf{max} \bar{\Delta} > 1$ и множество $f^{-1}(0)$ нигде не плотно для каждой функции $f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})$, то граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \bar{\Delta})$ связан.*

Доказательство. Мультисемейство $V := \{(\overline{\mathbf{C}_>(f)}, \overline{\mathbf{C}_<(f)}) : f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})\}$ удовлетворяет условиям Утверждения 2.4. В самом деле, $\overline{\mathbf{C}_>(f)} \cup \overline{\mathbf{C}_<(f)} = \mathbf{Z}$, для каждой непрерывной функции $f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})$, поскольку $f^{-1}(0) \subseteq \text{Fr}(\mathbf{C}_>(f)) \cup \text{Fr}(\mathbf{C}_<(f))$ и прообраз $f^{-1}(0)$, по условию, нигде не плотен в \mathbf{Z} . Отображение $\mathbf{F}(\mathbf{Z}) \rightarrow V, f \mapsto (\overline{\mathbf{C}_>(f)}, \overline{\mathbf{C}_<(f)})$ — изоморфизм комплексов $(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \bar{\Delta})$ и (V, Δ_\cap) . Согласно Утверждению 2.4, граф системы независимости $\text{ISG}(V, \Delta_\cap)$ связан, а значит, связан и изоморфный ему граф $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \bar{\Delta})$. \square

Утверждение 2.7. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ — система непрерывных функций, с соответствующим комплексом $(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_>)$, у которого $\#\mathbf{max} \Delta_> > 1$. Если множества $f^{-1}(0)$ нигде не плотны для каждой функции $f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})$, то для каждой гиперграницы $H \in \mathbf{max} \Delta_>$ система неравенств

$$\begin{cases} \alpha f(\mathbf{z}) > 0, & \text{если } f \in H, \\ -\alpha f(\mathbf{z}) > 0, & \text{если } f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - H, \end{cases} \quad (2.10)$$

где $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, совместна.

Доказательство. По условию утверждения, система

$$\{\alpha f(\mathbf{z}) > 0 : f \in H\} \quad (2.11)$$

совместна, а непустое множество $\mathbf{S} \subset \mathbf{Z}$ ее решений открыто. Из максимальности H следует, что для каждой функции $f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - H$ и каждой точки $\mathbf{z} \in \mathbf{S}$ выполнено

$$\alpha f(\mathbf{z}) \leq 0. \quad (2.12)$$

Поскольку прообраз $f^{-1}(0)$ нигде не плотен для всякой функции $f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})$, из (2.12) вытекает, что система условий

$$\{-\alpha g(\mathbf{z}) > 0 : \mathbf{z} \in \mathbf{S}\} \quad (2.13)$$

совместна для каждой функции $g \in \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - H$, причем ее решения составляют открытое подмножество множества \mathbf{S} решений системы (2.11), — обозначим его

через \mathbf{S}_g . Таким образом, \mathbf{S}_g — это множество решений совместной системы

$$\begin{cases} \alpha f(\mathbf{z}) > 0, & f \in H, \\ \alpha(-g(\mathbf{z})) > 0. \end{cases}$$

Не теряя общности, будем полагать, что $\mathbf{F}(\mathbf{Z}) - H = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Если $k = 1$, то $\mathbf{F}(\mathbf{Z}) - H = \{g\}$ и доказательство завершено. Если же $k > 1$, то будем последовательно рассматривать каждую функцию $g \in \{f_2, f_3, \dots, f_k\}$. Повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что для любого индекса i , $2 \leq i \leq k$, подсистема

$$\begin{cases} \alpha f(\mathbf{z}) > 0, & f \in H \dot{\cup} \{f_1, \dots, f_{i-1}\}, \\ \alpha(-f_i(\mathbf{z})) > 0 \end{cases}$$

совместна. Следовательно, совместной является и исходная система (2.10). \square

Следствие 2.2. В условиях Утверждения 2.7

- (i) $H \in \mathbf{max} \Delta_{>} \implies \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - H \in \Delta_{>},$
- (ii) граф системы независимости $\mathbf{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{>})$ не содержит изолированных вершин.

Утверждение 2.8. Пусть $\#\mathbf{max} \Delta_{>} > 1$. Если в системе $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ множества $h^{-1}(0)$ нигде не плотны для всех функций $h \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})$ и выполнено условие

$$f, g \in \mathbf{F}(\mathbf{Z}), \quad f \neq g \implies f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = \emptyset, \quad (2.14)$$

то граф системы независимости $\mathbf{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{>})$ связан.

Доказательство. Напомним, что, согласно Утверждению 2.6, граф системы независимости $\mathbf{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \bar{\Delta})$ связан. Покажем, что $\Delta_{>} = \bar{\Delta}$.

Включение $\Delta_{>} \subseteq \bar{\Delta}$ выполнено. В самом деле, пусть F — непустая грань комплекса $\Delta_{>}$, то есть для некоторого вещественного множителя α_F^* система неравенств $\{\alpha_F^* f(\mathbf{z}) > 0: f \in F\}$ совместна. Тогда $\bigcap_{f \in F} \overline{\mathbf{C}_{>}(f)} \neq \emptyset$ и, значит, $F \in \bar{\Delta}$.

Докажем обратное включение $\Delta_{>} \supseteq \bar{\Delta}$. Пусть $F \in \bar{\Delta}$, то есть $\bigcap_{f \in F} (\overline{\mathbf{C}_{>}(f)}, \overline{\mathbf{C}_{<}(f)}) \neq (\emptyset, \emptyset)$. Предположим, для определенности, что $\bigcap_{f \in F} \overline{\mathbf{C}_{>}(f)} \neq \emptyset$.

Поскольку $\overline{\mathbf{C}_{>}(f)} = \mathbf{C}_{>}(f) \dot{\cup} \text{Fr}(\mathbf{C}_{>}(f))$ и каждая функция f , по условию, непрерывна, имеет место включение $\text{Fr}(\mathbf{C}_{>}(f)) \subseteq f^{-1}(0)$.

С учетом условия (2.14), имеем

$$\begin{aligned} \bigcap_{f \in F} \overline{\mathbf{C}_{>}(f)} &= \bigcap_{f \in F} \left(\mathbf{C}_{>}(f) \dot{\cup} \text{Fr}(\mathbf{C}_{>}(f)) \right) \\ &= \left(\bigcap_{f \in F} \mathbf{C}_{>}(f) \right) \cup \bigcup_{f \in F} \left(\text{Fr}(\mathbf{C}_{>}(f)) \cap \bigcap_{g \in F: g \neq f} \mathbf{C}_{>}(g) \right) \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Если в выражении (2.15) пересечение $\bigcap_{f \in F} \mathbf{C}_{>}(f)$ непусто, то $F \in \Delta_{>}$.

Если найдется функция $f \in F$ такая, что

$$\text{Fr}(\mathbf{C}_{>}(f)) \cap \bigcap_{g \in F, g \neq f} \mathbf{C}_{>}(g) \neq \emptyset \quad (2.16)$$

в выражении (2.15), то $\bigcap_{g \in F} \mathbf{C}_{>}(g) \neq \emptyset$. Таким образом, $F \in \Delta_{>}$ и, с учетом сказанного выше, $\bar{\Delta} = \Delta_{>}$. Поскольку граф $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \bar{\Delta})$ связан, и изоморфный ему граф $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{>})$ также связан. \square

Утверждение 2.9. Пусть $\#\max \Delta_{>} > 1$, и в системе $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ множества $h^{-1}(0)$ нигде не плотны для всякой функции $h \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})$. Если множество

$$\mathbf{Z}' := \mathbf{Z} - \bigcup_{\substack{f, g \in \mathbf{F}(\mathbf{Z}): \\ f \neq g}} (f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0))$$

связно, то граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{>})$ связан.

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\mathbf{F}(\mathbf{Z}') := \{f \mid_{\mathbf{Z}'} : f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})\}$ ограничений отображений из $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ на множество \mathbf{Z}' .

Пусть $\Delta'_{>}$ — симплициальный комплекс на множестве вершин $\mathbf{F}(\mathbf{Z}')$, непустыми гранями которого, по определению, являются такие подмножества

$$F' := \{(f' := f \mid_{\mathbf{Z}'}): f \in F\} \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{Z}'), \quad (2.17)$$

отвечающие множествам $F \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{Z})$, для которых системы неравенств

$$\{\alpha_{F'} f'(z) > 0 : f' \in F'\} \quad (2.18)$$

совместны при некоторых множителях $\alpha_{F'}^* \in \mathbb{R}$.

Для непустых подмножеств $F' \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{Z}')$, определенных в (2.17), имеем

$$F' \in \Delta'_{>} \iff F \in \Delta_{>}. \quad (2.19)$$

Достаточность очевидна. В самом деле, если система (2.18) совместна при некотором множителе $\alpha_{F'}^*$, то совместна и система $\{\alpha_{F'}^* f(\mathbf{z}) > 0: f \in F'\}$.

Докажем необходимость. Пусть $F \in \Delta_{>}$, то есть, по определению, система $\{\alpha_F^* f(\mathbf{z}) > 0: f \in F\}$ совместна при некотором множителе $\alpha_F^* \in \mathbb{R}$, предположим, для определенности, что $\alpha_F^* > 0$. Если \mathbf{z}^* — решение системы $\{\alpha_F^* f(\mathbf{z}) > 0: f \in F\}$, то решением этой системы, в силу непрерывности функций $f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})$, являются и элементы некоторой окрестности $\mathbf{O}_{\mathbf{z}^*}$ решения \mathbf{z}^* . Поскольку множества $f^{-1}(0)$ нигде не плотны для каждой из функций $f \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})$, то $\mathbf{O}_{\mathbf{z}^*} - \bigcup_{f \in F} f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Следовательно, найдется элемент $\mathbf{z}' \in \mathbf{Z}'$ такой, что $f'(\mathbf{z}') > 0$, для каждой функции $f' := f|_{\mathbf{z}'}$, то есть $F' \in \Delta'_{>}$. Таким образом, $\Delta(\mathbf{F}(\mathbf{Z}'), \Delta'_{>}) \simeq \Delta(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{>})$.

Согласно Утверждению 2.8, граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}'), \Delta'_{>})$ связан, поэтому связан и изоморфный ему граф $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \Delta_{>})$. \square

Перейдем к рассмотрению графов систем независимости, связанных с конечными совокупностями $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n) := \{f_i: i \in [m]\}$, $m > 1$, полиномиальных функций $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на евклидовом вещественном пространстве \mathbb{R}^n , $n > 1$.

Для непустого набора $F \subseteq \mathbf{F}(\mathbb{R}^n)$ обозначим $\mathbf{V}(F) := \bigcap_{f \in F} \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n: f(\mathbf{z}) = 0\}$.

Замечание 2.2. Если $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — два взаимно простых многочлена, то множество $\mathbf{V}(f, g)$ имеет топологическую размерность не выше $n - 2$.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть ситуацию, когда многочлены f и g неприводимы, — в таком случае множества $\mathbf{V}(f)$ и $\mathbf{V}(g)$ являются алгебраическими многообразиями, то есть эти множества неприводимы. Поскольку $g \neq \lambda f$ для любого множителя $\lambda \in \mathbb{R}$, имеет место собственное включение $\mathbf{V}(f, g) \subsetneq \mathbf{V}(f)$. Значит, алгебраическая размерность множества $\mathbf{V}(f, g)$ не превосходит $n - 2$, но, напомним, топологическая размерность $\mathbf{V}(f, g)$ совпадает с ее алгебраической размерностью.

В формулировке Замечания 2.2 используются результаты в области исследования алгебраических многообразий из [16].

Утверждение 2.10. *Если $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n)$ — совокупность попарно взаимно простых многочленов, то граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbb{R}^n), \Delta_{>})$ связан.*

Доказательство. Согласно Замечанию 2.2, множества $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ имеют топологическую размерность не выше $n - 2$, для любых различных многочленов $f, g \in \mathbf{F}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, дополнение $\mathbb{R}^n - \bigcup_{\substack{f, g \in \mathbf{F}(\mathbb{R}^n) \\ f \neq g}} (f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0))$ связно. Поэтому Утверждение 2.9 позволяет сделать заключение о том, что граф $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbb{R}^n), \Delta_{>})$ связан. \square

Рассмотрим некоторые следствия из приведенных выше утверждений. Два из них вытекают из Утверждения 2.5.

Следствие 2.3. *Пусть (\mathbf{V}, Δ) — комплекс, чье множество вершин \mathbf{V} — конечное подмножество точек сферы \mathbb{S}^{n-1} , и непустое подмножество $F \subseteq \mathbf{V}$ — грань тогда и только тогда, когда множество F содержится в замкнутой полусфере.*

Граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{V}, \Delta)$ связан.

Доказательство. Каждой точке $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ поставим в соответствие линейный функционал $f_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{z} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle$, и рассмотрим совокупность $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n) := \{f_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}$ всех таких функционалов. Поскольку пространство \mathbb{R}^n связно, граф $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbb{R}^n), \Delta_{\geq})$ также связан, в соответствии с Утверждением 2.5. Напомним, что непустое подмножество F множества \mathbf{V} содержится в замкнутой полусфере тогда и только тогда, когда система неравенств $\{\langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle \geq 0 : \mathbf{v} \in F\}$ совместна, то есть $\{f_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in F\} \in \Delta_{\geq}$. Следовательно, $(\mathbf{V}, \Delta) \simeq (\mathbf{F}(\mathbb{R}^n), \Delta_{\geq})$ и граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{V}, \Delta)$ связан. \square

Следствие 2.4. *Пусть (\mathbf{V}, Δ) — комплекс, чье множество вершин $\mathbf{V} := \{P_i : i \in [m]\}$, $m > 1$, — конечное семейство замкнутых полупространств пространства \mathbb{R}^n с непустым пересечением, и непустое подсемейство $F \subseteq \mathbf{V}$ — грань тогда и только тогда, когда полиэдр $\bigcap_{P \in F} P$ неограничен.*

Граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{V}, \Delta)$ связан.

Доказательство. Представим каждое полупространство P_i в виде $P_i := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{z} \rangle \geq b_i\}$, где $\mathbf{v}_i \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $b_i \in \mathbb{R}$. Поскольку для непустого подмножества

индексов $L \subseteq [m]$ полиэдр $\bigcap_{i \in L} P_i$ неограничен тогда и только тогда, когда множество точек $\{\mathbf{v}_i : i \in L\}$ содержится в замкнутой полусфере, утверждение вытекает из Следствия 2.3. \square

Другие два результата следуют из Утверждения 2.8.

Следствие 2.5. *Если $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n) := \{f_i : i \in [m]\}$ — совокупность линейных функционалов $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, и $f_i \neq -\lambda f_j$ для любых различных индексов $i, j \in [m]$ и положительных множителей $\lambda \in \mathbb{R}$, то граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbb{R}^n), \Delta_{>})$ связан.*

Доказательство. Предположим, что $f_i = \lambda f_j$ для некоторых различных индексов $i, j \in [m]$ и вещественного множителя $\lambda > 0$. В этом случае граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbb{R}^n), \Delta_{>})$ изоморфен графу $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbb{R}^n) - \{f_j\}, \Delta'_{>})$, отвечающему комплексу $\Delta'_{>}$ на множестве вершин $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n) - \{f_j\}$. В связи с этим можно ограничиться рассмотрением случая, когда функционалы из $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условию $f_i \neq \lambda f_j$, для $i, j \in [m]$ и $\lambda > 0$. С учетом того, что, аналогично, $f_i \neq -\lambda f_j$, для $i, j \in [m]$ и $\lambda > 0$, приходим к выводу, что выполнены условия Утверждения 2.9 и, как следствие, граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbb{R}^n), \Delta_{>})$ связан. \square

Следствие 2.6. *Пусть (\mathbf{V}, Δ) — комплекс, чье множество вершин \mathbf{V} — конечное подмножество точек сферы \mathbb{S}^{n-1} и непустое подмножество $F \subseteq \mathbf{V}$ — грань Δ тогда и только тогда, когда множество F содержится в открытой полусфере.*

Если множество \mathbf{V} не содержит антиподов, то граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{V}, \Delta)$ связан.

Доказательство. Поставим в соответствие каждой точке $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ линейный функционал $f_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{z} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle$, и рассмотрим совокупность $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n) := \{f_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}$ всех таких функционалов. Комплекс (\mathbf{V}, Δ) изоморфен комплексу $(\mathbf{F}(\mathbb{R}^n), \Delta_{>})$, а отсутствие антиподов в \mathbf{V} влечет выполнение условий $f_{\mathbf{v}} \neq -\lambda f_{\mathbf{w}}$, для любых точек $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ и вещественных множителей $\lambda > 0$. Согласно Следствию 2.5, граф системы независимости $\text{ISG}(\mathbf{F}(\mathbb{R}^n), \Delta_{>})$ связан; следовательно, связан и изоморфный ему граф $\text{ISG}(\mathbf{V}, \Delta)$. \square

2.2. Граф МСП несовместной системы линейных неравенств

В этом разделе объектом рассмотрения выступают графы систем независимости, связанных с комплексами (мультииндексов) совместных подсистем несовместных систем линейных неравенств.

Рассмотрим конечную несовместную систему

$$\mathfrak{S} := \{ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{a}_i\| = 1, i \in [m]; i_1 \neq i_2 \Rightarrow \mathbf{a}_{i_1} \neq -\mathbf{a}_{i_2} \} \quad (2.20)$$

однородных строгих линейных неравенств ранга n над вещественным евклидовым пространством \mathbb{R}^n , чье множество задающих векторов $\mathbf{A}(\mathfrak{S}) := \{\mathbf{a}_i : i \in [m]\}$ не содержит пар антиподов.

С системой (2.20) связано отображение

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{B}(m) &\rightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{R}^n}, \quad \hat{0} \neq T \mapsto \bigcap_{t \in T} \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}_t, \mathbf{x} \rangle > 0 \}, \\ \hat{0} &\mapsto \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2.21)$$

сопоставляющее каждому непустому мультииндексу $T \in \mathbb{B}(m)$ подсистемы $\{ \langle \mathbf{a}_t, \mathbf{x} \rangle > 0 : t \in T \}$ системы \mathfrak{S} открытый конус ее решений. Поскольку ниже будут рассматриваться упорядоченные пары подмножеств пространства \mathbb{R}^n , связанные с такими конусами, также будут применяться в качестве синонимов обозначения $\mathbf{C}_{>}(T) := \pi(T)$. Линейные подпространства $\bigcap_{t \in T} \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}_t, \mathbf{x} \rangle = 0 \}$ будут обозначаться через $\mathbf{H}(T)$. Для краткости, будут использоваться обозначения $\mathbf{C}_{>}(i)$ вместо $\mathbf{C}_{>}(\{i\})$ для открытых полупространств, и $\mathbf{H}(i)$ вместо $\mathbf{H}(\{i\})$ для гиперплоскостей; $\mathbf{C}_{<}(T) := -\mathbf{C}_{>}(T)$.

Пусть T — мультииндекс совместной подсистемы системы \mathfrak{S} и $L \subseteq T$ — мультииндекс такой, что для любого индекса $i \in [m] - L$ выполнено строгое включение $\mathbf{H}(L \dot{\cup} \{i\}) \subsetneq \mathbf{H}(L)$; в этом случае открытая относительно подпространства $\mathbf{H}(L)$ грань $\mathbf{H}(L) \cap \mathbf{C}_{>}(T - L)$ замкнутого конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(T)}$ будет обозначаться через $\mathcal{F}(L, T)$. Если $\dim \mathbf{H}(L) = r$, то грань $\mathcal{F}(L, T)$ конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(T)}$ называется r -мерной.

Через $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \text{conv} \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \}$ обозначим замкнутый отрезок, соединяющий точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$; $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := [\mathbf{x}, \mathbf{y}] - \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \}$ — соответствующий открытый отрезок.

Обозначим через \mathbf{J} семейство мультииндексов МСП системы (2.20). Абстрактный симплициальный комплекс $\Delta(\mathbf{J})$, с семейством гиперграней \mathbf{J} , на множестве вершин $[m]$, — это семейство мультииндексов всех совместных подсистем системы \mathfrak{S} .

Системе (2.20) ставится в соответствие частная теоретико-графовая конструкция из общего семейства графов систем независимости.

Определение 2.2. *Граф $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ максимальных совместных подсистем (граф МСП) системы \mathfrak{S} определяется как граф*

$$\text{MFSG}(\mathfrak{S}) := \text{ISG}([m], \Delta(\mathbf{J}))$$

системы независимости, отвечающей комплексу $([m], \Delta(\mathbf{J}))$.

Таким образом, по определению,
 – множество вершин графа $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ — это семейство \mathbf{J} мультииндексов МСП системы \mathfrak{S} ;
 – семейство ребер графа $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ — это семейство всех неупорядоченных пар $\{J, J'\}$ мультииндексов МСП системы \mathfrak{S} , покрывающих множество индексов неравенств системы,

$$J \cup J' = [m].$$

Теорема 2.1. *Граф $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ максимальных совместных подсистем системы (2.20) связан.*

Доказательство. Пусть (\mathbf{V}, Δ) — абстрактный симплициальный комплекс на множестве вершин $\mathbf{V} := \mathbf{A}(\mathfrak{S})$, представляющих собой задающие систему (2.20) векторы. Непустое подмножество $F \subseteq \mathbf{V}$, по определению, является гранью Δ тогда и только тогда, когда множество F содержится в открытой полусфере единичной сферы \mathbb{S}^{n-1} .

Пользуясь Следствием 2.6 и изоморфизмом $[m] \rightarrow \mathbf{V}$, $i \mapsto \mathbf{a}_i$ комплекса $([m], \Delta(\mathbf{J}))$ и комплекса (\mathbf{V}, Δ) , рассмотренного в Следствии 2.6, получаем, что граф $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ связан. \square

Доказательство Теоремы 2.1 описывает один из нескольких подходов к обоснованию важного утверждения о связности графа МСП несовместной системы (2.20) и приводится, согласно работам [31, 187].

Ниже будет показано, что задача выделения МСП системы \mathfrak{S} и свойства графа МСП системы \mathfrak{S} играют важную роль в решении задач распознавания образов в ее геометрической постановке.

При построении алгоритмов выделения МСП системы \mathfrak{S} важно знать свойства ее графа МСП, характеризующие окрестности вершин, например, оценки степеней вершин. Обозначим окрестность вершины J_s в графе $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ через $\mathcal{N}(J_s)$.

Полезно иметь в виду следующие свойства выпуклых многогранных конусов.

Лемма 2.1. *Справедливы следующие утверждения.*

- (i) Если $M \subset [m]$ и $\mathbf{C}_{>}(M) \neq \emptyset$, то $\mathbf{H}(M) \subset \overline{\mathbf{C}_{>}(M)}$.
- (ii) Если $L, M \subset [m]$, $\mathbf{C}_{>}(L) \neq \emptyset$ и $\mathbf{C}_{>}(M) \neq \emptyset$, то
 - (1) $\overline{\mathbf{C}_{>}(L)} \cap \mathbf{C}_{>}(M) \neq \emptyset \iff \mathbf{C}_{>}(L) \cap \mathbf{C}_{>}(M) \neq \emptyset$ и
 - (2) $\mathbf{H}(L) \cap \mathbf{C}_{>}(M) \neq \emptyset \implies \mathbf{C}_{>}(L) \cap \mathbf{C}_{>}(M) \neq \emptyset$.

Лемма 2.2. *Для произвольного мультииндекса $J_s \in \mathbf{J}$ максимальной совместной подсистемы системы \mathfrak{S} выполнено включение $-\mathbf{C}_{>}(J_s) \subsetneq \mathbf{C}_{>}([m] - J_s)$.*

Доказательство. Зафиксируем любой вектор $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}_{>}(J_s)$ и покажем, что выполнено включение $-\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}_{>}([m] - J_s)$. Предположим, что, напротив, найдется индекс $j^* \in [m] - J_s$ такой, что $-\mathbf{x}^* \notin \mathbf{C}_{>}(j^*)$. В этом случае соотношения $\mathbf{x}^* \in \overline{\mathbf{C}_{>}(j^*)}$ и $\overline{\mathbf{C}_{>}(j^*)} \cap \mathbf{C}_{>}(J_s) \neq \emptyset$ влекут $\mathbf{C}_{>}(j^*) \cap \mathbf{C}_{>}(J_s) \neq \emptyset$, что противоречит максимальной совместности подсистемы с мультииндексом J_s . Следовательно, $-\mathbf{C}_{>}(J_s) \subseteq \mathbf{C}_{>}([m] - J_s)$. Равенство $-\mathbf{C}_{>}(J_s) = \mathbf{C}_{>}([m] - J_s)$ невозможно, поскольку в множестве $\mathbf{A}(\mathfrak{S})$ векторов, задающих систему (2.20), по соглашению, отсутствуют антиподы. \square

Лемма 2.3. *Пусть в системе \mathfrak{S} каждая подсистема из $k + 1$ неравенств, где $2 \leq k \leq n - 1$, совместна. Для некоторого мультииндекса $J_s \in \mathbf{J}$ ее максимальной совместной подсистемы рассмотрим произвольную $(n - k)$ -мерную грань $\mathcal{F}(L, J_s)$ замкнутого конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(J_s)}$.*

- (i) *Выполнено включение $-\mathcal{F}(L, J_s) \subset \mathbf{C}_{>}([m] - J_s)$, и*
- (ii) *$\mathbf{C}_{>}(L) \cap \mathbf{C}_{>}([m] - J_s) \neq \emptyset$, то есть подсистема $\{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0: \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; i \in L \cup ([m] - J_s)\}$ системы \mathfrak{S} совместна.*

Доказательство. (i) Пусть, напротив, найдется индекс $j^* \in [m] - J_s$ такой, что $-\mathcal{F}(L, J_s) \not\subseteq \mathbf{C}_>(j^*)$. Пользуясь Леммой 2.2, имеем $-\mathcal{F}(L, J_s) \subseteq -\overline{\mathbf{C}_>(J_s)} \subseteq \overline{\mathbf{C}_>([m] - J_s)} \subseteq \overline{\mathbf{C}_>(j^*)}$. Таким образом, возможны лишь два случая:

- 1) $-\mathcal{F}(L, J_s) \cap \mathbf{C}_>(j^*) \neq \emptyset$ и $-\mathcal{F}(L, J_s) \cap \mathbf{H}(j^*) \neq \emptyset$;
- 2) $-\mathcal{F}(L, J_s) \cap \mathbf{C}_>(j^*) = \emptyset$ и, следовательно, $-\mathcal{F}(L, J_s) \subseteq \mathbf{H}(j^*)$.

В первом случае выберем некоторые точки $\mathbf{x} \in -\mathcal{F}(L, J_s) \cap \mathbf{C}_>(j^*)$ и $\mathbf{y} \in -\mathcal{F}(L, J_s) \cap \mathbf{H}(j^*)$. При $\lambda > 0$ выполнено включение $\mathbf{z} := -\lambda\mathbf{x} + (1 + \lambda)\mathbf{y} \in -\mathbf{C}_>(j^*)$. Поскольку $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in -\mathcal{F}(L, J_s)$ и множество $-\mathcal{F}(L, J_s)$ выпукло и открыто относительно $\mathbf{H}(L)$, то и $\mathbf{z} \in -\mathcal{F}(L, J_s) \subseteq -\overline{\mathbf{C}_>(J_s)}$ при достаточно малом $\lambda > 0$. Таким образом, $\mathbf{z} \in -\mathbf{C}_>(j^*) \cap -\overline{\mathbf{C}_>(J_s)}$ при достаточно малом $\lambda > 0$. Следовательно, $-\mathbf{C}_>(j^*) \cap -\overline{\mathbf{C}_>(J_s)} \neq \emptyset$, что противоречит максимальной совместной подсистеме с мультииндексом J_s .

Рассмотрим второй случай: $-\mathcal{F}(L, J_s) \subseteq \mathbf{H}(j^*)$. Поскольку множество $-\mathcal{F}(L, J_s)$ открыто относительно подпространства $\mathbf{H}(L)$, то $\mathbf{H}(L) \subseteq \mathbf{H}(j^*)$, то есть ранг подсистемы с мультииндексом $L \cup \{j^*\}$ равен рангу подсистемы с мультииндексом L , а именно k . Поскольку в системе \mathfrak{S} любая подсистема из $k + 1$ неравенства совместна, подсистема с мультииндексом $L \cup \{j^*\}$ ранга k также совместна, то есть $\mathbf{C}_>(L \cup \{j^*\}) \neq \emptyset$.

По определению, $\mathcal{F}(L, J_s) \subseteq \mathbf{C}_>(J_s - L)$. С другой стороны, пользуясь Леммой 2.1(i) для мультииндекса $L \cup \{j^*\}$, имеем $\mathcal{F}(L, J_s) \subseteq \mathbf{H}(L) = \mathbf{H}(L \cup \{j^*\}) \subseteq \overline{\mathbf{C}_>(L \cup \{j^*\})}$. Таким образом, $\mathbf{C}_>(J_s - L) \cap \overline{\mathbf{C}_>(L \cup \{j^*\})} \supseteq \mathcal{F}(L, J_s)$ или $\mathbf{C}_>(J_s \cup \{j^*\}) \neq \emptyset$, что противоречит максимальной совместной подсистеме с мультииндексом J_s . Тем самым включение $\mathcal{F}(L, J_s) \subseteq \mathbf{C}_>([m] - J_s)$ доказано.

(ii) Поскольку $-\mathcal{F}(L, J_s) \subseteq \mathbf{H}(L) \subseteq \overline{\mathbf{C}_>(L)}$, то $\overline{\mathbf{C}_>(L)} \cap \overline{\mathbf{C}_>([m] - J_s)} \supseteq -\mathcal{F}(L, J_s)$ и, значит, $\mathbf{C}_>(L) \cap \mathbf{C}_>([m] - J_s) \neq \emptyset$. \square

Лемма 2.4. *Если в системе \mathfrak{S} любая подсистема из n неравенств совместна, то для каждого мультииндекса $J_s \in \mathbf{J}$ ее максимальной совместной подсистемы и для произвольного набора $|\mathcal{N}(J_s)|$ представителей $\{\mathbf{y}_t \in \mathbf{C}_>(J_t) : J_t \in \mathcal{N}(J_s)\}$ выполнено включение $-\overline{\mathbf{C}_>(J_s)} \subseteq \text{pos}\{\mathbf{y}_t \in \mathbf{C}_>(J_t) : J_t \in \mathcal{N}(J_s)\}$.*

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{F}(L_k, J_s) : k \in [l]\}$ — множество всех l одномерных граней конуса $\overline{\mathbf{C}_>(J_s)}$, то есть, по определению, $\dim \mathbf{H}(L_k) = 1$ и $L_k \subset J_s$ для

каждого $k \in [l]$. Пусть $\{\mathbf{x}_k \in \mathcal{F}(L_k, J_s) - \{\mathbf{0}\} : k \in [l]\}$ — произвольный набор l представителей этих граней. Напомним, что

$$\text{pos} \{\mathbf{x}_k : k \in [l]\} = \overline{\mathbf{C}_{>}(J_s)}. \quad (2.22)$$

Каждому представителю \mathbf{x}_k , $k \in [l]$, поставим в соответствие вектор $\mathbf{z}_k \in -\mathbf{C}_{>}(J_s)$ и мультииндекс МСП $J_{t_k} \in \mathcal{N}(J_s)$ такие, что $-\mathbf{x}_k \in (\mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{z}_k)$. Для этого мультииндекс J_{t_k} выберем таким, чтобы выполнялось включение $J_{t_k} \supseteq L_k \cup ([m] - J_s)$. Это можно сделать потому, что согласно Лемме 2.3(ii), $\mathbf{C}_{>}(L_k \cup ([m] - J_s)) \neq \emptyset$ для всех $k \in [l]$. По Лемме 2.1(i), $-\mathbf{x}_k \in -\mathcal{F}(L_k, J_s) \subset \mathbf{H}(L_k) \subseteq \overline{\mathbf{C}_{>}(L_k)}$. По выбору номера t_k имеем $\mathbf{y}_{t_k} \in \mathbf{C}_{>}(J_{t_k}) \subseteq \mathbf{C}_{>}(L_k)$.

Положим $\mathbf{z}_k := -\lambda \mathbf{y}_{t_k} + (1 + \lambda)(-\mathbf{x}_k)$ и покажем, что $\mathbf{z}_k \in -\mathbf{C}_{>}(J_s)$ при достаточно малом параметре $\lambda > 0$.

Действительно, при любом $\lambda > 0$ имеем $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{z}_k \rangle = -\lambda \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y}_{t_k} \rangle + (1 + \lambda) \langle \mathbf{a}_i, -\mathbf{x}_k \rangle$ для каждого $i \in L_k$; то есть $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{z}_k \rangle < 0$, поскольку $\mathbf{y}_{t_k} \in \mathbf{C}_{>}(L_k)$ и $-\mathbf{x}_k \in \mathbf{H}(L_k)$.

Далее, для каждого $i \in J_s - L_k$ имеем $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{z}_k \rangle = \langle \mathbf{a}_i, -\mathbf{x}_k \rangle + \lambda (\langle \mathbf{a}_i, -\mathbf{x}_k \rangle - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y}_{t_k} \rangle) < 0$ при достаточно малом $\lambda > 0$, поскольку $-\mathbf{x}_k \in \mathbf{H}(L_k) \cap -\mathbf{C}_{>}(J_s - L_k)$. По выбору \mathbf{z}_k выполнено включение $-\mathbf{x}_k \in [\mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{z}_k]$ и, поскольку $\mathbf{y}_{t_k} \in \mathbf{C}_{>}(L_k)$, $\mathbf{z}_k \in -\mathbf{C}_{>}(L_k)$, то $-\mathbf{x}_k \in (\mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{z}_k)$.

Выберем произвольный индекс $k^* \in [m] - J_s$. Обозначим $\mathbf{H}^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}_{k^*}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$. Согласно Лемме 2.3, $-\mathbf{x}_k \in -\mathcal{F}(L_k, J_s) \subset \mathbf{C}_{>}([m] - J_s)$ и, следовательно, $-\overline{\mathbf{C}_{>}(J_s)} = \text{pos} \{-\mathbf{x}_k : k \in [l]\} \subset \mathbf{C}_{>}([m] - J_s) \subset \mathbf{C}_{>}(k^*)$. Кроме того, для каждого $k \in [l]$ имеем $\mathbf{y}_{t_k} \in \mathbf{C}_{>}(J_{t_k}) \subset \mathbf{C}_{>}([m] - J_s) \subseteq \mathbf{C}_{>}(k^*)$. Таким образом, для каждого $k \in [l]$ выполнены неравенства $\langle \mathbf{a}_{k^*}, -\mathbf{x}_k \rangle > 0$ и $\langle \mathbf{a}_{k^*}, \mathbf{y}_{t_k} \rangle > 0$; поэтому, без ограничения общности, можно предположить, что векторы $-\mathbf{x}_k$ и \mathbf{y}_{t_k} , $k \in [l]$, выбраны по модулю так, что они принадлежат гиперплоскости \mathbf{H}^* . Но тогда выполнены и включения $\mathbf{z}_k \in \mathbf{H}^*$, $k \in [l]$. Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^* \cap \overline{-\mathbf{C}_{>}(J_s)} &= \text{conv} \{-\mathbf{x}_k : k \in [l]\}, \\ -\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k &\in \text{conv} \{-\mathbf{x}_k : k \in [l]\}, \quad -\mathbf{x}_k \in (\mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{z}_k), \quad k \in [l]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из геометрических рассуждений, справедливо следующее следующее утверждение. Если $\mathbf{E} \subseteq \mathbb{R}^n$, а также $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \text{conv} \mathbf{E}$ и $\mathbf{x} \in (\mathbf{y}, \mathbf{z})$,

то $\text{conv } \mathbf{E} \subseteq \text{conv}((\mathbf{E} \cup \{\mathbf{y}\}) - \{\mathbf{x}\})$. Пользуясь этим наблюдением и соотношениями (2.23), выпишем цепочку включений

$$\begin{aligned} \text{conv} \{-\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_l\} \\ \subseteq \text{conv} \{\mathbf{y}_{t_1}, -\mathbf{x}_2, \dots, -\mathbf{x}_l\} \subseteq \dots \subseteq \text{conv} \{\mathbf{y}_{t_1}, \mathbf{y}_{t_2}, \dots, \mathbf{y}_{t_{l-1}}, -\mathbf{x}_l\} \\ \subseteq \text{conv} \{\mathbf{y}_{t_1}, \mathbf{y}_{t_2}, \dots, \mathbf{y}_{t_l}\} \subseteq \text{conv} \{\mathbf{y}_t : J_t \in \mathcal{N}(J_s)\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из (2.22) и (2.24) следует, что $-\overline{\mathbf{C}}_{>}(J_s) = \text{pos} \{-\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_l\} \subseteq \text{pos} \{\mathbf{y}_t : J_t \in \mathcal{N}(J_s)\}$, что и требовалось доказать. \square

Как отмечалось выше, важными параметрами графа МСП системы (2.20) являются степени его вершин. Приведем две крайние оценки, которые будут пополнены позже Утверждением 2.13.

Теорема 2.2. Пусть $J_s \in \mathbf{J}$ — мультииндекс некоторой максимальной совместной подсистемы системы (2.20).

- (i) Степень вершины J_s в ее графе МСП $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ не меньше двух: $|\mathcal{N}(J_s)| \geq 2$.
- (ii) Если каждая подсистема из n неравенств системы (2.20) совместна, то степень вершины J_s в ее графе МСП $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ не меньше n : $|\mathcal{N}(J_s)| \geq n$.

Доказательство. (i) Пусть $\{\mathcal{F}(L_k, J_s) : k \in [d]\}$ — множество всех $(n-1)$ -мерных граней конуса $\overline{\mathbf{C}}_{>}(J_s)$. Согласно Лемме 2.2, $\mathbf{C}_{>}([m] - J_s) \neq \emptyset$ и, следовательно, найдется максимальная совместная подсистема системы \mathfrak{S} с мультииндексом $J_p \supset [m] - J_s$.

Поскольку J_s и J_p — мультииндексы разных МСП, то $\mathbf{C}_{>}(J_s) \cap \mathbf{C}_{>}(J_p) \neq \emptyset$. Тогда найдется номер k^* такой $(n-1)$ -мерной грани $\mathcal{F}(L_{k^*}, J_s)$ конуса $\mathbf{C}_{>}(J_s)$, что $L_{k^*} \not\subseteq J_p$, так как в противном случае для каждой из d таких граней выполнялось бы включение $L_k \subseteq J_p$, из чего вытекали бы соотношения $\mathbf{C}_{>}(J_p) \subseteq \mathbf{C}_{>}(\bigcup_{k=1}^d L_k) = \mathbf{C}_{>}(J_s)$ и $\mathbf{C}_{>}(J_p) \cap \mathbf{C}_{>}(J_s) = \mathbf{C}_{>}(J_p) \neq \emptyset$.

Поскольку в системе \mathfrak{S} каждая подсистема из двух неравенств, по соглашению, совместна, то, согласно Лемме 2.3(ii), для $(n-1)$ -мерной грани $\mathcal{F}(L_{k^*}, J_s)$ имеем $\mathbf{C}_{>}(L_{k^*} \cup ([m] - J_s)) \neq \emptyset$, вследствие чего найдется максимальная совместная подсистема с мультииндексом $J_t \supseteq L_{k^*} \cup ([m] - J_s)$, $J_t \neq J_p$, поскольку $L_{k^*} \subset J_t$ и $L_{k^*} \not\subseteq J_p$, то есть $\mathcal{N}(J_s) \supseteq \{J_p, J_t\}$ и, значит, $|\mathcal{N}(J_s)| \geq 2$.

(ii) Для каждого открытого конуса $\mathbf{C}_{>}(J_t)$ решений максимальной совместной подсистемы с мультииндексом $J_t \in \mathcal{N}(J_s)$ выберем по одному представителю $\mathbf{y}_t \in \mathbf{C}_{>}(J_t)$. Согласно Лемме 2.4, выполнено включение $-\overline{\mathbf{C}_{>}(J_s)} \subseteq \text{pos} \{\mathbf{y}_t \in \mathbf{C}_{>}(J_t)\}$. Поскольку конус $\overline{\mathbf{C}_{>}(J_s)}$ — n -мерный, выполнено соотношение $|\mathcal{N}(J_s)| \geq n$. \square

Теорема 2.2(i) доказана в работе [151] и воспроизведена как Теорема 1 в [32].

Лемма 2.5. *Если $J_s \in \mathbf{J}$ и $J_t \in \mathbf{J}$ — мультииндексы двух различных максимальных совместных подсистем системы (2.20), то $J_s \cap J_t \neq \emptyset$.*

Доказательство. Предположим, что, напротив, $J_s \cap J_t = \emptyset$. Пусть $\mathcal{F}(L, J_t)$ — $(n - 1)$ -мерная грань конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(J_t)}$. Поскольку множество $\mathbf{A}(\mathfrak{S})$ задающих систему \mathfrak{S} векторов, по соглашению, не содержит антиподов, то, согласно Лемме 2.3(ii), получаем $\mathbf{C}_{>}([m] - J_t) \cap \mathbf{C}_{>}(L) \neq \emptyset$, то есть подсистема системы \mathfrak{S} с мультииндексом $([m] - J_t) \cup L$ совместна. Поскольку $L \neq \emptyset$ и $L \cap J_s \neq \emptyset$, это противоречит максимальной совместности J_s . \square

Лемма 2.6. *Пусть задано разбиение $\mathbf{J} = \mathbf{J}' \dot{\cup} \mathbf{J}''$, $\#\mathbf{J}' > 0$, $\#\mathbf{J}'' > 0$, семейства мультииндексов МСП системы (2.20), и пусть $J' \in \mathbf{J}'$ и $J'' \in \mathbf{J}''$ — мультииндексы максимальных совместных подсистем такие, что $|J' \cap J''| = \max_{L \in \mathbf{J}', M \in \mathbf{J}''} |L \cap M|$. Тогда подсистема системы \mathfrak{S} с мультииндексом $([m] - J') \cup ([m] - J'')$ совместна.*

Доказательство. По Лемме 2.5, $J' \cap J'' \neq \emptyset$. Для мультииндекса $J := J' \cap J''$, и для любых индексов $j' \in J' - J$ и $j'' \in J'' - J$ имеем

$$\mathbf{C}_{>}(J \cup \{j'\} \cup \{j''\}) = \emptyset. \quad (2.25)$$

В самом деле, предположим, что, напротив, $\mathbf{C}_{>}(J \cup \{j'\} \cup \{j''\}) \neq \emptyset$ для некоторых индексов $j' \in J' - J$ и $j'' \in J'' - J$. Тогда найдется максимальная совместная подсистема с мультииндексом $J^* \supseteq J \cup \{j'\} \cup \{j''\}$. Пусть $J^* \in \mathbf{J}'$. Тогда $J'' \in \mathbf{J}''$ и $|J^* \cap J''| \geq |J \cup \{j''\}| = |J| + 1$, что противоречит максимальной совместности мощности $|J|$ мультииндекса J . Случай $J^* \in \mathbf{J}''$, аналогичным образом, ведет к противоречию. Эти противоречия и подтверждают справедливость (2.25).

Зафиксируем два вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_{>}(J')$ и $\mathbf{y} \in \mathbf{C}_{>}(J'')$. Определим множества

$$\mathbf{C}' := \bigcup_{j' \in J' - J} \mathbf{C}_{>}(J \cup \{j'\}) \quad \text{и} \quad \mathbf{C}'' := \bigcup_{j'' \in J'' - J} \mathbf{C}_{>}(J \cup \{j''\}).$$

Отметим, что выполнены включения

$$\mathbf{C}_{>}(J') \subset \mathbf{C}' \subset \mathbf{C}_{>}(J), \quad \mathbf{C}_{>}(J'') \subset \mathbf{C}'' \subset \mathbf{C}_{>}(J), \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset \mathbf{C}_{>}(J). \quad (2.26)$$

Также имеем $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \cap \overline{\mathbf{C}'} = [\mathbf{x}, \mathbf{z}_1]$ и $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \cap \overline{\mathbf{C}''} = [\mathbf{z}_2, \mathbf{y}]$ для некоторых векторов $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Допустим, что $[\mathbf{x}, \mathbf{z}_1] \cap [\mathbf{z}_2, \mathbf{y}] \neq \emptyset$ и зафиксируем вектор $\mathbf{z}^* \in [\mathbf{x}, \mathbf{z}_1] \cap [\mathbf{z}_2, \mathbf{y}] \subset \overline{\mathbf{C}'} \cup \overline{\mathbf{C}''}$. Из определения множеств $\overline{\mathbf{C}'}$ и $\overline{\mathbf{C}''}$ следует, что $\mathbf{z}^* \in \overline{\mathbf{C}_{>}(J \cup \{j'\})} \cap \overline{\mathbf{C}_{>}(J \cup \{j''\})} \subseteq \overline{\mathbf{C}_{>}(j')} \cap \overline{\mathbf{C}_{>}(j'')}$ для некоторых индексов $j' \in J' - J$ и $j'' \in J'' - J$. Поскольку в множестве $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ задающих систему (2.20) векторов, по соглашению, отсутствуют антиподы, имеем $\mathbf{C}_{>}(j') \cap \mathbf{C}_{>}(j'') \neq \emptyset$. Выберем вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_{>}(j') \cap \mathbf{C}_{>}(j'')$. Так как $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in \mathbf{C}_{>}(J)$, выполнено включение $\mathbf{z}^* \in \mathbf{C}_{>}(J)$. Но тогда $\mathbf{z}^* + \varepsilon \mathbf{v} \in \mathbf{C}_{>}(J') \cap \mathbf{C}_{>}(j') \cap \mathbf{C}_{>}(j'')$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, что противоречит (2.25); следовательно, $[\mathbf{x}, \mathbf{z}_1] \cap [\mathbf{z}_2, \mathbf{y}] = \emptyset$ и, значит, $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \neq \emptyset$ и $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \cap (\overline{\mathbf{C}'} \cup \overline{\mathbf{C}''}) = \emptyset$. Рассмотрим вектор $\mathbf{w} \in (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$; для каждого индекса $j' \in J' - J$ имеем $\mathbf{w} \in -\mathbf{C}_{>}(j')$, поскольку иначе $\mathbf{w} \in \overline{\mathbf{C}_{>}(j')} \cap \overline{\mathbf{C}_{>}(J)} = \overline{\mathbf{C}_{>}(\{j'\} \cup J)} \subseteq \overline{\mathbf{C}'}$. Аналогичным образом для каждого индекса $j'' \in J'' - J$ выполнено включение $\mathbf{w} \in -\mathbf{C}_{>}(j'')$. Итак,

$$\mathbf{w} \in -\mathbf{C}_{>}((J' - J) \cup (J'' - J)). \quad (2.27)$$

Согласно Лемме 2.2, $\mathbf{x} \in -\mathbf{C}_{>}([m] - J')$ и $\mathbf{y} \in -\mathbf{C}_{>}([m] - J'')$. Если $([m] - J') \cap ([m] - J'') \neq \emptyset$, то имеем

$$\mathbf{w} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset -\mathbf{C}_{>}(([m] - J') \cap ([m] - J'')). \quad (2.28)$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\begin{aligned} & (([m] - J') \cap ([m] - J'')) \cup (J' - J) \cup (J'' - J) \\ & = ([m] - J') \cup ([m] - J''). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Из (2.27)÷(2.29) следует, что $\mathbf{w} \in \mathbf{C}_>(([m] - J') \cup ([m] - J'')) \neq \emptyset$, что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.3. *Граф МСП $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ системы (2.20) содержит хотя бы один цикл нечетной длины.*

Доказательство. Предположим, что граф $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ не содержит циклов нечетной длины. В таком случае $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ — двудольный, то есть существует разбиение $\mathbf{J} = \mathbf{J}' \dot{\cup} \mathbf{J}''$, $\#\mathbf{J}' > 0$, $\#\mathbf{J}'' > 0$, множества его вершин такое, что никакие вершины из долей \mathbf{J}' и \mathbf{J}'' не связаны ребром. Согласно Лемме 2.6, найдутся мультииндексы МСП $J' \in \mathbf{J}'$ и $J'' \in \mathbf{J}''$ такие, что подсистема с мультииндексом $([m] - J') \cup ([m] - J'')$ совместна. Следовательно, существует подсистема системы \mathfrak{S} с мультииндексом J такая, что $J \supseteq ([m] - J') \cup ([m] - J'')$ и, значит, пары $\{J, J'\}$ и $\{J, J''\}$ — ребра графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$. Поскольку $J \in \mathbf{J}' \dot{\cup} \mathbf{J}'' = [m]$, одно из ребер $\{J, J'\}$ и $\{J, J''\}$ противоречит предположению о двудольности графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$. \square

Доказательство Теоремы 2.3 опирается, в частности, на хорошо известное наблюдение о том, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину (см. об этом, например, в [82, 155]).

Для построения алгоритмов выделения максимальных совместных подсистем системы (2.20) важно знать, в теоретико-графовых терминах, характеристику графов МСП этих систем. Ответ на этот вопрос в случае систем \mathfrak{S} ранга 2 хорошо известен. Прежде чем напомнить его, опишем некоторые дополнительные свойства систем \mathfrak{S} .

Пусть $L \subset [m]$ — мультииндекс совместной подсистемы системы (2.20), то есть $\mathbf{C}_>(L) \neq \emptyset$. Неравенство с индексом $l \in L$ называется следствием подсистемы с мультииндексом $L - \{l\}$, если $\mathbf{C}_>(L - \{l\}) = \mathbf{C}_>(L)$. Обозначим через $\mathbf{mmi}(L) \subseteq L$ минимальный по включению мультииндекс подсистемы системы с мультииндексом L такой, что $\mathbf{C}_>(\mathbf{mmi}(L)) = \mathbf{C}_>(L)$; иными словами, множество $\mathbf{mmi}(L)$, по определению, составлено лишь из таких индексов $i \in [m]$, что подпространства $\mathbf{H}(i)$ представляют собой линейные оболочки $(n - 1)$ -мерных граней конуса $\overline{\mathbf{C}_>(L)}$.

Замечание 2.3. *Если $L \subset [m]$ — мультииндекс совместной подсистемы системы (2.20), то*

$$(i) \quad i \in L - \mathbf{mmi}(L) \iff \mathbf{C}_>(L) = \mathbf{C}_>(L - \{i\});$$

(ii) $i \in \mathbf{mmi}(L) \iff \mathcal{F}(\{i\}, L) \neq \emptyset, \dim \text{lin}(\mathcal{F}(\{i\}, L)) = n - 1.$

Лемма 2.7. *Если J_s и J_t – два различных мультииндекса МСП системы (2.20), то*

$$\mathbf{mmi}(J_s) \cap J_t \neq \emptyset, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{mmi}(J_s) \cap ([m] - J_t) \neq \emptyset. \quad (2.31)$$

Доказательство. Докажем (2.30): предположим, что, напротив, $\mathbf{mmi}(J_s) \cap J_t = \emptyset$. Тогда $\mathbf{mmi}(J_s) \subseteq [m] - J_t$ и $\mathbf{C}_>(J_s) = \mathbf{C}_>([m] - J_t) \supset -\mathbf{C}_>(J_t) \neq \emptyset$. Если $-\mathbf{C}_>(J_t) \cap \mathbf{C}_>(J_s) \neq \emptyset$, то $J_s \cap J_t = \emptyset$, что противоречит Лемме 2.5.

Соотношение (2.31) доказывается сходным образом. \square

Лемма 2.8. *Если J_s и J_t – мультииндексы МСП системы (2.20) такие, что $J_s \cup J_t = [m]$, то есть $\{J_s, J_t\}$ – ребро графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$, то $\emptyset \neq \mathbf{mmi}(J_s) - J_t \subseteq \mathbf{mmi}([m] - J_t)$.*

Доказательство. Согласно Лемме 2.7, $\mathbf{mmi}(J_s) - J_t \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольный индекс $j^* \in \mathbf{mmi}(J_s) - J_t \subseteq J_s - J_t$. Покажем, что $j^* \in \mathbf{mmi}([m] - J_t)$. Предположим, что, напротив, $j^* \in ([m] - J_t) - \mathbf{mmi}([m] - J_t)$. Согласно Замечанию 2.3(i), $\mathbf{C}_>([m] - J_t - \{j^*\}) = \mathbf{C}_>([m] - J_t)$. Поскольку, по условию, $J_s \cup J_t = [m]$, имеем $J_s \supseteq [m] - J_t$. Представим мультииндекс J_s в виде $J_s = (J_s - ([m] - J_t)) \cup ([m] - J_t)$. Тогда $\mathbf{C}_>(J_s) = \mathbf{C}_>(J_s - ([m] - J_t)) \cap \mathbf{C}_>([m] - J_t)$ и, поскольку $\mathbf{C}_>([m] - J_t) = \mathbf{C}_>([m] - J_t - \{j^*\})$ и $j^* \in [m] - J_t$, то $\mathbf{C}_>(J_s) = \mathbf{C}_>(J_s - \{j^*\})$, откуда, согласно Замечанию 2.3(i), получаем $j^* \in J_s - \mathbf{mmi}(J_s)$, что противоречит выбору индекса j^* . \square

Лемма 2.9. *Если \mathfrak{S} – система (2.20) ранга 2 над \mathbb{R}^2 , то степень каждой вершины ее графа МСП $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ равна двум.*

Доказательство. Пусть J_s – произвольная вершина графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$. Не ограничивая общности, будем полагать, что она смежна в $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ с вершинами J_1, J_2, \dots, J_p . Поскольку, по Теореме 2.2(i), $p \geq 2$, нам достаточно показать, что $p \leq 2$. Поскольку $J_i \supseteq [m] - J_s$ для каждого номера i , $1 \leq i \leq p$, выполнены включения

$$\mathbf{C}_>(J_i) \subseteq \mathbf{C}_>([m] - J_s), \quad 1 \leq i \leq p.$$

Далее, согласно Лемме 2.8, $\emptyset \neq \mathbf{mmi}(J_i) - J_s \subseteq \mathbf{mmi}([m] - J_s)$, для каждого номера i , $1 \leq i \leq p$. Для каждого такого номера выберем индекс $t_i \in \mathbf{mmi}(J_i) \cap ([m] - \mathbf{mmi}(J_t)) \neq \emptyset$. Тогда выполнены включения

$$\emptyset \neq \mathcal{F}(\{t_i\}, J_i) \subseteq \mathcal{F}(\{t_i\}, [m] - J_s), \quad 1 \leq i \leq p. \quad (2.32)$$

Покажем, что справедливы импликации

$$i_1 \neq i_2 \implies \mathcal{F}(\{t_{i_1}\}, J_{i_1}) \cap \mathcal{F}(\{t_{i_2}\}, J_{i_2}) \neq \emptyset, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq p. \quad (2.33)$$

Предположим, что, напротив, найдутся различные номера i_1 и i_2 , $1 \leq i_1, i_2 \leq \#\mathbf{J}$ такие, что может быть выбран некоторый вектор $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}(\{t_{i_1}\}, J_{i_1}) \cap \mathcal{F}(\{t_{i_2}\}, J_{i_2})$, $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$, то есть $\mathbf{x}^* \in \mathbf{H}(t_{i_1}) \cap \mathbf{C}_>(J_{i_1} - \{t_{i_1}\}) \cap \mathbf{H}(t_{i_2}) \cap \mathbf{C}_>(J_{i_2} - \{t_{i_2}\})$. Поскольку $n = 2$, то $\mathbf{H}(i_1) = \mathbf{H}(i_2)$ при $i_1 \neq i_2$, что невозможно, поскольку каждая подсистема из двух неравенств системы \mathfrak{S} , по определению, имеет ранг 2.

Так как $\emptyset \neq \mathbf{C}_>([m] - J_s) \subset \mathbb{R}^2$, границу конуса $\overline{\mathbf{C}_>([m] - J_s)}$ можно представить в виде объединения двух лучей, \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 , исходящих из точки $\mathbf{0}$; поэтому $\mathcal{F}(\{j\}, [m] - J_s) \subseteq \mathbf{l}_1 \cup \mathbf{l}_2$, для каждого индекса $j \in \mathbf{mmi}([m] - J_s)$. Для каждого номера i , $1 \leq i \leq p$, непустая грань $\mathcal{F}(\{t_i\}, J_i)$ представляет собой луч, исходящий из точки $\mathbf{0}$ и не содержащий ее. Из (2.32) следует, что для каждого номера i , $1 \leq i \leq p$, выполняется лишь одно из двух равенств $\mathcal{F}(\{t_i\}, J_i) = \mathbf{l}_1 - \{\mathbf{0}\}$ и $\mathcal{F}(\{t_i\}, J_i) = \mathbf{l}_2 - \{\mathbf{0}\}$, откуда, с учетом (2.33), следует, что $p \leq 2$. \square

Утверждение 2.11. *Некоторый граф изоморфен графу МСП $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ системы \mathfrak{S} ранга 2 над \mathbb{R}^2 тогда и только тогда, когда этот граф представляет собой простой цикл нечетной длины q , $3 \leq q \leq t$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть задана произвольная система (2.20) из t неравенств над \mathbb{R}^2 . Хорошо известно, что система \mathfrak{S} содержит нечетное, не превосходящее t , количество МСП. Поскольку, по Теореме 2.1, граф $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ связан и, по Лемме 2.9, степень каждой его вершины равна 2, граф $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ представляет собой простой цикл нечетной длины $\#\mathbf{J}$. Достаточность проверяется непосредственным построением, для произвольного нечетного q , $3 \leq q \leq t$, системы (2.20), ранга 2, над \mathbb{R}^2 , из t неравенств. Пусть каждый из векторов $\mathbf{a}'_i \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq q$,

получен поворотом вектора $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ против часовой стрелки на угол $2\pi i/q$. Несовместная система $\mathfrak{S}' := \{\langle \mathbf{a}'_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : i \in [q]\}$, составленная из q неравенств, имеет q максимальные совместные подсистемы, с мультииндексами $J_1 := \{1, 2, \dots, \lfloor q/2 \rfloor + 1\}$, $J_2 := \{2, 3, \dots, \lfloor q/2 \rfloor + 2\}$, \dots , $J_q := \{q, 1, \dots, \lfloor q/2 \rfloor\}$. Соответствующие мультииндексы $\mathbf{mmi}(J_i)$, описывающие одномерные грани замыканий конусов решений максимальных совместных подсистем, — это двухэлементные множества $\mathbf{mmi}(J_1) = \{1, \lfloor q/2 \rfloor + 1\}$, $\mathbf{mmi}(J_2) = \{2, \lfloor q/2 \rfloor + 2\}$, \dots , $\mathbf{mmi}(J_q) = \{q, \lfloor q/2 \rfloor\}$. Отметим, что индекс каждого неравенства системы \mathfrak{S}' встречается в мультииндексах $\mathbf{mmi}(J_i)$ дважды. Граф $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S}')$ — это простой цикл длины q . Выберем величину углового отклонения ε малой настолько, чтобы пополненная система неравенств $\mathfrak{S} := \{\mathfrak{S}', \{\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x} \rangle > 0 : k \in [m - q]\}\}$, в которой задающий вектор \mathbf{a}_k получен из вектора \mathbf{a}'_1 поворотом на угол $k\varepsilon$, отличалась от исходной системы \mathfrak{S}' деформацией конуса решений единственной максимальной совместной подсистемы. По построению, искомая система \mathfrak{S} из m неравенств, с q максимальными совместными подсистемами, имеет граф МСП $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$, изоморфный графу $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S}')$ и представляющий собой простой цикл нечетной длины q . \square

Компонентой доказательства Утверждения 2.11 является важное утверждение, приведенное в работе [106], о том, что количество МСП несовместной системы (2.20) ранга 2 над \mathbb{R}^2 нечетно и не превосходит m .

Напомним, что кратчайшую простую цепь, соединяющую две вершины графа, называют геодезической, а диаметром графа называют максимальную среди длин всех геодезических. Согласно Утверждению 2.11, граф МСП системы (2.20) ранга 2 обладает следующими свойствами: всякое ребро принадлежит простому циклу длины не более m ; граф содержит простой цикл нечетной длины, не превосходящей m ; диаметр графа не превосходит $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

Оказывается, аналогичными свойствами обладают также графы МСП систем \mathfrak{S} произвольного ранга n . Прежде чем убедиться в этом, обратимся к полупространствам, определяемым неравенствами системы (2.20), и докажем вспомогательное утверждение.

Рассмотрим семейство

$$\{(\mathbf{C}_>(i), \mathbf{C}_<(i)) : i \in [m]\} \quad (2.34)$$

упорядоченных пар открытых полупространств, связанное с системой (2.20), и абстрактный симплицальный комплекс $([m], \Delta^>)$ на множестве вершин $[m]$, определяемый для непустых подсемейств $F \subset [m]$ следующим образом:

$$F \in \Delta^> \iff \bigcap_{f \in F} (\mathbf{C}_>(f), \mathbf{C}_<(f)) \neq (\emptyset, \emptyset).$$

Если \mathbf{S} — подпространство пространства \mathbb{R}^n , то комплекс $([m], \Delta_{\mathbf{S}}^>)$ определяется сходным образом:

$$F \in \Delta_{\mathbf{S}}^> \iff \bigcap_{f \in F} (\mathbf{C}_>(f), \mathbf{C}_<(f)) \cap (\mathbf{S}, \mathbf{S}) \neq (\emptyset, \emptyset); \quad (2.35)$$

в частности, $([m], \Delta^>) := ([m], \Delta_{\mathbb{R}^n}^>)$.

Лемма 2.10. Пусть каждая подсистема мощности k , где $3 \leq k \leq n$, системы (2.20) ранга $n \geq 3$ имеет ранг k .

Рассмотрим произвольное семейство $\{J_{s_1}, J_{s_2}, \dots, J_{s_r}\} \subset \mathbf{J}$, мультииндексов ее МСП, где $1 \leq r \leq \min\{k, n-1\}$.

Найдется $(n-1)$ -мерное подпространство $\mathbf{R} \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее ограничению:

$$L \subset [m], |L| = r \implies \dim(\mathbf{R} \cap \mathbf{H}(L)) = n - r - 1.$$

В графе системы независимости $\text{ISG}([m], \Delta^>)$ найдутся вершины $J_{t_1}^*, J_{t_2}^*, \dots, J_{t_r}^*$ такие, что $J_{t_i}^* = J_{s_i}$, $1 \leq i \leq r$.

Существует гомоморфизм $\psi: \text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^>) \rightarrow \text{ISG}([m], \Delta^>)$ графов систем независимости такой, что для каждой гиперграни $J^* \in \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{R}}^>$ выполнено включение $\psi(J^*) \supseteq J^*$, и для каждого i , $1 \leq i \leq r$, выполнены соотношения $\psi(J_{t_i}^*) = J_{s_i}$ и $\psi^{-1}(J_{s_i}) = \{J_{t_i}^*\}$.

Доказательство. Для произвольного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, определим непрерывное отображение $\varphi_{\mathbf{x}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \mapsto \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}$. Выберем по одному представителю $\mathbf{x}_i \in \mathbf{C}_>(J_{s_i})$, $1 \leq i \leq r$. Поскольку $r \leq n-1$, найдется вектор \mathbf{z}^* такой, что $\|\mathbf{z}^*\| = 1$ и $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{z}^* \rangle = 0$, $1 \leq i \leq r$. Тогда $\varphi_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{z}^*) = \mathbf{x}_i$, $1 \leq i \leq r$, и, значит, $\mathbf{z}^* \in \bigcap_{1 \leq i \leq r} \varphi_{\mathbf{x}_i}^{-1}(\mathbf{x}_i) \subset \mathbf{V} := \bigcap_{1 \leq i \leq r} \varphi_{\mathbf{x}_i}^{-1}(\mathbf{C}_>(J_{s_i})) \neq \emptyset$. Множество \mathbf{V} открыто в силу непрерывности отображений $\varphi_{\mathbf{x}_i}$ и открытости конусов $\mathbf{C}_>(J_{s_i})$,

$1 \leq i \leq r$. Семейство (2.34) удовлетворяет ограничению

$$L \subset [m], |L| = r \implies \dim \mathbf{H}(L) = n - r. \quad (2.36)$$

Для произвольного мультииндекса $L \subseteq [m]$ будем обозначать через $(\mathbf{H}(L))^\perp$ ортогональное дополнение подпространства $\mathbf{H}(L)$ до \mathbb{R}^n ; таким образом, $\mathbb{R}^n = \mathbf{H}(L) \oplus (\mathbf{H}(L))^\perp$. Поскольку $2 \leq r \leq n - 1$, множество $\mathbf{U} := \bigcup_{|L|=r} (\mathbf{H}(L))^\perp$ нигде не плотно в \mathbb{R}^n , следовательно, $\mathbf{V} \cap (\mathbb{R}^n - \mathbf{U}) \neq \emptyset$. Выберем вектор $\mathbf{z} \in \mathbf{V} \cap (\mathbb{R}^n - \mathbf{U})$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Положим $\mathbf{R} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$. Поскольку для любого мультииндекса $L \subseteq [m]$, $|L| = r$, выполняется $\mathbf{z} \notin \mathbf{U}$, то есть $\mathbf{z} \notin (\mathbf{H}(L))^\perp$, то $\mathbf{R} \supsetneq \mathbf{H}(L)$, $L \subseteq [m]$, $|L| = r$, откуда, с учетом (2.36), получаем

$$L \subseteq [m], |L| = r \implies \dim(\mathbf{R} \cap \mathbf{H}(L)) = (n - 1) - r. \quad (2.37)$$

Рассмотрим семейство

$$\{(\mathbf{C}_>(i), \mathbf{C}_<(i)) \cap (\mathbf{R}, \mathbf{R}) : i \in [m]\} \quad (2.38)$$

над $(n - 1)$ -мерным пространством \mathbf{R} и связанный с ним абстрактный симплицальный комплекс $\Delta_{\mathbf{R}}^>$, определенный в (2.35). Поскольку $\mathbf{z} \in \mathbf{V} := \bigcap_{1 \leq i \leq r} \varphi_{\mathbf{x}_i}^{-1}(\mathbf{C}_>(J_{s_i}))$, для каждого i , $1 \leq i \leq r$, выполнены включения $\varphi_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{z}) \in \mathbf{C}_>(J_{s_i})$. Кроме того, $\langle \varphi_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle = 0$, $1 \leq i \leq r$, то есть $\varphi_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{z}) \in \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq r$. Таким образом, $\varphi_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{z}) \in \mathbf{R} \cap \mathbf{C}_>(J_{s_i})$, $1 \leq i \leq r$, и из сравнения семейств (2.34) и (2.38) следует, что подмножество $J_{s_i} \subset [m]$ — гипергрань комплекса $\Delta_{\mathbf{R}}^>$, то есть, в графе $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^>)$ найдутся вершины $J_{t_1}^*, J_{t_2}^*, \dots, J_{t_r}^*$ такие, что $J_{s_i} = J_{t_i}^*$, $1 \leq i \leq r$. Поскольку для любых подмножеств $F \subset [m]$ справедливы импликации $\bigcap_{f \in F} (\mathbf{C}_>(f), \mathbf{C}_<(f)) \cap (\mathbf{R}, \mathbf{R}) \neq (\emptyset, \emptyset) \implies \bigcap_{f \in F} (\mathbf{C}_>(f), \mathbf{C}_<(f)) \neq (\emptyset, \emptyset)$, согласно Утверждению 2.1, существует гомоморфизм $\psi : \text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^>) \rightarrow \text{ISG}([m], \Delta^>)$ такой, что $\psi(J_i^*) \supseteq J_i$, для каждой гипергрань $J_i^* \in \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{R}}^>$. Из максимальности множеств J_{s_i} , $J_{t_i}^*$ и равенств $J_{s_i} = J_{t_i}^*$ для всех i , $1 \leq i \leq r$, следует, что $\psi(J_{t_i}^*) = J_{s_i}$ и $\psi^{-1}(J_{s_i}) = \{J_{t_i}^*\}$, $1 \leq i \leq r$. \square

Утверждение 2.12. *Справедливы следующие утверждения:*

- (i) *всякое ребро графа МСП $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ системы (2.20) принадлежит простому циклу (и, как следствие, граф $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ не имеет мостов) длины не более t ;*

- (ii) граф $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ содержит простой цикл нечетной длины, не превосходящей m ;
- (iii) диаметр графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ не превосходит $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

Доказательство. (i) Доказательство будем вести индукцией по рангу n системы (2.20). Утверждение справедливо при $n = 2$, поскольку, согласно Утверждению 2.11, граф $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ представляет собой простой цикл нечетной длины, не превышающей m .

Предположим, что утверждение верно для произвольной системы (2.20) ранга $n - 1$ над \mathbb{R}^{n-1} , где $n \geq 3$. Рассмотрим семейство (2.34) упорядоченных пар полупространств, связанное с системой \mathfrak{S} ранга n над \mathbb{R}^n ; это семейство удовлетворяет ограничению (2.36). Рассмотрим произвольное ребро графа МСП $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$; не ограничивая общности, будем полагать, что это ребро — пара $\{J_1, J_2\}$. Положим $r := 2 \leq \min\{2, n - 1\}$, и воспользуемся Леммой 2.10 для r мультииндексов J_1 и J_2 МСП системы \mathfrak{S} , которой отвечает семейство (2.34). Пусть \mathbf{R} — $(n - 1)$ -мерное подпространство пространства \mathbb{R}^n ; с ним связано семейство пар полупространств (2.38) и граф системы независимости $\mathbf{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^{\geq})$. Согласно Лемме 2.10, в графе $\mathbf{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^{\geq})$ найдутся вершины $J_{t_1}^*$ и $J_{t_2}^*$ такие, что $J_{t_1}^* = J_1$ и $J_{t_2}^* = J_2$. Поскольку $J_{t_1}^* \cup J_{t_2}^* = J_1 \cup J_2 = [m]$, пара $\{J_{t_1}^*, J_{t_2}^*\}$ является ребром графа $\mathbf{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^{\geq})$. Тогда, по предположению индукции, в графе $\mathbf{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^{\geq})$ найдется простой цикл $(J_{t_1}^*, J_{t_2}^*, \dots, J_{t_p}^*, J_{t_1}^*)$, $3 \leq p \leq m$, содержащий ребро $\{J_{t_1}^*, J_{t_2}^*\}$. Пусть $\psi: \mathbf{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^{\geq}) \rightarrow \mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})$ — гомоморфизм, упоминаемый в Лемме 2.10. Рассмотрим последовательность $(\psi(J_{t_2}^*), \psi(J_{t_3}^*), \dots, \psi(J_{t_p}^*), \psi(J_{t_1}^*))$ вершин графа $\mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})$, изоморфного графу $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$, которая является $(\psi(J_{t_2}^*) \leftrightarrow \psi(J_{t_1}^*))$ -маршрутом, в силу сохранения смежности вершин при гомоморфизме $\psi: \mathbf{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^{\geq}) \rightarrow \mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})$. Поскольку $\psi^{-1}(\psi(J_{t_1}^*)) = \{J_{t_1}^*\}$, $\psi^{-1}(\psi(J_{t_2}^*)) = \{J_{t_2}^*\}$, и $J_{t_1}^*, J_{t_2}^* \notin \{J_{t_3}^*, \dots, J_{t_p}^*\}$, то $\psi(J_{t_1}^*), \psi(J_{t_2}^*) \notin \{\psi(J_{t_3}^*), \dots, \psi(J_{t_p}^*)\}$.

Рассмотрим два возможных случая: 1) $\psi(J_{t_3}^*) = \psi(J_{t_p}^*)$ и 2) $\psi(J_{t_3}^*) \neq \psi(J_{t_p}^*)$.

В случае 1 имеем простой цикл $(\psi(J_{t_1}^*), \psi(J_{t_2}^*), \psi(J_{t_3}^*), \psi(J_{t_1}^*)) = (J_1, J_2, \psi(J_{t_3}^*), J_1)$ длины 3, содержащий ребро $\{J_1, J_2\}$.

В случае 2 из маршрута $(\psi(J_{t_3}^*), \dots, \psi(J_{t_p}^*))$ можно выделить простую цепь $(\psi(J_{t_3}^*), \psi(J_{q_1}^*), \dots, \psi(J_{q_k}^*), \psi(J_{t_p}^*))$, где $(\psi(J_{t_3}^*), \psi(J_{q_1}^*), \dots, \psi(J_{q_k}^*), \psi(J_{t_p}^*)) \subseteq \{\psi(J_{t_3}^*), \psi(J_{t_4}^*), \dots, \psi(J_{t_p}^*)\}$ и, значит, $\psi(J_{t_1}^*), \psi(J_{t_2}^*) \notin (\psi(J_{t_3}^*), \psi(J_{q_1}^*),$

$\dots, \psi(J_{q_k}^*), \psi(J_{t_p}^*)$). Поскольку $k + 2 \leq p - 2$, последовательность $(\psi(J_{t_1}^*), \psi(J_{t_2}^*), \psi(J_{t_3}^*), \psi(J_{q_1}^*), \dots, \psi(J_{q_k}^*), \psi(J_{t_p}^*), \psi(J_{t_1}^*))$ представляет простой цикл длины $k + 4 \leq p \leq m$ и содержит ребро $\{\psi(J_{t_1}^*), \psi(J_{t_2}^*)\} = \{J_1, J_2\}$, что и требовалось доказать.

(ii) Напомним, что существование цикла нечетной длины в графе $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ было доказано нами в Теореме 2.3. Покажем здесь, используя сходные аргументы, что существует такой цикл длины, не превышающей m . В случае системы (2.20) ранга 2 граф $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ как раз и представляет собой такой цикл, — см. Утверждение 2.11. Рассуждая по индукции, предположим, что утверждение верно для всех систем ранга $n - 1 \geq 2$. Выберем в \mathbb{R}^n произвольное $(n - 1)$ -мерное подпространство \mathbf{R} ; затем, как и при доказательстве утверждения (i), обратимся к Лемме 2.10 в ситуации, когда $r := 2 \leq \min\{2, n - 1\}$. Выберем в графе $\mathbf{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^{\geq})$ произвольный содержащийся в нем, по предположению индукции, цикл $(J_{t_1}^*, J_{t_2}^*, \dots, J_{t_p}^*, J_{t_1}^*)$ нечетной длины p , такой, что $3 \leq p \leq m$. Воспользуемся обозначениями $\mathbf{Z}^* := \{J_{t_1}^*, J_{t_2}^*, \dots, J_{t_p}^*\}$ и $\mathbf{Z} := \{\psi(J_{t_1}^*), \psi(J_{t_2}^*), \dots, \psi(J_{t_p}^*)\}$ и покажем, что индуцированный подграф $\mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})\langle \mathbf{Z} \rangle$ графа $\mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})$ содержит простой цикл нечетной длины, не превосходящей m .

Вначале предположим, что подграф $\mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})\langle \mathbf{Z} \rangle$ вообще не содержит простого цикла нечетной длины, то есть он двудобен. Тогда найдется разбиение $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \dot{\cup} \mathbf{Z}_2$, $\#\mathbf{Z}_1 > 0$, $\#\mathbf{Z}_2 > 0$, такое, что индуцированные подграфы $\mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})\langle \mathbf{Z}_1 \rangle$ и $\mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})\langle \mathbf{Z}_2 \rangle$ безреберны. В таком случае семейство \mathbf{Z}^* разбивается на два непустых подсемейства $\psi^{-1}(\mathbf{Z}_1) \cap \mathbf{Z}^*$ и $\psi^{-1}(\mathbf{Z}_2) \cap \mathbf{Z}^*$, объединение которых есть \mathbf{Z}^* . При гомоморфизме ψ ребро $\{J_{t_i}^*, J_{t_j}^*\}$ отображается в ребро $\{\psi(J_{t_i}^*), \psi(J_{t_j}^*)\}$; в самом деле, ситуация $\psi(J_{t_i}^*) = \psi(J_{t_j}^*)$ невозможна — это означало бы, что $\psi(J_{t_i}^*) \cup \psi(J_{t_j}^*) \neq [m]$, то есть противоречило бы условию, согласно которому отображение ψ — гомоморфизм. Тогда из безреберности подграфов $\mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})\langle \mathbf{Z}_1 \rangle$ и $\mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})\langle \mathbf{Z}_2 \rangle$ следует, что подграфы $\mathbf{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^{\geq})\langle \psi^{-1}(\mathbf{Z}_1) \cap \mathbf{Z}^* \rangle$ и $\mathbf{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^{\geq})\langle \psi^{-1}(\mathbf{Z}_2) \cap \mathbf{Z}^* \rangle$ также безреберны, что невозможно, поскольку подграф $\mathbf{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^{\geq})\langle \mathbf{Z}^* \rangle$ содержит простой цикл нечетной длины. Следовательно, подграф $\mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})\langle \mathbf{Z} \rangle$ и, стало быть, сам граф $\mathbf{ISG}([m], \Delta^{\geq})$, изоморфный графу $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$, содержит простой цикл нечетной длины, не превосходящей m , поскольку $|\mathbf{Z}| \leq |\mathbf{Z}^*| \leq p \leq m$, что и требовалось доказать.

(iii) При доказательстве (i) и (ii) упоминалось, что утверждение верно для любой системы \mathfrak{S} ранга 2, — см. Утверждение 2.11. Предположим, что оно верно для любой системы \mathfrak{S} ранга $n - 1$, где $n - 1 \geq 2$. Рассмотрим семейство (2.34) и связанный с ним граф системы независимости $\text{ISG}([m], \Delta^>)$, изоморфный графу $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$. Пусть J_{s_1} и J_{s_2} — произвольные вершины графа $\text{ISG}([m], \Delta^>)$. Покажем, что они связаны простой цепью длины, не превосходящей $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Учитывая, что семейство (2.34) удовлетворяет ограничению (2.36), положим $r := 2 \leq \min\{2, n - 1\}$ и воспользуемся Леммой 2.10 для семейства (2.34) и выделенных вершин J_{s_1} и J_{s_2} графа $\text{ISG}([m], \Delta^>)$. Пусть \mathbf{R} — $(n - 1)$ -мерное подпространство пространства \mathbb{R}^n и (2.38) — связанное с ним семейство пар полупространств, которому, в свою очередь, отвечает граф системы независимости $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^>)$. Пусть $\psi: \text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^>) \rightarrow \text{ISG}([m], \Delta^>)$ — упомянутый в Лемме 2.10 гомоморфизм графов. Согласно этой лемме, в графе $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^>)$ найдутся вершины $J_{t_1}^*$ и $J_{t_2}^*$ такие, что $J_{t_1}^* = J_{s_1}$, $J_{t_2}^* = J_{s_2}$, и $\psi(J_{t_1}^*) = J_{s_1}$, $\psi(J_{t_2}^*) = J_{s_2}$. По предположению индукции, в графе $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{R}}^>)$ найдется простая $(J_{t_1}^* \leftrightarrow J_{t_2}^*)$ -цепь длины $p \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. При гомоморфизме ψ эта цепь отображается в $(\psi(J_{t_1}^*) \leftrightarrow \psi(J_{t_2}^*))$ -маршрут в графе $\text{ISG}([m], \Delta^>)$, содержащий $p \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ ребер. Из него можно выделить простую $(\psi(J_{t_1}^*) \leftrightarrow \psi(J_{t_2}^*))$ -цепь, содержащую не более $p \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ ребер и связывающую вершины J_{s_1} и J_{s_2} , поскольку $\psi(J_{t_1}^*) = J_{s_1}$ и $\psi(J_{t_2}^*) = J_{s_2}$, что и завершает доказательство утверждения. \square

В доказательстве Утверждения 2.12(iii) упоминается обоснованное в [82] наблюдение, согласно которому в маршруте между двумя вершинами графа можно выделить соединяющую эти вершины простую цепь.

При построении алгоритмов выделения максимальных совместных подсистем системы (2.20), с использованием ее графа МСП $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$, важную роль играют свойства графа $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$, характеризующие его тип связности. Оказывается, что граф МСП системы \mathfrak{S} , при некоторых условиях, обладает более сильным типом связности, чем просто связность, подтверждаемая Теоремой 2.1.

Обратимся к вспомогательному утверждению, касающемуся степеней вершин в $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$, которое дополняет Теорему 2.2.

Утверждение 2.13. Пусть для некоторого k , $1 \leq k \leq n - 1$, каждая подсистема из $k + 1$ неравенств системы (2.20) совместна. Тогда степень любой вершины J_s в графе $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ не меньше $k + 1$.

Приведем доказательство Утверждения 2.13. Для этого приведем сначала доказательства нескольких самостоятельных утверждений, приводящих к сформулированному в Утверждении 2.13 результату.

(А) Пусть каждая подсистема из $k + 1$ неравенств, где $1 \leq k \leq n - 1$, системы (2.20) совместна, $J_s \in \mathbf{J}$ — мультииндекс некоторой ее МСП, и $\mathcal{F}(L, J_s)$ — произвольная $(n - k)$ -мерная грань конуса $\overline{\mathbf{C}}_{>}(J_s)$.

Выполнены включения

$$-\mathcal{F}(L, J_s) \subset \mathbf{C}_{>}([m] - J_s) \quad (2.39)$$

и соотношение $\mathbf{C}_{>}([m] - J_s) \cap \mathbf{C}_{>}(L) \neq \emptyset$.

Доказательство. Покажем сначала, что выполнено включение (2.39). Предположим, что, напротив, найдется индекс $j_0 \in [m] - J_s$ такой, что $-\mathcal{F}(L, J_s) \not\subset \mathbf{C}_{>}(j_0)$. Напомним, что дополнение мультииндекса всякой максимальной совместной подсистемы системы \mathfrak{S} до множества индексов $[m]$ является мультииндексом совместной подсистемы. Поэтому $-\mathcal{F}(L, J_s) \subset \overline{-\mathbf{C}}_{>}(J_s) \subseteq \overline{\mathbf{C}}_{>}([m] - J_s) \subseteq \overline{\mathbf{C}}_{>}(j_0)$. Таким образом, возможны лишь два случая: 1) $-\mathcal{F}(L, J_s) \cap \mathbf{C}_{>}(j_0) \neq \emptyset$ и 2) $-\mathcal{F}(L, J_s) \cap \mathbf{C}_{>}(j_0) = \emptyset$ и, следовательно, $-\mathcal{F}(L, J_s) \subset \mathbf{H}(j_0)$.

1) Рассмотрим первый случай и выберем два вектора $\mathbf{x}^* \in -\mathcal{F}(L, J_s) \cap \mathbf{C}_{>}(j_0)$ и $\mathbf{y}^* \in -\mathcal{F}(L, J_s) \cap \mathbf{H}_{>}(j_0)$. При $\lambda > 0$ выполняется включение $\mathbf{z}^* := -\lambda \mathbf{x}^* + (1 + \lambda) \mathbf{y}^* \in -\mathbf{C}_{>}(j_0)$. Поскольку $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in -\mathcal{F}(L, J_s)$ и множество $-\mathcal{F}(L, J_s)$ выпукло и открыто относительно подпространства $\mathbf{H}(L)$, то и $\mathbf{z}^* \in -\mathcal{F}(L, J_s) \subseteq \overline{-\mathbf{C}}_{>}(J_s)$ при достаточно малом $\lambda > 0$. Таким образом, $\mathbf{z}^* \in -\mathbf{C}_{>}(j_0) \cap \overline{-\mathbf{C}}_{>}(J_s)$; следовательно, $\mathbf{C}_{>}(j_0) \cap \mathbf{C}_{>}(J_s) \neq \emptyset$, что противоречит максимальной совместности подсистемы с мультииндексом J_s .

2) Рассмотрим второй случай, то есть $-\mathcal{F}(L, J_s) \subset \mathbf{H}(j_0)$. Поскольку множество $-\mathcal{F}(L, J_s)$ открыто относительно подпространства $\mathbf{H}(L)$, то $\mathbf{H}(L) \subseteq \mathbf{H}(j_0)$, то есть ранг подсистемы с мультииндексом $L \cup \{j_0\}$ равен рангу подсистемы с мультииндексом L , а именно k . Поскольку, по условию, в системе \mathfrak{S} каждая подсистема из $k + 1$ неравенств совместна, подсистема с

мультииндексом $L \cup \{j_0\}$ ранга k также совместна, то есть $\mathbf{C}_>(L \cup \{j_0\}) \neq \emptyset$. По определению, $\mathcal{F}(L, J_s) \subset \mathbf{C}_>(J_s - L)$. С другой стороны, пользуясь Леммой 2.1(i) для мультииндекса $L \cup \{j_0\}$, получаем $\mathcal{F}(L, J_s) \subset \mathbf{H}(L) = \mathbf{H}(L \cup \{j_0\}) \subseteq \overline{\mathbf{C}_>(L \cup \{j_0\})}$. Таким образом, $\mathbf{C}_>(J_s - L) \cap \overline{\mathbf{C}_>(L \cup \{j_0\})} \supseteq \mathcal{F}(L, J_s) \neq \emptyset$ или $\mathbf{C}_>(J_s \cup \{j_0\}) \neq \emptyset$, что противоречит максимальной совместности подсистемы с мультииндексом J_s .

Тем самым, включение (2.39) доказано.

Поскольку $-\mathcal{F}(L, J_s) \subset \mathbf{H}(L) \subseteq \overline{\mathbf{C}_>(L)}$, то $\overline{\mathbf{C}_>(L)} \cap \mathbf{C}_>([m] - J_s) \supseteq -\mathcal{F}(L, J_s) \neq \emptyset$ и, значит, $\mathbf{C}_>(L) \cap \mathbf{C}_>([m] - J_s) \neq \emptyset$, что и завершает доказательство утверждения (A). \square

(B) Пусть $\mathbf{A} := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} \subset \mathbb{R}^n$, $p \geq 2$; выберем два вектора $\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^* \in \text{pos } \mathbf{A}$, $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{z}^*$, $\mathbf{x}^* \in (\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$. Пусть $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ — вектор такой, что $\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{b} \rangle > 0$ и $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \geq 0$, для каждого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$.

Тогда $\text{pos } \mathbf{A} \subseteq \text{pos}(\mathbf{A} \cup \{\mathbf{y}^*\} - \{\mathbf{x}^*\})$.

Доказательство. Покажем, что $\mathbf{z}^* \in \text{pos}(\mathbf{A} \cup \{\mathbf{y}^*\} - \{\mathbf{x}^*\})$.

Если $\mathbf{z}^* \in \mathbf{A}$, то $\mathbf{z}^* \in \mathbf{A} \cup \{\mathbf{y}^*\} - \{\mathbf{x}^*\}$, поскольку $\mathbf{z}^* \neq \mathbf{x}^*$.

Если $\mathbf{x}^* \notin \mathbf{A}$, то $\text{pos}(\mathbf{A} - \{\mathbf{x}^*\}) = \text{pos } \mathbf{A}$ и $\mathbf{z}^* \in \text{pos}(\mathbf{A} \cup \{\mathbf{y}^*\} - \{\mathbf{x}^*\})$.

Пусть теперь $\mathbf{z}^* \notin \mathbf{A}$ и $\mathbf{x}^* \in \mathbf{A}$, — положим, для определенности, $\mathbf{x}^* = \mathbf{a}_1$.

Тогда справедливо выражение

$$\mathbf{z}^* = \alpha_1 \mathbf{x}^* + \sum_{i=2}^p \alpha_i \mathbf{a}_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq p. \quad (2.40)$$

Если $\alpha_1 = 0$, то $\mathbf{z}^* \in \text{pos}(\mathbf{A} - \{\mathbf{x}^*\}) \subseteq \text{pos}(\mathbf{A} \cup \{\mathbf{y}^*\} - \{\mathbf{x}^*\})$.

Пусть $\alpha_1 > 0$. Поскольку $\mathbf{x}^* = \mu \mathbf{z}^* + (1 - \mu) \mathbf{y}^*$, для некоторого μ , $0 < \mu < 1$, из (2.40) следует, что

$$\mathbf{z}^*(1 - \alpha_1 \mu) = \alpha_1(1 - \mu) \mathbf{y}^* + \sum_{i=2}^p \alpha_i \mathbf{a}_i, \quad \alpha_1 > 0, \quad 0 < \mu < 1. \quad (2.41)$$

Умножая обе части выражения (2.41) скалярно на вектор \mathbf{b} , получаем

$$(1 - \alpha_1 \mu) \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{b} \rangle = \alpha_1(1 - \mu) \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{b} \rangle + \sum_{i=2}^p \alpha_i \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b} \rangle. \quad (2.42)$$

Правая часть в (2.42) строго положительна, поскольку $\alpha_1(1 - \mu)\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{b} \rangle > 0$, и для всех i , $2 \leq i \leq p$, выполнены соотношения $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b} \rangle \geq 0$.

Поскольку $\mathbf{z}^* \in \text{pos } \mathbf{A}$, то $\langle \mathbf{z}^*, \mathbf{b} \rangle \geq 0$ и, следовательно, $1 - \alpha_1\mu > 0$. Поделив обе части (2.41) на $1 - \alpha_1\mu$, получим, что $\mathbf{z}^* \in \text{pos}(\mathbf{A} \cup \{\mathbf{y}^*\} - \{\mathbf{x}^*\})$; из этого включения вытекает, что $\mathbf{x}^* \in (\mathbf{z}^*, \mathbf{y}^*) \subset \text{pos}(\mathbf{A} \cup \{\mathbf{y}^*\} - \{\mathbf{x}^*\})$ и, следовательно, $\text{pos } \mathbf{A} \subseteq \text{pos}(\mathbf{A} \cup \{\mathbf{y}^*\} - \{\mathbf{x}^*\})$. Таким образом, утверждение (B) доказано. \square

Напомним два определения (терминология, касающаяся освещенности выпуклых тел, заимствована из [15]).

Определение 2.3. Пусть $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело. Точка $\mathbf{x}^* \in \text{bd } \mathbf{M}$ называется освещенной извне источником $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n$, если найдется точка $\mathbf{z}^* \in \text{int } \mathbf{M}$ такая, что $\mathbf{x}^* \in (\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$.

Определение 2.4. Множество $\mathbf{B} \subset \text{bd } \mathbf{M}$ называется освещенным извне семейством источников $\mathbf{N} \subset \mathbb{R}^n$, если каждая точка освещена извне хотя бы одним источником $\mathbf{y}^* \in \mathbf{N}$.

(C) Рассмотрим систему (2.20). Пусть $M \subset [m]$, $M \neq \emptyset$, $\mathbf{C}_>(M) \neq \emptyset$, $L \neq \emptyset$ и $\mathcal{F}(L, M)$ — грань размерности r , $0 \leq r \leq n - 1$, конуса $\overline{\mathbf{C}_>(M)}$. Точка $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}(L, M)$ освещена извне источником $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{y}^* \in -\mathbf{C}_>(L)$.

Доказательство. Покажем необходимость. Пусть точка $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}(L, M) \neq \emptyset$ освещена извне источником \mathbf{y}^* , то есть найдется точка $\mathbf{z}^* \in \mathbf{C}_>(M) \subseteq \mathbf{C}_>(L)$ такая, что $\mathbf{x}^* \in (\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$, то есть $\mathbf{x}^* = \alpha\mathbf{z}^* + (1 - \alpha)\mathbf{y}^*$, где $0 < \alpha < 1$. Далее, $\mathbf{x}^* \in \mathbf{H}(L) \cap \mathbf{C}_>(M - L)$, $\mathbf{z}^* \in \mathbf{C}_>(M)$. Следовательно, для $\mathbf{y}^* = \frac{1}{1 - \alpha}\mathbf{x}^* - \frac{\alpha}{1 - \alpha}\mathbf{z}^*$ имеем $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y}^* \rangle = \frac{1}{1 - \alpha}\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle - \frac{\alpha}{1 - \alpha}\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{z}^* \rangle < 0$, для каждого индекса $i \in L$, то есть $\mathbf{y}^* \in -\mathbf{C}_>(L)$.

Покажем достаточность. Пусть $\mathbf{y}^* \in -\mathbf{C}_>(L)$, $\mathbf{x}^* \in \mathbf{H}(L) \cap \mathbf{C}_>(M - L)$. Рассмотрим вектор $\mathbf{z}^* := -\varepsilon\mathbf{y}^* + (1 + \varepsilon)\mathbf{x}^*$, где $\varepsilon > 0$. Тогда $-\varepsilon\mathbf{y}^* \in \mathbf{C}_>(L)$ и $(1 + \varepsilon)\mathbf{x}^* \in \mathbf{H}(L) \cap \mathbf{C}_>(M - L) \subseteq \overline{\mathbf{C}_>(L)}$; следовательно, $\mathbf{z}^* \in \mathbf{C}_>(L)$ при любом $\varepsilon > 0$, и $\mathbf{z}^* \in \mathbf{C}_>(M - L)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$; поэтому $\mathbf{z}^* \in \mathbf{C}_>(M)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mathbf{x}^* = \frac{1}{1 + \varepsilon}\mathbf{z}^* + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\mathbf{y}^*$, где $\varepsilon > 0$, то $\mathbf{x}^* \in (\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$, то есть точка \mathbf{x}^* освещена извне источником \mathbf{y}^* . \square

(D) Пусть для некоторого k , $1 \leq k \leq n - 1$, каждая подсистема из $k + 1$ неравенств системы (2.20) совместна, J_s — мультииндекс некоторой ее

максимальной совместной подсистемы, q — степень вершины J_s в графе МСП $\text{MFSG}(\mathfrak{G})$, $\mathcal{N}(J_s) := \{J_{s_1}, \dots, J_{s_q}\}$ — окрестность вершины J_s в графе $\text{MFSG}(\mathfrak{G})$, и $\mathbf{y}_i^* \in -\mathbf{C}_{>}(J_{s_i})$ — некоторые представители множеств $-\mathbf{C}_{>}(J_{s_i})$, $1 \leq i \leq q$.

Всякая $(n - k)$ -мерная грань $\mathcal{F}(L, J_s)$ конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(J_s)}$ освещена извне семейством источников $\mathbf{N} := \{\mathbf{y}_i^* : 1 \leq i \leq q\}$.

Доказательство. В условиях утверждения (D) для $(n - k)$ -мерной грани $\mathcal{F}(L, J_s)$ конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(J_s)}$, согласно утверждению (A), выполняется $\mathbf{C}_{>}([m] - J_s) \cap \mathbf{C}_{>}(L) \neq \emptyset$. Следовательно, найдется МСП с мультииндексом $J_p \supseteq ([m] - J_s) \cup L$, и поскольку $J_p \cup J_s = [m]$, то $J_p \in \{J_{s_i} : 1 \leq i \leq q\}$. Пусть, для определенности, $J_p = J_{s_1}$. Тогда $\mathbf{y}_{s_1}^* \in -\mathbf{C}_{>}(J_{s_1}) = -\mathbf{C}_{>}(J_p) \subseteq -\mathbf{C}_{>}(L)$ и, согласно утверждению (C), грань $\mathcal{F}(L, J_s)$ освещена извне источником $\mathbf{y}_{s_1}^* \in \mathbf{N}$, что и завершает доказательство. \square

(E) Рассмотрим систему (2.20). Пусть $\emptyset \neq M \subset [m]$, $\mathbf{C}_{>}(M) \neq \emptyset$, $r := \dim \mathbf{H}(M) < n - 1$, и все $(r + 1)$ -мерные грани конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(M)}$ освещены извне семейством источников \mathbf{N} , причем найдется вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{b} \rangle > 0$, для каждого $\mathbf{y}^* \in \mathbf{N}$, и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle \geq 0$, для каждого $\mathbf{c} \in \overline{\mathbf{C}_{>}(M)}$.

Тогда $\overline{\mathbf{C}_{>}(M)} \subseteq \text{pos}(\mathbf{H}(M) \cup \mathbf{N})$.

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r \in \mathbf{H}(M)$ представляют собой базис подпространства $\mathbf{H}(M)$ и рассмотрим вектор $\mathbf{b}_0 := -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - \dots - \mathbf{b}_r$. Обозначим $\mathbf{B} := \{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\}$. Выберем из каждой $(r + 1)$ -мерной грани $\mathcal{F}(L, M)$ конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(M)}$ по одному представителю $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}(L, M)$ и сформируем множество $\{\mathbf{x}_j : 1 \leq j \leq l\}$, содержащее эти и только эти точки. Пусть l — количество $(r + 1)$ -мерных граней конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(M)}$. Отметим, что $l > 0$, так как $\dim \mathbf{H}(M) = r$ и $\mathbf{C}_{>}(M) \neq \emptyset$. Известно, что

$$\mathbf{C}_{>}(M) = \text{pos}(\mathbf{B} \cup \{\mathbf{x}_j^* : 1 \leq j \leq l\}). \quad (2.43)$$

По условию, множество $\{\mathbf{x}_j^* : 1 \leq j \leq l\}$ освещено извне семейством источников \mathbf{N} . Каждой точке \mathbf{x}_j^* , $1 \leq j \leq l$, поставим в соответствие источник \mathbf{y}_j^* , который освещает точку \mathbf{x}_j^* извне. Тогда, по определению освещенности извне, для каждого номера j , $1 \leq j \leq l$, найдется точка $\mathbf{z}_j^* \in \mathbf{C}_{>}(M)$ такая, что

$$\mathbf{x}_j^* \in (\mathbf{z}_j^*, \mathbf{y}_j^*). \quad (2.44)$$

По условию утверждения, имеем

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{C}_>(M) \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{y}_j^*, \mathbf{b} \rangle > 0, \quad 1 \leq j \leq l.$$

Кроме того,

$$\mathbf{x}_j^* \neq \mathbf{y}_j^*, \quad 1 \leq i, j \leq l \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_j^* \notin \mathbf{H}(M), \quad 1 \leq i \leq l. \quad (2.45)$$

Пользуясь утверждением (С) и соотношениями (2.43), (2.44) и (2.45), выпишем цепочку включений

$$\begin{aligned} \text{pos}(\mathbf{H}(M) \cup \{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_{l-1}^*, \mathbf{x}_l^*\}) \\ \subseteq \text{pos}(\mathbf{H}(M) \cup \{\mathbf{y}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_{l-1}^*, \mathbf{x}_l^*\}) \\ \subseteq \dots \subseteq \text{pos}(\mathbf{H}(M) \cup \{\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \dots, \mathbf{y}_{l-1}^*, \mathbf{x}_l^*\}) \\ \subseteq \text{pos}(\mathbf{H}(M) \cup \{\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \dots, \mathbf{y}_{l-1}^*, \mathbf{y}_l^*\}) \\ \subseteq \text{pos}(\mathbf{H}(M) \cup \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Из соотношений (2.43) и (2.46) следует включение $\overline{\mathbf{C}_>(M)} \subseteq \text{pos}(\mathbf{H}(M) \cup \mathbf{N})$, которое завершает доказательство. \square

Пусть J_s — мультииндекс произвольной максимальной совместной подсистемы системы (2.20), q — степень вершины J_s в графе МСП MFSG(\mathfrak{G}) этой системы, $\mathcal{N}(J_s) := \{J_{s_1}, \dots, J_{s_q}\}$ — окрестность вершины J_s в графе MFSG(\mathfrak{G}), и $\mathbf{y}_i^* \in -\mathbf{C}_>(J_{s_i})$ — некоторые представители открытых конусов $-\mathbf{C}_>(J_{s_i})$, $1 \leq i \leq q$. Пусть r_0 — наименьшее целое такое, что все r_0 -мерные грани конуса $\overline{\mathbf{C}_>(J_s)}$ освещены извне множеством источников $\{\mathbf{y}_i^* : 1 \leq i \leq q\}$. Поскольку, согласно утверждению (D), все $(n - k)$ -мерные грани конуса $\overline{\mathbf{C}_>(J_s)}$ освещены извне множеством источников $\{\mathbf{y}_i^* : 1 \leq i \leq q\}$, то $r_0 \leq n - k \in [n - 1]$.

Справедливо следующее утверждение.

(F) В условиях Утверждения 2.13, найдется конус $\overline{\mathbf{C}_>(M)}$, $M \subseteq J_s$, такой, что $\dim \mathbf{H}(M) = r_0 - 1$, все r_0 -мерные грани конуса $\overline{\mathbf{C}_>(M)}$ освещены извне семейством источников $\mathbf{N} := \{\mathbf{y}_i^* : 1 \leq i \leq q\}$, и найдется вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{b} \rangle > 0$ для каждого $\mathbf{y}^* \in \mathbf{N}$, и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle \geq 0$ для каждого $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_>(M)$.

Доказательство. Согласно Лемме 2.5, $J_{s_i} \cap J_s \neq \emptyset$, для любого i , $1 \leq i \leq q$; поэтому $\overline{\mathbf{C}_>(J_{s_i})} \cap -\mathbf{C}_>(J_s) \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq q$. Следовательно, $\{\mathbf{y}_i^* : 1 \leq i \leq$

$q\} \cap -\mathbf{C}_>(J_s) = \emptyset$, и поэтому, в силу утверждения (С), грань $\mathcal{F}(J_s, J_s) = \mathbf{H}(J_s)$ размерности $\dim \mathbf{H}(J_s)$ не освещена извне семейством источников $\{\mathbf{y}_i^*: 1 \leq i \leq q\}$. Поскольку грань $\mathcal{F}(J_s, J_s) = \mathbf{H}(J_s)$ имеет размерность, минимальную среди всех граней конуса $\overline{\mathbf{C}_>(M)}$, то $r_0 > \dim \mathbf{H}(J_s)$ и, по определению величины r_0 , найдется $(r_0 - 1)$ -мерная грань $\mathcal{F}(M, J_s)$ конуса $\overline{\mathbf{C}_>(J_s)}$, которая не освещена извне семейством источников $\{\mathbf{y}_i^*: 1 \leq i \leq q\}$. Покажем, что конус $\overline{\mathbf{C}_>(M)}$ удовлетворяет утверждению (Е). Покажем, что

$$\mathcal{F}(M, J_s) \cap -\mathbf{C}_>([m] - J_s) = \emptyset. \quad (2.47)$$

Предположим обратное. Тогда, поскольку $\mathcal{F}(M, J_s) \subset \mathbf{H}(M)$, то $\mathbf{H}(M) \cap \mathbf{C}_>([m] - J_s) \neq \emptyset$ и, согласно Лемме 2.1(ii), $\mathbf{C}_>(M) \cap \mathbf{C}_>([m] - J_s) \neq \emptyset$, откуда заключаем, что найдется максимальная совместная подсистема с мультииндексом $J_p \supseteq M \cup ([m] - J_s)$. Поскольку $J_p \cup J_s = [m]$, то $J_p \in \{J_{s_1}, \dots, J_{s_q}\}$. Пусть, для определенности, $J_p = J_{s_1}$. Тогда грань $\mathcal{F}(M, J_s)$ освещена извне источником $\mathbf{y}_{s_1}^* \in -\mathbf{C}_>(J_{s_1}) \subseteq -\mathbf{C}_>(M)$, что противоречит выбору грани $\mathcal{F}(M, J_s)$. Полученное противоречие доказывает (2.47).

С другой стороны, $\mathcal{F}(M, J_s) \subset \overline{\mathbf{C}_>(J_s)} \subset -\overline{\mathbf{C}_>([m] - J_s)}$. С учетом (2.47) имеем $\mathcal{F}(M, J_s) \subseteq -\overline{\mathbf{C}_>([m] - J_s)} - (-\mathbf{C}_>([m] - J_s))$. Поскольку $-\overline{\mathbf{C}_>([m] - J_s)} - (-\mathbf{C}_>([m] - J_s)) \subset \bigcup_{j \in [m] - J_s} \mathbf{H}(j)$, то имеет место включение $\mathcal{F}(M, J_s) \subset \bigcup_{j \in [m] - J_s} \mathbf{H}(j)$ и, значит, найдется индекс $j_0 \in [m] - J_s$ такой, что $\mathcal{F}(M, J_s) \cap \mathbf{H}(j_0) \neq \emptyset$. Покажем, что $\mathbf{C}_>(M) \cap \mathbf{C}_>(j_0) = \emptyset$. Предположим, что, напротив, $\mathbf{C}_>(M) \cap \mathbf{C}_>(j_0) \neq \emptyset$. Тогда из соотношений $\mathcal{F}(M, J_s) \cap \mathbf{H}(j_0) = \mathbf{H}(M) \cap \mathbf{C}_>(J_s - M) \cap \mathbf{H}(j_0) \neq \emptyset$ и $\mathbf{C}_>(M) \cup \{j_0\} \neq \emptyset$, согласно Лемме 2.1(ii), получаем, что $\mathbf{C}_>(M) \cap \mathbf{C}_>(J_s - M) \cap \mathbf{C}_>(j_0) = \mathbf{C}_>(J_s \cup \{j_0\}) \neq \emptyset$, $j_0 \in [m] - J_s$, в противоречии с максимальностью совместной подсистемы с мультииндексом J_s . Итак, $\mathbf{C}_>(M) \cap \mathbf{C}_>(j_0) = \emptyset$. Поскольку $\mathbf{C}_>(M) \cap \mathbf{C}_>(j_0) = \emptyset$ и множества $\mathbf{C}_>(M)$ и $\mathbf{C}_>(j_0)$ открыты в \mathbb{R}^n , то $\mathbf{C}_>(M) \cap \overline{\mathbf{C}_>(j_0)} = \emptyset$. Следовательно, $\mathbf{C}_>(M) \subset -\mathbf{C}_>(j_0)$. Поскольку $\mathbf{C}_>(M) \subset -\mathbf{C}_>(j_0)$ и $-\mathbf{C}_>(J_{s_i}) \subset -\mathbf{C}_>([m] - J_s) \subseteq -\mathbf{C}_>(j_0)$, $1 \leq i \leq q$, то в качестве $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ в утверждении (F) можно взять вектор $-\mathbf{a}_{j_0}$, для которого $-\mathbf{C}_>(j_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \langle -\mathbf{a}_{j_0}, \mathbf{x} \rangle > 0\}$.

Пусть теперь $L_0 \subset M$ и $\mathcal{F}(L_0, M)$ — произвольная r_0 -мерная грань конуса $\overline{\mathbf{C}_>(M)}$. Такие грани в конусе $\overline{\mathbf{C}_>(M)}$ существуют, поскольку $\dim \mathbf{H}(M) = r_0 - 1$ и $\mathbf{C}_>(M) \neq \emptyset$. Покажем, что тогда $\mathcal{F}(L_0, J_s)$ представляет собой r_0 -

мерную грань конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(J_s)}$, то есть $\mathcal{F}(L_0, J_s) = \mathbf{H}(L_0) \cap \mathbf{C}_{>}(J_s - L_0) \neq \emptyset$. Выберем два вектора $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}(M, J_s) = \mathbf{H}(M) \cap \mathbf{C}_{>}(J_s - M) = \mathbf{H}(L_0) \cap \mathbf{H}(M - L_0) \cap \mathbf{C}_{>}(J_s - M) \neq \emptyset$ и $\mathbf{y}^* \in \mathcal{F}(L_0, M) = \mathbf{H}(L_0) \cap \mathbf{C}_{>}(M - L_0) \neq \emptyset$. Поскольку $L_0 \subset M \subset [m]$, то для вектора $\mathbf{z}^* := \mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{y}^*$ имеем $\mathbf{z}^* \in \mathbf{H}(L)$ при любом ε ; $\mathbf{z}^* \in \mathbf{C}_{>}(M - L_0)$ при любом $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{z}^* \in \mathbf{C}_{>}([m] - M)$ при достаточно малом ε . Следовательно, $\mathbf{z}^* \in \mathbf{H}(L_0) \cap \mathbf{C}_{>}(M - L_0) \cap \mathbf{C}_{>}([m] - M) = \mathbf{H}(L_0) \cap \mathbf{C}_{>}(J_s - L_0) = \mathcal{F}(L_0, J_s) \neq \emptyset$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mathcal{F}(L_0, J_s)$, как r_0 -мерная грань конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(J_s)}$, освещена извне множеством источников $\{\mathbf{y}_i^* : 1 \leq i \leq q\}$, согласно утверждению (C), $-\mathbf{C}_{>}(L_0) \cap \{\mathbf{y}_i^* : 1 \leq i \leq q\} \neq \emptyset$. Следовательно, согласно утверждению (C), грань $\mathcal{F}(L_0, M)$ конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(M)}$ освещена извне множеством источников $\{\mathbf{y}_i^* : 1 \leq i \leq q\}$, что завершает доказательство утверждения (F). \square

Наконец, приведем доказательство Утверждения 2.13.

Доказательство. Для конуса $\overline{\mathbf{C}_{>}(M)}$ из утверждения (F), согласно утверждению (E), имеем $\overline{\mathbf{C}_{>}(M)} \subseteq \text{pos}(\mathbf{H}(M) \cup \{\mathbf{y}_i^* : 1 \leq i \leq q\})$. Поскольку $\dim \mathbf{H}(M) = r_0 - 1$, а конус $\overline{\mathbf{C}_{>}(M)}$ n -мерен, то ранг множества $\{\mathbf{y}_i^* : 1 \leq i \leq q\}$ — не меньше $n - (r_0 - 1)$; следовательно, $q \geq n - (r_0 - 1)$, и поскольку $r_0 \leq n - k$, то $q \geq k + 1$. Доказательство Утверждения 2.13 завершено. \square

Отметим, что используемое в блоке (A) доказательства утверждение о совместности остатка любой МСП несовместной системы (2.20) представлено в [151].

Утверждение 2.14. *Если ранг каждой подсистемы из трех неравенств системы (2.20) равен трем, то ее граф МСП $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ является 2-связным.*

Доказательство. Согласно Утверждению 2.13, граф $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ имеет не менее четырех вершин: $\#\mathbf{J} \geq 4$. Необходимо лишь показать, что $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ не имеет точки сочленения, то есть вершины $J \in \mathbf{J}$ такой, что подграф $\text{MFSG}(\mathfrak{S}) \langle \mathbf{J} - \{J\} \rangle$ несвязен.

Предположим, что, напротив, граф МСП системы (2.20) имеет точку сочленения, скажем, вершину J_q , то есть граф $\text{MFSG}(\mathfrak{S}) \langle \mathbf{J} - \{J_q\} \rangle$ несвязен. Не теряя общности, будем полагать, что вершины J_1 и J_2 принадлежат в подграфе $\text{MFSG}(\mathfrak{S}) \langle \mathbf{J} - \{J_q\} \rangle$ разным компонентам связности. Согласно соотношению (2.31) из Леммы 2.7, $\mathbf{mmi}(J_1) \cap ([m] - J_q) \neq \emptyset$ и $\mathbf{mmi}(J_2) \cap ([m] - J_q) \neq \emptyset$. Выберем произвольные индексы $j_1 \in \mathbf{mmi}(J_1) \cap ([m] - J_q)$ и

$j_2 \in \mathbf{mmi}(J_2) \cap ([m] - J_q)$. Для $(n-1)$ -мерных граней $\mathcal{F}(\{j_1\}, J_1)$ и $\mathcal{F}(\{j_2\}, J_2)$ конусов $\overline{\mathbf{C}}_{>}(J_1)$ и $\overline{\mathbf{C}}_{>}(J_2)$ соответственно имеем

$$\mathbf{H}(J_1) \cap \mathbf{C}_{>}(J_1 - \{j_1\}) \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \mathbf{H}(J_2) \cap \mathbf{C}_{>}(J_2 - \{j_2\}) \neq \emptyset. \quad (2.48)$$

Рассмотрим семейства

$$\begin{aligned} & \{(\mathbf{C}_{>}(i) \cap \mathbf{H}(j_1), -\mathbf{C}_{>}(i) \cap \mathbf{H}(j_1)) : i \in [m] - \{j_1\}\}, \\ & \{(\mathbf{C}_{>}(i) \cap \mathbf{H}(j_2), -\mathbf{C}_{>}(i) \cap \mathbf{H}(j_2)) : i \in [m] - \{j_2\}\} \end{aligned}$$

и

$$\{(\mathbf{C}_{>}(i) \cap \mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2), -\mathbf{C}_{>}(i) \cap \mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)) : i \in [m] - \{j_1, j_2\}\}; \quad (2.49)$$

с ними связаны абстрактные симплициальные комплексы $\Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>$, $\Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>$ и $\Delta_{\mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)}^>$ соответственно, определенные в (2.35).

Поскольку, по условию, импликация

$$|L| = 3 \quad \implies \quad \dim \mathbf{H}(L) = n - 3 \quad (2.50)$$

выполнены для всех мультииндексов $L \subseteq [m]$, то, с помощью Теоремы 2.1, заключаем, что графы систем независимости $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>)$ и $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>)$, изоморфные графам МСП некоторых систем линейных неравенств ранга $n-1$, связны.

Покажем, что граф системы независимости $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)}^>)$ не является безреберным. Пусть J_s — некоторая гипергрань комплекса $\Delta_{\mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)}^>$. Зафиксируем произвольный вектор $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}_{>}(J_s) \cap \mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)$. Тогда $-\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}_{>}([m] - \{j_1, j_2\}) - J_s \cap \mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)$, поскольку иначе, предположив, что $-\mathbf{x}^* \in -\overline{\mathbf{C}}_{>}(j_0)$ для некоторого индекса $j_0 \in ([m] - \{j_1, j_2\}) - J_s$, получили бы $\mathbf{C}_{>}(J_s) \cap \mathbf{C}_{>}(j_0) \cap \mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2) \neq \emptyset$, с учетом условия (2.50), в противоречии с максимальностью совместной подсистемы с мультииндексом J_s . Следовательно, подсемейство с мультииндексом $([m] - \{j_1, j_2\}) - J_s$ семейства (2.49) имеет пересечение, отличное от (\emptyset, \emptyset) , и, следовательно, найдется гипергрань J_t комплекса $\Delta_{\mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)}^>$ такая, что $J_t \supset ([m] - \{j_1, j_2\}) - J_s$. Таким образом, $\{J_s, J_t\}$ — ребро графа $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)}^>)$.

Отметим, что, согласно Лемме 2.1(ii), выполнены импликации

$$L \subseteq [m] - \{j_1\} , \quad \mathbf{C}_>(L) \cap \mathbf{H}(j_1) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{C}_>(L \cup \{j_1\}) \neq \emptyset ,$$

$$L \subseteq [m] - \{j_2\} , \quad \mathbf{C}_>(L) \cap \mathbf{H}(j_2) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{C}_>(L \cup \{j_2\}) \neq \emptyset ,$$

$$L \subseteq [m] - \{j_1, j_2\} , \quad \mathbf{C}_>(L) \cap \mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{C}_>(L \cup \{j_1, j_2\}) \neq \emptyset .$$

Из этих импликаций следует, что существуют отображения $\psi_1: \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^> \rightarrow \mathbf{max} \Delta^>$, $\psi_2: \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^> \rightarrow \mathbf{max} \Delta^>$, $\psi_3: \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)}^> \rightarrow \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>$ и $\psi_4: \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)}^> \rightarrow \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>$ такие, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned} J \in \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^> &\Longrightarrow \psi_1(J) \supseteq J \cup \{j_1\} , \\ J \in \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^> &\Longrightarrow \psi_2(J) \supseteq J \cup \{j_2\} , \\ J \in \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)}^> &\Longrightarrow \psi_3(J) \supseteq J \cup \{j_1\} , \\ J \in \mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)}^> &\Longrightarrow \psi_4(J) \supseteq J \cup \{j_2\} . \end{aligned} \tag{2.51}$$

Отображения ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 и ψ_4 — гомоморфизмы соответствующих графов систем независимости. Поскольку графы систем независимости $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>)$ и $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>)$ связны, связными являются и подграфы $\text{ISG}([m], \Delta^>) \langle \psi_1(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>) \rangle$ и $\text{ISG}([m], \Delta^>) \langle \psi_2(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>) \rangle$.

Пусть теперь $\{J_s, J_t\}$ — ребро графа $\text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{H}(j_1) \cap \mathbf{H}(j_2)}^>)$, то есть $J_s \cup J_t = [m] - \{j_1, j_2\}$, тогда $\psi_3(J_s) \cup \psi_4(J_t) = [m]$ и, значит, $\psi_1(\psi_3(J_s)) \cup \psi_2(\psi_4(J_t)) = [m]$. Следовательно, вершина $\psi_1(\psi_3(J_s)) \in \psi_1(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>)$ в графе $\text{ISG}([m], \Delta^>)$ смежна вершине $\psi_2(\psi_4(J_t)) \in \psi_2(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>)$, и поэтому подграф $\text{ISG}([m], \Delta^>) \langle \psi_1(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>) \cup \psi_2(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>) \rangle$ связан. Согласно (2.51), всякая вершина из $\psi_1(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>) \cup \psi_2(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>)$ содержит либо индекс j_1 , либо индекс j_2 и, поскольку $j_1, j_2 \notin J_q$, то $J_q \notin \psi_1(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>) \cup \psi_2(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>)$, то есть вершины из $\psi_1(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>) \cup \psi_2(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>)$ принадлежат одной компоненте связности подграфа $\text{ISG}([m], \Delta^>) \langle \mathbf{J} - \{J_q\} \rangle$. Из (2.48) следует, что найдутся гиперграни $J_{t_1} \in \text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>)$ и $J_{t_2} \in \text{ISG}([m], \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>)$ такие, что $J_{t_1} \supseteq J_1 - \{j_1\}$ и $J_{t_2} \supseteq J_2 - \{j_2\}$. В силу максимальности совместных подсистем с мультииндексами J_1 и J_2 , и с

учетом (2.51), получаем $\psi(J_{t_1}) = J_1$ и $\psi(J_{t_2}) = J_2$. Таким образом, $J_1, J_2 \in \psi_1(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_1)}^>) \cup \psi_2(\mathbf{max} \Delta_{\mathbf{H}(j_2)}^>)$, в противоречии с предположением о том, что вершины J_1 и J_2 принадлежат в подграфе $\mathbf{ISG}([m], \Delta^>)\langle \mathbf{J} - \{J_q\} \rangle$ разным компонентам связности. Полученное противоречие и доказывает утверждение. \square

Напомним основные свойства 2-связных графов.

Утверждение 2.15. Пусть \mathbf{G} — простой связный граф. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) граф \mathbf{G} двусвязен;
- 2) любые две вершины графа \mathbf{G} принадлежат простому циклу;
- 3) любая вершина и любое ребро графа \mathbf{G} принадлежат простому циклу;
- 4) любые два ребра принадлежат простому циклу;
- 5) для любых двух вершин a и b и любого ребра E существует простая $(a \leftrightarrow b)$ -цепь, содержащая E ;
- 6) для любых трех вершин a , b и c существует простая $(a \leftrightarrow b)$ -цепь, проходящая через c .

Перечень базовых свойств двудольных графов, представленный в Утверждении 2.15, составляет содержание Теоремы 34.1 из [69].

Следующее следствие объединяет Утверждение 2.14 и Утверждение 2.15.

Следствие 2.7. Если ранг каждой подсистемы из трех неравенств системы (2.20) равен 3, то следующие утверждения являются эквивалентными:

- 1) любые два мультииндекса МСП J_{i_1} и J_{i_2} системы \mathfrak{S} принадлежат простому циклу графа МСП $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$;
- 2) любой мультииндекс МСП J_{i_1} и любые два мультииндекса МСП J_{i_2} и J_{i_3} такие, что $J_{i_2} \cup J_{i_3} = [m]$, принадлежат простому циклу графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$;
- 3) любые четыре мультииндекса МСП J_{i_1} , J_{i_2} , J_{i_3} и J_{i_4} такие, что $J_{i_1} \cup J_{i_2} = J_{i_3} \cup J_{i_4} = [m]$, принадлежат простому циклу графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$;
- 4) для любых двух мультииндексов МСП J_{i_1} и J_{i_2} , и для любой пары мультииндексов МСП J_{i_3} и J_{i_4} таких, что $J_{i_3} \cup J_{i_4} = [m]$, существует простая $(J_{i_1} \leftrightarrow J_{i_2})$ -цепь графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$, содержащая пару мультииндексов J_{i_3} и J_{i_4} ;

- 5) для любых трех мультииндексов МСП J_{i_1}, J_{i_2} и J_{i_3} существует простая $(J_{i_1} \leftrightarrow J_{i_2})$ -цепь графа $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$, проходящая через вершину J_{i_3} .

Выводы по Главе 2

В Главе 2 были исследованы различные классы несовместных систем условий и разработаны их теоретико-графовые математические модели.

Выводы по Главе 2.

1. Разработана теоретико-графовая модель для исследования структурных и комбинаторных свойств несовместных систем общего вида. Введено понятие графа системы независимости. Конструкция графа системы независимости описывает покрытие несовместной системы парами ее совместных подсистем. Свойства этого графа оказываются очень эффективным инструментом для построения алгоритмов выделения всех максимальных по включению совместных подсистем (МСП) системы.

2. Установлено важнейшее свойство связности таких графов для различных классов систем независимости. При этом в самом общем случае связность графа системы независимости выводится из связности соответствующего топологического пространства. Из этого результата выводится целый ряд следствий о связности графов для более узких подклассов систем независимости, в том числе для несовместной системы линейных неравенств, играющей важную роль в задачах распознавания образов в геометрической постановке.

3. В Главе 2 более подробно изучаются свойства графа системы независимости, порождаемой несовместной системой линейных неравенств, называемой также кратко графом МСП. Для графа МСП получены следующие результаты:

- 3.1. оценки диаметра графа МСП,
- 3.2. оценки для степеней вершин графа МСП,
- 3.3. доказано существование цикла нечетной длины в любом графе МСП.

Все полученные результаты находят непосредственное применение при построении алгоритмов выделения МСП несовместной системы линейных неравенств в Главе 4 диссертационной работы.

3. Комбинаторно–геометрические методы математического моделирования несовместных систем

В этой главе разрабатываются комбинаторно–геометрические методы математического моделирования несовместных систем условий. Предлагается подход, в рамках которого исследование сводится к рассмотрению структурных и комбинаторных свойств выпуклых многогранников, а также исследуются аналогичные свойства положительных базисов векторных пространств и несовместных систем линейных неравенств.

В предыдущих главах было показано, что несовместные системы линейных неравенств наследуют некоторые свои существенные свойства от других фундаментальных математических конструкций. Так, например, являясь по своей природе несовместными системами со свойством монотонности, системы линейных неравенств могут быть описаны на языке абстрактных симплициальных комплексов (см. Глава 1). Связность графов максимальных совместных подсистем таких систем вытекает из фундаментального топологического свойства — связности пространства \mathbb{R}^n (см. Глава 2).

В этой главе несовместные системы линейных неравенств являются для нас основным объектом рассмотрения. Важную роль при этом играют геометрические представления несовместных систем в виде конечных наборов точек n -мерного евклидова пространства и классический инструмент комбинаторной геометрии — преобразование Гейла. Ключевыми для анализа несовместных систем линейных неравенств оказываются понятие граней и впервые введенное в работе понятие G -диагоналей многогранника.

3.1. Грани и диагонали выпуклых многогранников

В планиметрии понятие диагонали играет роль, сравнимую с ролью понятия стороны многоугольника. В случае произвольной размерности стороны многоугольников обобщаются до (гипер)граней, играющих, в частности, важнейшую роль в задачах комбинаторной классификации многогранников.

В этом разделе будут рассматриваться три из возможных обобщений понятия диагонали на произвольный d -мерный случай. Каждое из них может быть положено в основу некоторой комбинаторной классификации многогранников, причем в случае так называемых G -диагоналей возникает классификация, совпадающая с общепринятой, то есть классификация, определяемая граневой структурой.

Для простоты изложения будем использовать стандартные обозначения: aff — аффинная оболочка, pos — положительная оболочка, conv — выпуклая оболочка, ri — относительная внутренность, rbd — относительная граница, vert — множество вершин, dim — аффинная размерность.

3.1.1. Три понятия диагоналей и их взаимосвязи

Предметом рассмотрения в этом параграфе являются лишь выпуклые и ограниченные многогранники. Многогранники размерности d называются, для краткости, d -многогранниками. Говоря о гранях многогранника, всюду будут иметься в виду собственные грани, то есть грани, отличные от пустого множества и самого многогранника.

Напомним, что циклическим d -многогранником называют выпуклую оболочку конечного подмножества, мощности $m > d$, точек моментной кривой (t, t^2, \dots, t^d) , где $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

Многогранником с k -соседством называют многогранник, у которого любые множества из k вершин являются множествами вершин некоторой грани. Хорошо известно, что циклический d -многогранник — это многогранник с $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ -соседством.

Многогранник \mathcal{P} получен из многогранников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k$ операцией кросс, что записывается как $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \perp \dots \perp \mathcal{P}_k$, если $\text{dim aff } \mathcal{P} = \sum_{j \in [k]} \text{dim aff } \mathcal{P}_j$ и пересечение $\bigcap_{j \in [k]} \text{ri } \mathcal{P}_j$ непусто и, как следствие, представляет собой единственную точку (заимствованная терминология из [179]).

Рассмотрим два вспомогательных утверждения:

Лемма 3.1. Если $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \perp \cdots \perp \mathcal{P}_k$, то грани многогранника \mathcal{P} — это в точности все множества вида $\mathbf{F} = \text{conv}(\mathbf{F}_{j_1} \cup \mathbf{F}_{j_2} \cup \cdots \cup \mathbf{F}_{j_s})$, где \mathbf{F}_j — грань \mathcal{P}_j ; здесь $\mathbf{F}_j \neq \mathcal{P}_j$, $j \in \{j_1, j_2, \dots, j_s\} \subset [k]$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \perp \cdots \perp \mathcal{P}_k = (\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \perp \cdots \perp \mathcal{P}_{k-1} \perp \mathcal{P}_k)$, достаточно доказать лемму для случая $k = 2$. Пусть \mathbf{F}_i — грани многогранников \mathcal{P}_i , $i \in [2]$, а значит, и многогранника \mathcal{P} . Докажем, что и $\text{conv}(\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2)$ — грань \mathcal{P} . Пусть \mathbf{H}_i — гиперплоскость, опорная к \mathcal{P}_i в $\text{aff } \mathcal{P}_i$, $\mathbf{F}_i = \mathbf{H}_i \cap \mathcal{P}_i$, $i \in [2]$. Отметим, что $\dim \text{aff}(\mathbf{H}_1 \cup \mathbf{H}_2) = d - 1$. Пусть $\mathbf{H} := \text{aff}(\mathbf{H}_1 \cup \mathbf{H}_2)$. Учитывая, что \mathbf{H} — гиперплоскость в $\text{aff } \mathcal{P}_i$, видим, что $\mathbf{H}_i = \mathbf{H} \cap \text{aff } \mathcal{P}_i$, $i \in [2]$; отсюда гиперплоскость \mathbf{H} является опорной для \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 и, ввиду $\text{ri } \mathcal{P}_1 \cap \text{ri } \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$, она опорная и для \mathcal{P} . Теперь ясно, что $\text{conv}(\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2) = \mathbf{H} \cap \mathcal{P}$. Пусть теперь \mathbf{F} — грань \mathcal{P} , \mathbf{H} — гиперплоскость, опорная к \mathcal{P} в \mathbb{R}^d и такая, что $\mathbf{F} = \mathbf{H} \cap \mathcal{P}$. Пусть $V_i := \text{vert}(\mathbf{F} \cap \mathcal{P}_i)$, $i \in [2]$. Имеем $\mathbf{F}_i = \text{conv } V_i$ — грань \mathcal{P}_i , поскольку $\text{conv } V_i = \mathbf{H} \cap \mathcal{P}_i$, а $\mathcal{P}_i \not\subset \mathbf{H}$, так как $\{z\} = \text{ri } \mathcal{P}_1 \cap \text{ri } \mathcal{P}_2 \subset \text{ri } \mathcal{P} \not\subset \mathbf{H}$. \square

Лемма 3.2. Пусть \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 — многогранники, $\mathbf{H}_1 := \text{aff } \mathcal{P}_1$ и $\mathbf{H}_2 := \text{aff } \mathcal{P}_2$ — скрещивающиеся плоскости, а \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 — грани многогранников \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 соответственно. Тогда $\text{conv}(\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2)$ — грань многогранника $\text{conv}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$.

Доказательство. Пусть $d_1 := \dim \mathbf{H}_1$ и $d_2 := \dim \mathbf{H}_2$. Выберем d_i -симплекс $\mathcal{S}_i \supset \mathcal{P}_i$, содержащий множество $\mathbf{F}_i = \text{rbd } \mathcal{S}_i \cap \mathcal{P}_i$ внутри некоторой своей грани \mathcal{Q}_i , $i \in [2]$. Доказываемое утверждение следует из наблюдения, что $\text{conv}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ — симплекс, а $\text{conv}(\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2)$ — его грань. \square

Определение 3.1. Пусть \mathcal{P} — многогранник, $D \subsetneq \text{vert } \mathcal{P}$. Множество D (или, наряду с этим, множество $\text{conv } D$, — в зависимости от контекста) является

- А-диагональю, если $\text{conv } D \cap \text{ri } \mathcal{P} \neq \emptyset$, но для любого собственного подмножества $D' \subsetneq D$ множество $\text{conv } D'$ является гранью многогранника \mathcal{P} ;
- G-диагональю, если $\text{conv } D \cap \text{ri } \mathcal{P} \neq \emptyset$, но любое собственное подмножество $D' \subsetneq D$ лежит в некоторой собственной грани многогранника \mathcal{P} ;
- F-диагональю, если $\text{conv } D \cap \text{ri } \mathcal{P} = \text{ri } \text{conv } D \cap \text{ri } \mathcal{P} \neq \emptyset$.

Следует отметить, что понятие A -диагонали было введено в [167] под названием недостающая грань (или пустой симплекс, missing face, empty simplex), понятие F -диагонали — в [183] под названием диагоналей, а понятие G -диагонали было впервые введено автором диссертации в работе [34] и имеет важное значение для дальнейшего исследования. В частности, как уже было отмечено в начале раздела и будет показано далее, только G -диагональная структура определяет стандартную классификацию многогранников (см. также о недостающих гранях многогранников в работах [209–211, 236] и [19, §2.2]).

Семейство всех A -, G - и F -диагоналей многогранника \mathcal{P} обозначим через $\mathcal{D}_A(\mathcal{P})$, $\mathcal{D}_G(\mathcal{P})$ и $\mathcal{D}_F(\mathcal{P})$ соответственно, а семейство всех r -мерных диагоналей (иначе, r -диагоналей) — через $\mathcal{D}_A^r(\mathcal{P})$, $\mathcal{D}_G^r(\mathcal{P})$ и $\mathcal{D}_F^r(\mathcal{P})$ соответственно.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определения диагоналей различных типов.

Утверждение 3.1. *Для A -, G - и F -диагоналей d -многогранника \mathcal{P} справедливы следующие соотношения:*

$$\mathcal{D}_A^r(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}_G^r(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}_F^r(\mathcal{P}), \quad r \in [d-1]; \quad (3.1)$$

$$\mathcal{D}_A^0(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_G^0(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_F^0(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_A^d(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_G^d(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_F^d(\mathcal{P}) = \emptyset; \quad (3.2)$$

$$\mathcal{D}_A^1(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_G^1(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_F^1(\mathcal{P}). \quad (3.3)$$

Справедливо также следующее наблюдение о взаимосвязи понятий F - и G -диагоналей.

Утверждение 3.2. *Для того чтобы F -диагональ D многогранника \mathcal{P} была и G -диагональю, необходимо и достаточно, чтобы \mathcal{P} был симплексом.*

Утверждение 3.3. *Пусть \mathcal{P} — пирамида, а именно $\mathcal{P} := \text{conv}(\{v\} \cup \mathcal{P}')$, для некоторого многогранника-основания \mathcal{P}' и точки $v \notin \text{aff } \mathcal{P}'$. Тогда*

$$\mathcal{D}_A(\mathcal{P}) = \emptyset; \quad (3.4)$$

$$\mathcal{D}_G(\mathcal{P}) = \{D = \{v\} \cup D' : D' \in \mathcal{D}_G(\mathcal{P}')\}; \quad (3.5)$$

$$\mathcal{D}_F(\mathcal{P}) = \{D = \{v\} \cup D' : D' \in \mathcal{D}_F(\mathcal{P}')\}. \quad (3.6)$$

Доказательство. Если D — диагональ многогранника \mathcal{P} любого из трех рассматриваемых нами видов, то $v \in D$, так как в противном случае выпуклая

оболочка $\text{conv } D$ лежала бы в грани \mathcal{P} . По тем же соображениям, во всех трех случаях выполняется соотношение

$$(D - \{v\}) \cap \text{ri } \mathcal{P}' \neq \emptyset. \quad (3.7)$$

Теперь в случае (3.4) множество $\text{conv}(D - \{v\})$, будучи гранью многогранника \mathcal{P} , обязано совпадать с \mathcal{P}' , то есть $\text{conv } D = \mathcal{P}$, а значит, $D = \text{vert } \mathcal{P}$ — противоречие.

Для (3.5) множество $D' = D - \{v\}$ минимально по включению относительно свойства (3.7) тогда и только тогда, когда D минимально относительно свойства $\text{conv } D \cap \text{ri } \mathcal{P} \neq \emptyset$. Тем самым соотношение (3.5) доказано.

Что касается соотношения (3.6), следует заметить, что выполнение $\text{rbd } D' \cap \text{ri } \mathcal{P}' \neq \emptyset$ равносильно выполнению $\text{rbd } D \cap \text{ri } \mathcal{P} \neq \emptyset$. \square

Утверждение 3.4. Пусть $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \perp \dots \perp \mathcal{P}_k$. Тогда

$$\mathcal{D}_A(\mathcal{P}) = \bigcup_{j \in [k]} \mathcal{D}_A(\mathcal{P}_j) \cup \{\mathcal{P}_i : \mathcal{P}_i - \text{симплекс}\}; \quad (3.8)$$

$$\mathcal{D}_G(\mathcal{P}) = \bigcup_{j \in [k]} \mathcal{D}_G(\mathcal{P}_j) \cup \{\mathcal{P}_i : \mathcal{P}_i - \text{симплекс}\}; \quad (3.9)$$

$$\mathcal{D}_F(\mathcal{P}) = \{D \subset \text{vert } \mathcal{P} : \text{conv } D = \text{conv } D_{j_1} \perp \text{conv } D_{j_2} \perp \dots \perp \text{conv } D_{j_m}\}, \quad (3.10)$$

где $D_{j_i} \in \mathcal{D}_F(\mathcal{P}_{j_i})$ или $D_{j_i} = \text{vert } \mathcal{P}_{j_i}$, при этом $\{j_i : D_{j_i} = \text{vert } \mathcal{P}_{j_i}\} \subsetneq [k]$.

Доказательство. В случаях (3.8) и (3.9), если D — диагональ многогранника \mathcal{P} (соответствующего типа), а $D_j = D \cap \text{vert } \mathcal{P}_j$, то ввиду Леммы 3.1, при некотором j имеем $\text{conv } D_j \cap \text{ri } \mathcal{P} \neq \emptyset$. Отсюда, в силу свойства минимальности диагоналей этих типов, получаем $D = D_j$, D_j — диагональ \mathcal{P}_j , или, если \mathcal{P}_j — симплекс, то $D_j = \mathcal{P}_j$.

В случае (3.10) обозначим $\{\mathbf{z}\} := \bigcap_{j \in [k]} \text{ri } \mathcal{P}_j$. Для $j \in [l]$ обозначим $D_j := D \cap \text{vert } \mathcal{P}_j \neq \emptyset$. Покажем, что при $l \geq 2$, $\mathbf{z} \in \text{ri } \text{conv } D_j$, $j \in [l]$. Действительно, если $\mathbf{z} \notin \text{ri } \text{conv } D_1$, то $\text{ri } \text{conv } D_1 \cap \text{ri } \text{conv}(D - D_1) = \emptyset$, $\text{conv } D_1 \subset \text{rbd } \text{conv } D$ и $\text{conv}(D - D_1) \subset \text{rbd } \text{conv } D$. Отсюда, по определению F-диагоналей, $\text{conv } D_1 \subset \text{rbd } \mathcal{P}$, $\text{conv } D_2 \subset \text{rbd}(\mathcal{P}_2 \perp \dots \perp \mathcal{P}_k)$ и $D_1 \subset \mathbf{F}_1$, $D_2 \subset \mathbf{F}_2$ для некоторых

граней F_1 и F_2 многогранников \mathcal{P}_1 и $\mathcal{P}_2 \perp \cdots \perp \mathcal{P}_k$ соответственно. Но, по Лемме 3.1, множество $F := \text{conv}(F_1 \cup F_2)$ является гранью многогранника \mathcal{P} и содержит D — противоречие с включением $D \in \mathcal{D}_F(\mathcal{P})$. Итак, при $l \geq 2$, $\text{conv } D = \text{conv } D_1 \perp \text{conv } D_2 \perp \cdots \perp \text{conv } D_l$, а ввиду Леммы 3.1, $\text{rbd conv } D \subset \text{rbd } \mathcal{P}$ влечет включение $\text{rbd conv } D_j \subset \text{rbd } \mathcal{P}_j$, то есть $D_j \in \mathcal{D}_F(\mathcal{P})$ или $D_j = \mathcal{P}_j$. Случай $l = 1$, то есть $D_j = D$, очевиден. \square

Утверждение 3.5. *Каждая вершина произвольного многогранника, не являющегося симплексом, содержится по меньшей мере в одной его G-диагонали.*

Ниже выясняются взаимосвязи между следующими условиями:

C_1 : многогранник \mathcal{P} — циклический;

C_2 : множество вершин $\text{vert } \mathcal{P}$ находится в общем положении в $\text{aff } \mathcal{P}$;

C_3 : многогранник \mathcal{P} — симплицальный;

C_4 : $\mathcal{D}_A(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_F(\mathcal{P})$;

C_5 : $\mathcal{D}_A(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_G(\mathcal{P})$;

C_6 : $\mathcal{D}_G(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_F(\mathcal{P})$.

Утверждение 3.6. *Определяя для любого многогранника \mathcal{P}*

$$c_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{если } C_i \Rightarrow C_j, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\text{имеем } c_{ij}, i, j \in [6] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Бинарное отношение C , где $iCj \Leftrightarrow c_{ij} = 1$, транзитивно. Ниже это будет использоваться без специальных оговорок.

Равенства $c_{ii} = 1$ для $i \in [6]$ и $c_{23} = c_{45} = c_{46} = 1$, $c_{32} = 0$ легко проверяемы.

Пример 3.1. *Пусть $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$, где \mathcal{P}_1 — одномерный многогранник, \mathcal{P}_2 — $(d-1)$ -мерный симплицальный многогранник, но не симплекс. Легко видеть, что \mathcal{P} — симплицальный многогранник, а \mathcal{P}_2 — его F-диагональ, не являющаяся G-диагональю (Утверждения 3.2 и 3.4).*

Пример 3.1 дает $c_{36} = 0$, откуда и $c_{34} = 0$. Так как любое подмножество вершин симплекса образует его грань, то непосредственно из определений ясно, что $c_{35} = 1$; отсюда, автоматически, $c_{25} = 1$. Теперь из Примера 3.1, с учетом Утверждения 3.4, вытекает $c_{56} = c_{54} = 0$.

Утверждение 3.2 дает $c_{26} = 1$; отсюда и из $c_{25} = 1$ получаем $c_{24} = 1$.

Пример 3.2. Пусть \mathcal{P} — пирамида, основание \mathcal{P}' которой находится в общем положении в $\mathbb{R}^{d-1} := \text{aff } \mathcal{P}'$.

В силу уже доказанного равенства $c_{26} = 1$ имеем $\mathcal{D}_G(\mathcal{P}') = \mathcal{D}_F(\mathcal{P}')$, откуда, по Утверждениям 3.3 и 3.5, $\mathcal{D}_G(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_F(\mathcal{P}) \neq \emptyset$, в то время как, по Утверждению 3.3, $\mathcal{D}_A(\mathcal{P}) = \emptyset$; таким образом, $c_{65} = c_{64} = 0$. Известно, что если \mathcal{P} — циклический многогранник, то $\text{vert } \mathcal{P}$ — множество в общем положении в \mathbb{R}^d , то есть $c_{12} = 1$. Теперь имеем $c_{1j} = 1$, $3 \leq j \leq 6$. Для доказательства равенства $c_{21} = 0$ рассмотрим Пример 3.1, в котором \mathcal{P}_2 является симплексом. В этом случае многогранник, вершины которого, очевидно, находятся в общем положении, имеет одномерную диагональ \mathcal{P}_1 , поэтому не является 2-смежностным и не может быть циклическим. Теперь имеем $c_{i1} = 0$, $3 \leq i \leq 6$.

Остается показать, что $c_{43} = c_{42} = c_{53} = c_{52} = c_{62} = 0$. Для этого достаточно убедиться в равенстве $c_{43} = 0$.

Пример 3.3. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d\}$ — ортонормированный базис в \mathbb{R}^d . Определим множества

$$\mathcal{P}_1 := \text{conv} \{ \pm \mathbf{e}_i : i \in [d-1] \},$$

$$\mathcal{P}_2 := \text{conv} \left\{ \mathbf{v} := \sum_{i \in [d-1]} \alpha_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_d : \alpha_i \in \{-1, 1\}, i \in [d-1] \right\},$$

$$\mathcal{P} := \text{conv} (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2), \quad \mathbf{H}_1 := \text{aff } \mathcal{P}_1, \quad \mathbf{H}_2 := \text{aff } \mathcal{P}_2.$$

Пару вершин $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, $\mathbf{u} \in \text{vert } \mathcal{P}_1, \mathbf{v} \in \text{vert } \mathcal{P}_2$ назовем диагональной, если $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -1$, то есть при $\mathbf{u} = \alpha_k \mathbf{e}_k, \alpha_k \in \{-1, 1\}$, должно быть

$$\mathbf{v} = -\alpha_k \mathbf{e}_k + \sum_{\substack{i \in [d-1], \\ i \neq k}} \alpha_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_d.$$

Покажем, что справедливы следующие два свойства:

1) всякая диагональная пара вершин $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ образует диагональ многогранника \mathcal{P} , — очевидно, что при этом $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in \mathcal{D}_A(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}_G(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}_F(\mathcal{P})$;

2) любое максимальное по включению подмножество вершин многогранника \mathcal{P} , не содержащее никакой диагональной пары, образует некоторую грань \mathcal{P} .

Для доказательства 1) предположим противное. Пусть $\mathbf{u} := \mathbf{e}_1, \mathbf{v} := -\mathbf{e}_1 + \sum_{i=2}^{d-1} \tilde{\alpha}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_d$, где $\tilde{\alpha}_i \in \{-1, 1\}$, $2 \leq i \leq d-1$. Пусть далее $\boldsymbol{\beta} := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ и уравнение $\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x} \rangle = 1$ задает опорную к \mathcal{P} гиперплоскость, проходящую через точки \mathbf{u} и \mathbf{v} . Поскольку \mathcal{P} содержит начало координат, для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ имеем $\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x} \rangle \leq 1$. Таким образом, получаем

$$\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{v} \rangle = -\beta_1 + \sum_{2 \leq i \leq d-1} \tilde{\alpha}_i \beta_i + \beta_d = 1, \quad (3.11)$$

$$\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{u} \rangle = \beta_1 = 1 \quad (3.12)$$

и для вершины $\mathbf{w} := \mathbf{e}_1 + \sum_{2 \leq i \leq d-1} \tilde{\alpha}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_d$ имеем

$$\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w} \rangle = \beta_1 + \sum_{2 \leq i \leq d-1} \tilde{\alpha}_i \beta_i + \beta_d \leq 1. \quad (3.13)$$

С учетом (3.12) соотношения (3.11) и (3.13) дают противоречие.

Перейдем к доказательству утверждения 2). Пусть \mathcal{S} — максимальное по включению подмножество вершин многогранника \mathcal{P} , не содержащее диагональной пары. Ясно, что в доказательстве нуждается только тот случай, когда оба множества $\mathcal{S} \cap \text{vert } \mathcal{P}_1$ и $\mathcal{S} \cap \text{vert } \mathcal{P}_2$ непусты.

Из определения диагональной пары следует, что $\mathcal{S} \cap \text{vert } \mathcal{P}_1$ не содержит пары $\{\mathbf{e}_j, -\mathbf{e}_j\}$ ни при каком j . Итак, не теряя общности, считаем, что

$$\mathcal{S} := \left\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_k + \sum_{k+1 \leq i \leq d-1} \alpha_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_d : \right. \\ \left. \alpha_i \in \{-1, 1\}, k+1 \leq i \leq d-1 \right\}.$$

Определим $\boldsymbol{\beta} := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$ так:

$$\beta_i := \begin{cases} 1, & \text{если } i \in [k], \\ 0, & \text{если } k+1 \leq i \leq d-1, \\ 1-k, & \text{если } i = d. \end{cases}$$

Заметим, что для всех векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ выполнено равенство $\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x} \rangle = 1$.

Пусть теперь $\mathbf{x} \in \text{vert } \mathcal{P} - \mathcal{S}$. Если $\mathbf{x} \in \text{vert } \mathcal{P}_1$, то

$$\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x} \rangle = \begin{cases} -1, & \text{если } \mathbf{x} = -\mathbf{e}_j, j \leq k, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} = \pm \mathbf{e}_j, k+1 \leq j \leq d-1. \end{cases}$$

Если же $\mathbf{x} \in \text{vert } \mathcal{P}_2 - \mathcal{S}$, то есть $\mathbf{x} = \sum_{0 \leq i \leq d-1} \alpha_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_d$, где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i \in [d-1]$, и среди $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ не все числа равны 1, то $\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i \in [k]} \alpha_i + (1-k) < 1$. Итак, для любого вектора $\mathbf{x} \in \text{vert } \mathcal{P} - \mathcal{S}$, $\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x} \rangle < 1$, а для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, $\langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x} \rangle = 1$, то есть $\text{conv } \mathcal{S}$ — грань многогранника \mathcal{P} .

Таким образом, Пример 3.3 доставляет несимплициальный многогранник \mathcal{P} , у которого $\mathcal{D}_G(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_G^1(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_A^1(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_A(\mathcal{P})$, и доказывает равенство $s_{53} = 0$. Для многогранника \mathcal{P} имеем $\mathcal{D}_A(\mathcal{P}) \neq \mathcal{D}_F(\mathcal{P})$. Например,

$$\mathcal{S} := \left\{ \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \sum_{2 \leq i \leq d-1} \alpha_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_d, -\mathbf{e}_1 + \sum_{2 \leq i \leq d-1} \alpha_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_d \right\} \in \mathcal{D}_F(\mathcal{P}) - \mathcal{D}_A(\mathcal{P}),$$

что следует из доказанных выше свойств 1) и 2).

Следующий пример доказывает более сильное утверждение $s_{43} = 0$.

Пример 3.4. Желаемый многогранник \mathcal{Q} получается из \mathcal{P} (см. Пример 3.3) заменой вершин $\mathbf{u}_i \in \text{vert } \mathcal{P}_1$ на достаточно близкие вершины \mathbf{w}_i , $i \in [2(d-1)]$, в пределах гиперплоскости \mathbf{H}_1 . Пусть U_i — ε -окрестность точки $\mathbf{u}_i \in \text{vert } \mathcal{P}$ в плоскости $\mathbf{H}_1 := \text{aff } \mathcal{P}_1$; точка $\mathbf{w}_i \in U_i$ выбрана произвольно, $i \in [2(d-1)]$. Положим $\mathcal{Q} := \text{conv}(\mathcal{P}_2 \cup \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{2(d-1)}\})$.

Пару вершин $\{\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_i\} \subset \text{vert } \mathcal{Q}$ назовем диагональной парой для \mathcal{P} , если $\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i\}$ — диагональная пара для многогранника \mathcal{P} .

Заметим, что свойства 1) и 2) диагональных пар \mathcal{P} остаются справедливыми и для диагональных пар \mathcal{Q} при условии, что $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Быть может, стоит пояснить только (относительно 2)), что максимальное по включению множество вершин, не содержащее диагональной пары и не совпадающее ни с $\text{vert } \mathcal{P}_2$, ни с $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{2(d-1)}\}$, имеет вид $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \dots + \mathbf{w}_k + \sum_{k+1 \leq i \leq d-1} \alpha_i \mathbf{u}_i + \mathbf{e}_d : \alpha_i \in \{-1, 1\}, k+1 \leq i \leq d-1\}$, то есть оно состоит из точек $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ и остальных — лежащих в грани размерности $d - k - 1$ куба \mathcal{P}_2 и, таким образом, обязательно лежит в некоторой гиперплоскости в \mathbb{R}^d . Последняя, за счет малости ε , будет близкой к соответствующей опорной гиперплоскости к \mathcal{P} , а следовательно, опорной и к \mathcal{Q} .

Теперь укажем индуктивный способ выбора $\mathbf{w}_i \in U_i, i \in [2(d-1)]$, приводящий к нужному многограннику \mathcal{Q} .

Положим $\mathbf{w}_1 := \mathbf{u}_1$. Пусть векторы $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r$ уже выбраны. Рассмотрим все плоскости, порожденные подмножествами множества $\text{vert } \mathcal{P}_2 \cup \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\}$ и не содержащие \mathbf{H}_1 . По теореме Бэра о категории, их объединение не покрывает \mathbf{H}_1 . Возьмем в качестве $\mathbf{w}_{r+1} \in U_{r+1}$ произвольную непокрытую точку.

А теперь покажем, что построенный так многогранник \mathcal{Q} действительно удовлетворяет требуемому условию $\mathcal{D}_F(\mathcal{Q}) = \mathcal{D}_A(\mathcal{Q})$.

Пусть $\mathcal{S} := \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ — произвольная F-диагональ многогранника \mathcal{Q} . В связи с вышеизложенным, она обязана содержать диагональную пару. Пусть это будет пара $\{\mathbf{w}_s, \mathbf{w}_t\}$.

Выбор векторов $\mathbf{w}_i, i \in [2(d-1)]$, был сделан так, что плоскости $\mathbf{E}_1 := \text{aff } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l\}$ и $\mathbf{E}_2 := \text{aff } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ скрещиваются. Действительно, пусть $\mathbf{E}_1 := \mathbf{w}_1 + \mathbf{L}_1, \mathbf{E}_2 := \mathbf{w}_2 + \mathbf{L}_2$, где \mathbf{L}_1 и \mathbf{L}_2 — линейные подпространства в \mathbb{R}^d . От противного, пусть \mathbf{L} — одномерное линейное подпространство, содержащееся в $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$. Пусть, далее, j — таково, что $\text{aff } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_j\} \not\subset \mathbf{w}_1 + \mathbf{L} \subset \text{aff } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_{j+1}\}$. Это значит, что $\mathbf{w}_{j+1} \in \text{aff } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_j\} + \mathbf{L} \subset \text{aff } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ — противоречие с выбором \mathbf{w}_{j+1} .

Теперь, если $\mathcal{S} \neq \{\mathbf{w}_s, \mathbf{v}_t\}$, то, по Лемме 3.2, $\text{conv } \{\mathbf{w}_s, \mathbf{v}_t\}$ — грань $\text{conv } \mathcal{S}$ и, по определению F-диагонали, $\text{conv } \{\mathbf{w}_s, \mathbf{v}_t\}$ лежит в некоторой грани многогранника \mathcal{Q} . Полученное противоречие дает $\mathcal{S} = \{\mathbf{w}_s, \mathbf{v}_t\}$, то есть $\mathcal{D}_F(\mathcal{Q}) = \mathcal{D}_F^1(\mathcal{Q}) = \mathcal{D}_A^1(\mathcal{Q}) = \mathcal{D}_A(\mathcal{Q})$.

Теорема Бэра о категории, упоминаемая в Примере 3.4, приводится, например, в [88, Глава 6]

Итак, $s_{43} = 0$ установлено. \square

Перейдем к исследованию структурных свойств выпуклых многогранников.

3.1.2. Диагонали и классификация многогранников

Два многогранника \mathcal{P} и \mathcal{Q} , решетки граней которых изоморфны, имеют, по определению, одинаковый комбинаторный тип. Отношение «иметь один комбинаторный тип» является отношением эквивалентности и порождает классификацию на множестве всех многогранников. Подобная классификация возможна и на основе понятия диагонали.

Утверждение 3.7. Пусть \mathcal{L} — решетка граней ограниченного выпуклого многогранника \mathcal{P} (не являющегося симплексом) с множеством атомов $\mathcal{L}^a := \{\{v\} : v \in \text{vert } \mathcal{P}\}$ и множеством коатомов $\mathcal{L}^c := \{H \subset \text{vert } \mathcal{P} : \text{conv } H \text{ — гипергрань } \mathcal{P}\}$. Выполнены следующие соотношения:

$$\mathcal{D}_G(\mathcal{P}) = \mathfrak{B}(\{\mathfrak{I}(H) \cap \mathcal{L}^a : H \in \mathcal{L}^c\}^\perp), \quad (3.14)$$

$$\{\mathfrak{I}(H) \cap \mathcal{L}^a : H \in \mathcal{L}^c\}^\perp = \mathfrak{B}(\mathcal{D}_G(\mathcal{P})); \quad (3.15)$$

$$\mathcal{D}_G(\mathcal{P}) = \min \mathcal{D}_F(\mathcal{P}), \quad (3.16)$$

$$\mathcal{D}_A(\mathcal{P}) = \left\{ D \in \mathcal{D}_G(\mathcal{P}) : D - \{u\} \in \mathcal{L}, \forall u \in D \right\}, \quad (3.17)$$

где, как и прежде, $\mathfrak{B}(\cdot)$ обозначает блокатор семейства множеств; $\mathfrak{I}(H) := \{Y \in \mathcal{L} : Y \preceq H\}$ — порядковый идеал решетки \mathcal{L} , порожденный ее элементом H ; $\{\mathfrak{I}(H) \cap \mathcal{L}^a : H \in \mathcal{L}^c\}^\perp := \{\mathcal{L}^a - (\mathfrak{I}(H) \cap \mathcal{L}^a : H \in \mathcal{L}^c)\}$.

Доказательство. Утверждения (3.14), (3.16) и (3.17) следуют непосредственно из определений. Соотношение (3.15) легко следует из (3.14), с учетом Утверждения 1.1. \square

Говорят, что непустое семейство $\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$ непустых подмножеств конечного множества $\bigcup_{i \in [\alpha]} A_i$ комбинаторно изоморфно семейству $\mathcal{B} := \{B_1, B_2, \dots, B_\alpha\}$ подмножеств множества $\bigcup_{i \in [\alpha]} B_i$, если

существует такое взаимно однозначное отображение $\varphi: \bigcup_{i \in [\alpha]} A_i \rightarrow \bigcup_{i \in [\alpha]} B_i$, что для каждого $i \in [\alpha]$ выполнено $\varphi(A_i) = B_i$.

Будем говорить, что многогранники \mathcal{P} и \mathcal{Q} имеют одинаковые А-, G- или F-диагональные типы, если семейства $\mathcal{D}_A(\mathcal{P})$ и $\mathcal{D}_A(\mathcal{Q})$, $\mathcal{D}_G(\mathcal{P})$ и $\mathcal{D}_G(\mathcal{Q})$, $\mathcal{D}_F(\mathcal{P})$ и $\mathcal{D}_F(\mathcal{Q})$ соответственно комбинаторно изоморфны.

Очевидно, что отношение «иметь одинаковый диагональный комбинаторный тип» также является отношением эквивалентности и порождает комбинаторную классификацию на множестве всех многогранников.

Для многогранника \mathcal{P} обозначим через $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ класс всех многогранников, имеющих комбинаторный тип как у \mathcal{P} , а через $\mathcal{F}_A(\mathcal{P})$ — класс всех многогранников, имеющих А-диагональный тип как у \mathcal{P} ; обозначения $\mathcal{F}_G(\mathcal{P})$ и $\mathcal{F}_F(\mathcal{P})$ будут нести аналогичный смысл.

Утверждение 3.8. *Для произвольного многогранника \mathcal{P} справедливы соотношения*

$$\mathcal{F}_A(\mathcal{P}) \supset \mathcal{F}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_G(\mathcal{P}) \supset \mathcal{F}_F(\mathcal{P}).$$

Доказательство. Заметим, что если семейство подмножеств какого-либо определенного типа всегда однозначно определяет семейство подмножеств некоторого другого типа с помощью операций, инвариантных относительно взаимно однозначных отображений, то комбинаторная эквивалентность на основе комбинаторного изоморфизма семейств подмножеств первого типа влечет комбинаторную эквивалентность на основе комбинаторного изоморфизма семейств подмножеств второго типа; другими словами, комбинаторные типы, определяемые подмножествами второго типа, «шире». В связи со сказанным, из Утверждения 3.7 получаем:

$$(3.14) \quad \implies \mathcal{F}_G(\mathcal{P}) \supset \mathcal{F}_F(\mathcal{P}),$$

$$(3.15) \quad \implies \mathcal{F}(\mathcal{P}) \supset \mathcal{F}_G(\mathcal{P}),$$

$$(3.16) \quad \implies \mathcal{F}_G(\mathcal{P}) \supset \mathcal{F}(\mathcal{P}),$$

$$(3.17) \quad \implies \mathcal{F}_A(\mathcal{P}) \supset \mathcal{F}_G(\mathcal{P}).$$

□

Известно, что граневая структура симплициального многогранника определяется (в нашей терминологии) структурой семейства его А-диагоналей. Теперь можно рассматривать это утверждение как следствие того, что $\mathcal{F}_G(\mathcal{P}) =$

$\mathcal{F}(\mathcal{P})$, и того, что для симплициального \mathcal{P} выполнено $\mathcal{D}_A(\mathcal{P}) = \mathcal{D}_G(\mathcal{P})$. Справедливо и более сильное утверждение.

Утверждение 3.9. *Если \mathcal{P} — симплициальный многогранник, то $\mathcal{F}_A(\mathcal{P}) = \mathcal{F}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_G(\mathcal{P})$.*

Доказательство. С учетом только что изложенного достаточно показать, что если $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_A(\mathcal{P})$, то \mathcal{Q} — симплициальный. Для этого достаточно установить, что каждая грань многогранника \mathcal{Q} имеет не более d вершин. Если $V \subset \text{vert } \mathcal{Q}$ определяет грань \mathcal{Q} , то V не содержит ни одной A -диагонали многогранника \mathcal{Q} , поэтому $W \subset \text{vert } \mathcal{Q}$, — образ множества V при биекции, осуществляющей комбинаторный изоморфизм семейств A -диагоналей, — не содержит A -диагоналей многогранника \mathcal{P} , а значит, лежит в некоторой грани \mathcal{P} . Отсюда, ввиду симплициальности \mathcal{P} , имеем $|W| = |V| \leq d$.

Имеются примеры многогранников, для которых $\mathcal{F}_A(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_G(\mathcal{P}) = \mathcal{F}(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_F(\mathcal{P})$.

Пример 3.5. *Пусть $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$, где \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 — симплексы. Покажем, что из $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_A(\mathcal{P})$ вытекает $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_F(\mathcal{P})$. По Утверждению 3.4 из соотношения (3.8), $\mathcal{D}_A(\mathcal{P}) = \{\text{vert } \mathcal{P}_1, \text{vert } \mathcal{P}_2\}$. Пусть $\text{vert } \mathcal{Q} = V_1 \cup V_2$, где V_1, V_2 — A -диагонали \mathcal{Q} , соответствующие A -диагоналям $\text{vert } \mathcal{P}_1$ и $\text{vert } \mathcal{P}_2$ многогранника \mathcal{P} . Легко убедиться непосредственно по определению, что в этой ситуации $\mathcal{Q} = \text{conv } V_1 \perp \text{conv } V_2$ (где обе выпуклые оболочки — симплексы), а теперь по Утверждению 3.4 из соотношения (3.10), $\mathcal{D}_F(\mathcal{Q}) = \{V_1, V_2\}$, то есть $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_F(\mathcal{P})$.*

Итак, симплициальность многогранника \mathcal{P} влечет $\mathcal{F}_A(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_G(\mathcal{P})$, согласно Утверждению 3.9. Кроме того, согласно Примеру 3.5, можно привести примеры многогранников (симплициальных), для которых $\mathcal{F}_G(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_F(\mathcal{P})$. Последнее, однако, скорее исключение, чем правило, даже для симплициальных многогранников. По меньшей мере, Пример 3.1 демонстрирует симплициальные многогранники \mathcal{P} с $\mathcal{F}_G(\mathcal{P}) \neq \mathcal{F}_F(\mathcal{P})$. Действительно, стоит достаточно малым «шевелением» вершин многогранника \mathcal{P} вывести все вершины \mathcal{P} в общее положение, как получится многогранник \mathcal{Q} с изоморфной решеткой граней (то есть $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_G(\mathcal{P})$), но без F -диагоналей, не являющихся G -диагоналями, — в то время как у \mathcal{P} такая F -диагональ есть, — это $\text{vert } \mathcal{P}_2$ (то есть $\mathcal{Q} \notin \mathcal{F}_F(\mathcal{P})$).

Частный случай Примера 3.1 — 3-многогранник \mathcal{P}_0 (\mathcal{P}_2 — плоский многоугольник) дает возможность построить серию примеров многогранников, для которых в цепочке $\mathcal{F}_A(\mathcal{P}) \supset \mathcal{F}_G(\mathcal{P}) \supset \mathcal{F}_F(\mathcal{P})$ оба включения — строгие.

Пример 3.6. Рассмотрим в \mathbb{R}^d , где $d \geq 4$, два многогранника с одним и тем же количеством вершин, а именно $2d$: \mathcal{Q}_1 — призму, в основании которой лежит $(d-1)$ -симплекс, и \mathcal{P} — $(d-3)$ -кратную пирамиду над 3-многогранником \mathcal{P}_0 . Нетрудно убедиться, что для обоих многогранников семейства A -диагоналей пусты и, таким образом, $\mathcal{Q}_1 \in \mathcal{F}_A(\mathcal{P})$, однако, очевидно, что \mathcal{Q}_1 и \mathcal{P} не эквивалентны комбинаторно и, таким образом, $\mathcal{Q}_1 \notin \mathcal{F}_G(\mathcal{P})$.

Введем теперь в рассмотрение многогранник \mathcal{Q}_2 , получаемый из \mathcal{P} упомянутым выше малым «шевелением вершин» \mathcal{P}_0 , приводящим их в общее положение в \mathbb{R}^3 без изменения граневой структуры \mathcal{P}_0 . Согласно Утверждениям 3.2 и 3.3, многогранник \mathcal{Q}_2 не имеет F -диагоналей, отличных от G -диагоналей, в то время как \mathcal{P} имеет таковую — $(d-3)$ -кратную пирамиду над плоским многоугольником \mathcal{P}_2 . Таким образом, $\mathcal{Q}_2 \in \mathcal{F}_G(\mathcal{P})$, но $\mathcal{Q}_2 \notin \mathcal{F}_F(\mathcal{P})$ и, значит, $\mathcal{F}_A(\mathcal{P}) \supsetneq \mathcal{F}_G(\mathcal{P}) \supsetneq \mathcal{F}_F(\mathcal{P})$. \square

Полученные в этом разделе результаты могут быть эффективно использованы при исследовании свойств положительных базисов линейных пространств.

3.2. Положительные базисы линейных пространств

Теория положительных базисов — известный в комбинаторной геометрии аппарат исследований конечномерного пространства (подробнее см., например, [175, 239, 240, 243], а также в [173, Ch. 2], [244, Ch. 1]). В этом разделе всесторонне исследуются комбинаторные свойства положительных базисов конечномерных евклидовых пространств, как представителей всего многообразия МНП несовместных систем линейных неравенств.

Положительный базис (ПБ) \mathbf{B} линейного пространства \mathbf{L} определяется как минимальное по включению подмножество в \mathbf{L} , положительная оболочка (то есть наименьший выпуклый конус с вершиной в нулевом векторе $\mathbf{0} \in \mathbf{L}$, содержащий \mathbf{B}) которого совпадает с \mathbf{L} .

Положительные базисы в \mathbb{R}^n изучаются нами, в частности, с точки зрения комбинаторной структуры двух специальных семейств подмножеств — так называемых минимальных подбазисов и максимальных односторонних подмножеств.

Хорошо известно, что для положительных базисов \mathbf{B} в пространстве \mathbb{R}^n справедливы неравенства $n + 1 \leq |\mathbf{B}| \leq 2n$ (см, например, работу [243]).

Положительный базис \mathbf{B} в \mathbb{R}^n называют минимальным, если $|\mathbf{B}| = n + 1$, и максимальным, если $|\mathbf{B}| = 2n$.

Подмножество \mathbf{B}' положительного базиса \mathbf{B} называют подбазисом базиса \mathbf{B} , если \mathbf{B}' — положительный базис в линейной оболочке $\text{lin } \mathbf{B}'$ множества \mathbf{B}' . Подбазис $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$ называют минимальным подбазисом, если \mathbf{B}' — минимальный положительный базис в $\text{lin } \mathbf{B}'$, то есть $\text{pos } \mathbf{B}' = \text{lin } \mathbf{B}'$ и $|\mathbf{B}'| = \dim \text{lin } \mathbf{B}' + 1$.

Положительный базис \mathbf{B} в пространстве \mathbb{R}^n называют строгим положительным базисом (СПБ), если для любых его непересекающихся подмножеств \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 выполнено $\text{pos } \mathbf{B}_1 \cap \text{pos } \mathbf{B}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Положительный базис \mathbf{B} из $n + r$ точек в \mathbb{R}^n является строгим положительным базисом тогда и только тогда, когда существует разбиение $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \dot{\cup} \mathbf{B}_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathbf{B}_r$, где $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_r$ — попарно непересекающиеся минимальные подбазисы положительного базиса \mathbf{B} . При этом пространство представляется в виде прямой суммы $\mathbb{R}^n = \text{lin } \mathbf{B}_1 + \text{lin } \mathbf{B}_2 + \dots + \text{lin } \mathbf{B}_r$. В частности, минимальный и максимальный положительные базисы являются строгими положительными базисами.

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.10. Пусть \mathbf{B} — положительный базис из $n + r$ точек в \mathbb{R}^n . Тогда существует разбиение $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \dot{\cup} \mathbf{B}_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathbf{B}_r$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $|\mathbf{B}_i| \geq |\mathbf{B}_{i+1}| \geq 2, i \in [r]$.
- 2) $\text{pos}(\mathbf{B}_1 \dot{\cup} \mathbf{B}_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathbf{B}_j)$ — линейное подпространство размерности $|\mathbf{B}_1 \dot{\cup} \mathbf{B}_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathbf{B}_j| - j, j \in [r]$.

Утверждение 3.10 доказано в [238, 239].

Определение 3.2. Множество $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ называется односторонним, если оно целиком содержится в открытом полупространстве, ограниченном гиперплоскостью, проходящей через $\mathbf{0}$. Максимальные по включению односторонние подмножества некоторого множества называются максимальными односторонними подмножествами.

Эффективным при изучении положительных базисов оказалось понятие диаграммы положительного базиса.

Пусть заданы упорядоченные наборы векторов $\mathbf{B} := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n+r})$ из \mathbb{R}^n и $\mathbf{E} := (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n+r})$ из \mathbb{R}^r . Набор \mathbf{E} называют линейным представлением набора \mathbf{B} , если матрица \mathbf{C} порядка $n + r$, i -я строка которой есть вектор $(b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}, e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ir})$, где $(b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}) =: \mathbf{b}_i$ и $(e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ir}) =: \mathbf{e}_i$, не вырождена, и каждый из первых ее n столбцов ортогонален каждому из ее r последних столбцов. Если набор \mathbf{B} положительно порождает пространство \mathbb{R}^n , то множество точек из набора \mathbf{E} — одностороннее. Пусть \mathbf{H} — гиперплоскость, строго отделяющая одноэлементное множество $\{\mathbf{0}\}$ от выпуклой оболочки $\text{conv } \mathbf{E}$. Обозначим через $\bar{\mathbf{b}}_i$ точку пересечения гиперплоскости \mathbf{H} с лучом $\text{ray } \{\mathbf{e}_i\}$. Набор $\bar{\mathbf{B}} := (\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \dots, \bar{\mathbf{b}}_{n+r})$ называют диаграммой положительного базиса $\mathbf{B} := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n+r})$. Далее будут использоваться следующие свойства диаграмм положительных базисов.

- Утверждение 3.11.** (i) Каждая точка диаграммы $\bar{\mathbf{B}} := (\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \dots, \bar{\mathbf{b}}_{n+r})$, являющаяся вершиной многогранника $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}$, встречается по меньшей мере дважды в наборе $\bar{\mathbf{B}}$, и при этом $\dim \bar{\mathbf{B}} = r - 1$.
- (ii) Любой набор, удовлетворяющий условиям (i), является диаграммой некоторого положительного базиса $\mathbf{B} := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n+r})$ в \mathbb{R}^n .
- (iii) Множество \mathbf{B} — строгий положительный базис тогда и только тогда, когда $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}$ — симплекс, и каждая из точек $\bar{\mathbf{b}}_i$ набора $\bar{\mathbf{B}}$ совпадает с одной из его вершин.
- (iv) Подмножество $\mathbf{B}' := \{\mathbf{b}_i : i \in I \subseteq [n + r]\}$ положительного базиса \mathbf{B} является минимальным подбазисом тогда и только тогда, когда в диаграмме $\bar{\mathbf{B}}$ поднабор $\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}}'$ совпадает с $\mathbf{F} \cap \bar{\mathbf{B}}$ для некоторой гипергранни \mathbf{F} многогранника $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}$.
- (v) Подмножество \mathbf{B}' положительного базиса \mathbf{B} является максимальным односторонним тогда и только тогда, когда поднабор $\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}}'$ является G-диагональю набора $\bar{\mathbf{B}}$.

Утверждения (i)÷(iv) из Утверждения 3.11 доказаны в работе [243].

Следующее вспомогательное утверждение будет полезным для дальнейшего исследования.

Утверждение 3.12. Пусть \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 — d -мерные многогранники, $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$, $\text{vert } \mathcal{P}_1 \neq \text{vert } \mathcal{P}_2$. Тогда некоторая собственная грань многогранника \mathcal{P}_1 имеет непустое пересечение с внутренностью многогранника \mathcal{P}_2 .

3.2.1. Максимальные односторонние подмножества положительного базиса

Пусть $\mathbf{B} := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n+r})$ — положительный базис пространства \mathbb{R}^n и $\{\mathbf{B}_i : i \in [k]\}$ — семейство максимальных односторонних подмножеств множества \mathbf{B} . Обозначим $\alpha(\mathbf{B} := \max_{i \in [k]} |\mathbf{B}_i|$ и $\beta(\mathbf{B} := \min_{i \in [k]} |\mathbf{B}_i|$.

Охарактеризуем строгие положительные базисы в терминах их односторонних подмножеств.

Утверждение 3.13. Положительный базис \mathbf{B} пространства \mathbb{R}^n является строгим положительным базисом тогда и только тогда, когда любое одностороннее подмножество $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$ содержит не более n элементов, то есть $\alpha(\mathbf{B}) = \beta(\mathbf{B}) = n$.

Доказательство. Докажем необходимость. Если \mathbf{B} — СПБ, то все точки набора \mathbf{B} расположены в вершинах $(r-1)$ -мерного симплекса $\text{conv } \overline{\mathbf{B}}$; следовательно, любая G -диагональ набора \mathbf{B} содержит r элементов и поэтому (см. Утверждение 3.11(v)) любое одностороннее подмножество в \mathbf{B} содержит не более n элементов.

Докажем достаточность. Пусть любое одностороннее подмножество положительного базиса \mathbf{B} пространства \mathbb{R}^n содержит не более n элементов. Предположим, что \mathbf{B} не является строгим положительным базисом. Тогда возможны лишь два варианта:

- а) $\text{conv } \overline{\mathbf{B}}$ — не симплекс;
- б) $\text{conv } \overline{\mathbf{B}}$ — симплекс, и существует точка $\bar{\mathbf{b}} \in \overline{\mathbf{B}}$, но $\bar{\mathbf{b}} \notin \text{vert } \text{conv } \overline{\mathbf{B}}$.

В случае а) в наборе $\overline{\mathbf{B}}$ найдется G -диагональ $\overline{\mathbf{B}}(N)$, $N \subset [n+r]$, из $k \leq r-1$ точек, то есть $|N| = k \leq r-1$. Действительно, пусть $\overline{\mathbf{B}}(M)$ — набор из r точек аффинной размерности $r-1 = \dim \overline{\mathbf{B}}$, то есть $\text{conv } \overline{\mathbf{B}}(M)$ является симплексом. Поскольку $\text{conv } \overline{\mathbf{B}}$ не является симплексом, то (см. Утверждение 3.12 хотя бы одна собственная грань множества $\text{conv } \overline{\mathbf{B}}(M)$ имеет непустое пересечение с

внутренностью множества $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}$. Следовательно, в этой грани содержится G -диагональ $\bar{\mathbf{B}}(N)$, $N \subset M$, где $|N| < |M| = r$.

В случае б) рассмотрим набор $\bar{\mathbf{B}}(M)$, где $M \subset [n+r]$, из r точек аффинной размерности $r-1$, содержащий точку $\bar{\mathbf{b}}$. Поскольку $\bar{\mathbf{b}} \notin \text{vert } \text{conv } \bar{\mathbf{B}}$, то, согласно Утверждению 3.12, хотя бы одна собственная грань симплекса $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}(M)$ имеет непустое пересечение с внутренностью симплекса $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}$. Следовательно, в этой грани содержится G -диагональ $\bar{\mathbf{B}}(N)$, $N \subset M$, $|N| < |M| = r$.

Таким образом, в обоих случаях в $\bar{\mathbf{B}}$ нашлась G -диагональ, содержащая менее чем r точек набора и, значит, (см. Утверждение 3.11(v)) в положительном базисе \mathbf{B} найдется максимальное одностороннее подмножество, содержащее более чем n элементов — противоречие. \square

Утверждение 3.14. Пусть \mathbf{B} — положительный базис пространства \mathbb{R}^n , содержащий $n+r$ точек. Тогда

$$n \leq \alpha(\mathbf{B}) \leq \begin{cases} n+r-1 & \text{при } r \in [n-1], \\ 0 & \text{при } r = n. \end{cases}$$

Более того, если $r \in [n-1]$, то для каждого s такого, что $n \leq s \leq n+r-1$, найдется положительный базис пространства \mathbb{R}^n из $n+r$ точек такой, что $\alpha(\mathbf{B}) = s$.

Доказательство. Неравенство $n \leq \alpha(\mathbf{B}) \leq n+r-1$ очевидно. Если $r = n$, то \mathbf{B} — максимальный положительный базис. Следовательно, \mathbf{B} — строгий положительный базис и, по Утверждению 3.13, получаем $\alpha(\mathbf{B}) = n$.

Пусть теперь $1 \leq r \leq n-1$ и $n \leq s \leq n+r-1$. Построим положительный базис из $n+r$ точек в \mathbb{R}^n такой, что $\alpha(\mathbf{B}) = s$. Для этого достаточно в качестве $\bar{\mathbf{B}}$ взять набор точек $\bar{\mathbf{B}} := (\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \dots, \bar{\mathbf{b}}_{n+r})$ в \mathbb{R}^{r-1} такой, что $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}$ есть $(r-1)$ -мерный симплекс, каждая вершина которого встречается два раза в наборе $\bar{\mathbf{B}}$, а оставшиеся $n+r-2r = n-r \geq 1$ точек лежат в относительной внутренности $(s-n)$ -мерной грани $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}$. Тогда все G -диагонали набора $\bar{\mathbf{B}}$ имеют размерность, большую или равную, чем $(r-1) - (s-n)$, причем найдется G -диагональ, имеющая размерность $(r-1) - (s-n)$, то есть состоящая из $r-s+n$ точек. Тогда $\alpha(\mathbf{B}) = n+r - (r-s+n) = s$. \square

Утверждение 3.15. Пусть s и d — натуральные числа такие, что $s \leq d$. Тогда найдется d -мерный многогранник, содержащий $2d - s + 1$ вершин, все G -диагонали которого s -мерны.

Доказательство. При $s := 1$ в качестве многогранника с требуемым свойством можно взять выпуклую оболочку множества $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_d, -\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2, \dots, -\mathbf{x}_d\}$, где $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_d\}$ — линейный базис в \mathbb{R}^d . Проведем индукцию по s . Пусть в пространстве \mathbb{R}^{d-1} , $d \geq s$, по предположению индукции, найдется многогранник \mathcal{P} с $2(d-1) + 1 - (s-1)$ вершинами, все G -диагонали которого $(s-1)$ -мерны. Вложим многогранник \mathcal{P} в гиперплоскость $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^d$ и возьмем произвольную точку $\mathbf{x} \notin \mathbf{H}$. Тогда многогранник $\text{conv}(\mathcal{P} \cup \{\mathbf{x}\})$ имеет размерность d , содержит $2d + 1 - s$ вершин, и все G -диагонали его s -мерны. \square

Утверждение 3.16. Пусть \mathbf{B} — положительный базис из $n + r$ точек в \mathbb{R}^n . Тогда

$$n \leq \beta(\mathbf{B}) \leq \begin{cases} n & \text{при } r \in \{1, 2, n-1, n\}, \\ n+r-2 & \text{при } 2 \leq r < n-1. \end{cases}$$

Если $n+r \geq 4(r-1)$, то для всякого s такого, что $n \leq s \leq n+r-2$, найдется положительный базис \mathbf{B} пространства \mathbb{R}^n из $n+r$ точек такой, что $\beta(\mathbf{B}) = s$.

Доказательство. Если $r := 1$ или $r := n$, то множество \mathbf{B} является строгим положительным базисом и, согласно Утверждению 3.13, $\beta(\mathbf{B}) = n$. Пусть $r := n-1$. Тогда для диаграммы $\overline{\mathbf{B}}$ имеем $\dim \overline{\mathbf{B}} = n-2$, $|\text{vert conv } \overline{\mathbf{B}}| \leq \frac{n+r}{2} = n - \frac{1}{2}$, то есть $\text{conv } \overline{\mathbf{B}}$ — симплекс. Следовательно, в $\overline{\mathbf{B}}$ найдется G -диагональ, содержащая $n-1$ точек и, значит, $\beta(\mathbf{B}) = n$ (см. Утверждение 3.11(v)). Если $r \geq 2$, то не существует набора $\overline{\mathbf{B}}$ из $n+r$ точек с $\dim \overline{\mathbf{B}} = r-1 \geq 1$ такого, что все его G -диагонали нульмерны. Следовательно, в этом случае $\beta(\mathbf{B}) \leq n+r-2$. Поскольку $\text{lin } \mathbf{B} = \mathbb{R}^n$, то $\beta(\mathbf{B}) \geq n$. Пусть теперь $n+r \geq 4(r-1)$, $n \leq s \leq n+r-2$ и $r \geq 2$. В пространстве \mathbb{R}^d , где $d := r-1$, можно построить (см. Утверждение 3.15) d -мерный многогранник \mathcal{P} , содержащий $2d + 1 - s'$ вершин, все G -диагонали которого s' -мерны для всякого $s' \in [d]$. Положим $s' := n + d - s$. Построим набор \mathbf{E} из $n+r$ точек пространства \mathbb{R}^n , в котором каждая точка из множества вершин $\text{vert } \mathcal{P}$ представлена не менее чем дважды и $\text{vert conv } \mathbf{B} = \text{vert } \mathcal{P}$. Набор \mathbf{E} является диаграммой некоторого положительного базиса \mathbf{B} в \mathbb{R}^n

(см. Утверждение 3.11(ii)). Поскольку все G -диагонали набора \mathbf{E} — s' -мерны, то $\beta(\mathbf{B}) = n + r - (s' + 1) = s$ (см. Утверждение 3.11(v)). \square

3.2.2. Симплициальное представление положительного базиса

Утверждение 3.17. Пусть \mathbf{H} — гиперплоскость пространства \mathbb{R}^n , не содержащая $\mathbf{0}$, и $\mathbf{B}', \mathbf{B}''$ — конечные подмножества точек в \mathbf{H} . Положим $\mathbf{B} := \mathbf{B}' \cup -\mathbf{B}''$. Тогда множество \mathbf{B} является положительным базисом пространства \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда

$$\dim(\mathbf{B}' \cup \mathbf{B}'') = n - 1, \quad (3.18)$$

$$\text{ri conv } \mathbf{B}' \cap \text{ri conv } \mathbf{B}'' \neq \emptyset, \quad (3.19)$$

и для любых $\mathbf{B}'_1 \subset \mathbf{B}_1, \mathbf{B}'_2 \subset \mathbf{B}_2$ таких, что $\mathbf{B}'_1 \cup \mathbf{B}'_2 \neq \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$, условия (3.18) и (3.19) не выполняются одновременно.

Доказательство. Достаточно показать, что свойства (3.18) и (3.19) равносильны тому, что множество $\mathbf{B}' \cup -\mathbf{B}''$ положительно порождает пространство \mathbb{R}^n . Пусть свойства (3.18) и (3.19) выполнены. Предположим, что $\mathbf{B}' \cup -\mathbf{B}''$ не порождает положительно пространство \mathbb{R}^n . Тогда $\text{pos}(\mathbf{B}' \cup -\mathbf{B}'') \neq \mathbb{R}^n$, и найдется гиперплоскость $\mathbf{\Gamma}$, опорная к выпуклой оболочке $\text{pos}(\mathbf{B}' \cup -\mathbf{B}'')$ в точке $\mathbf{0}$. Ясно, что $\mathbf{H} \cap \mathbf{\Gamma} \neq \emptyset$, так как иначе получаем противоречие с включением $\mathbf{B}', \mathbf{B}'' \subset \mathbf{H}$. Пусть $\mathbf{\Gamma}^+$ и $\mathbf{\Gamma}^-$ — два полупространства, ограниченные гиперплоскостью $\mathbf{\Gamma}$, и пусть, для определенности, $\text{pos}(\mathbf{B}' \cup -\mathbf{B}'') \subset \mathbf{\Gamma}^+$. Положим $\mathbf{E} := \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{H}$, $\mathbf{E}^+ := \mathbf{\Gamma}^+ \cap \mathbf{H}$, $\mathbf{E}^- := \mathbf{\Gamma}^- \cap \mathbf{H}$. Тогда для полуплоскостей \mathbf{E}^+ и \mathbf{E}^- выполнены включения $\mathbf{B}' \subset \mathbf{E}^+, \mathbf{B}'' \subset \mathbf{E}^-$, то есть плоскость \mathbf{E} разделяет множества \mathbf{E}^+ и \mathbf{E}^- в гиперплоскости \mathbf{H} , что невозможно ввиду (3.18) и (3.19).

Предположим теперь, что $\mathbf{B}' \cup -\mathbf{B}''$ положительно порождает пространство \mathbb{R}^n . Отсюда следует, что \mathbf{B}' и \mathbf{B}'' не отделяются плоскостью размерности $n - 2$ в гиперплоскости \mathbf{H} , а это влечет (3.18) и (3.19). \square

В доказательстве Утверждения 3.17 обоснована невозможность разделения плоскостью \mathbf{E} множеств \mathbf{E}^+ и \mathbf{E}^- в гиперплоскости \mathbf{H} . При этом рассуждение опирается на теорему об отделимости выпуклых множеств из [207, Ch. 2], см. Лемму 3.4; см. также, например, [12, §8], [20, §4.5], [101,

§1.3], [158, §III.28]. См. [70, §1.12], [73, §1.12], [159, §II.7] об отделимости многогранных множеств.

Таким образом, положительному базису \mathbf{B} пространства \mathbb{R}^n можно поставить в соответствие пару $(\mathbf{B}', \mathbf{B}'')$, если взять произвольную гиперплоскость \mathbf{H} такую, что $\mathbf{0} \notin \mathbf{H}$, и для каждого $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$, $\{\gamma \mathbf{b} : \gamma \in \mathbb{R}\} \cap \mathbf{H} \neq \emptyset$; затем положить $\mathbf{B}' := \{\gamma \mathbf{B} : \gamma > 0\} \cap \mathbf{H}$, $\mathbf{B}'' := \{-\gamma \mathbf{B} : \gamma > 0\} \cap \mathbf{H}$. Тогда положительные базисы \mathbf{B} и $\mathbf{B}' \cup -\mathbf{B}''$ совпадают с точностью до положительных множителей.

Пара $(\mathbf{B}', \mathbf{B}'')$ называется представлением положительного базиса \mathbf{B} .

Представление $(\mathbf{B}', \mathbf{B}'')$ положительного базиса \mathbf{B} , в котором выпуклые оболочки $\text{conv } \mathbf{B}'$ и $\text{conv } \mathbf{B}''$ — симплексы, называется симплициальным представлением.

Утверждение 3.18. Пусть \mathbf{B} — положительный базис из $n + r$ точек в \mathbb{R}^n . Тогда существует линейный базис $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$ в \mathbb{R}^n , строго отделяющийся в \mathbb{R}^n от своего дополнения до \mathbf{B} гиперплоскостью, содержащей $\mathbf{0}$. Более того, количество различных таких линейных базисов не меньше 2^r .

Доказательство. Проводим индукцию по n и r . При $n := 1$ и $r := 1$ утверждение тривиально. Пусть теперь $n > 1$ и $r > 1$. Воспользуемся разбиением $\mathbf{B} = \mathbf{E}_1 \dot{\cup} \mathbf{E}_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathbf{E}_r$ со свойствами, гарантируемыми Утверждением 3.10. Обозначим $\mathbf{E} := \mathbf{E}_1 \dot{\cup} \mathbf{E}_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathbf{E}_{r-1}$ и $p := |\mathbf{B}_r|$, где $p \geq 2$. Заметим, что выпуклая оболочка $\text{conv } \mathbf{E}_r$ — симплекс, причем пересечение $\text{aff } \mathbf{E} \cap \text{aff } \mathbf{E}_r$ состоит из единственной точки $\mathbf{z} \in \text{ri } \text{conv } \mathbf{E}_r$, и подпространство $\mathbf{L} := \text{pos } \mathbf{B}$ имеет размерность $n - p - 1$. По предположению индукции, найдется линейный базис $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$, строго отделяемый в \mathbf{L} от $\mathbf{E} - \mathbf{E}'$ некоторым подпространством $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}$ размерности $n - p - 2$. С учетом уже изложенного, любое подмножество $\mathbf{E}'_r \subset \mathbf{E}_r$, содержащее $p - 1$ точек, вместе с множеством $\mathbf{E}' \subset \mathbf{L}$ образует линейный базис в \mathbb{R}^n . Покажем, что $\mathbf{E}' \cup \mathbf{E}'_r$ строго отделяется от своего дополнения до \mathbf{B} . Пусть \mathbf{H}_1 — плоскость размерности $p - 2$, проходящая через точку \mathbf{z} и строго отделяющая \mathbf{E}'_r от $\mathbf{E}_r - \mathbf{E}'_r$ в $\text{aff } \mathbf{E}_r$. Рассмотрим гиперплоскость $\mathbf{H} := \text{aff } (\mathbf{L} \cup \mathbf{H}_1) = \text{lin } (\mathbf{L} \cup \mathbf{H}_1)$ в \mathbb{R}^n и в ней — подпространство \mathbf{L}_2 размерности $n - 2$ с условиями $\mathbf{L}_1 \subseteq \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_2 \cap \mathbf{E} = \emptyset$. Достаточно малым поворотом гиперплоскости \mathbf{H} вокруг \mathbf{L}_2 в нужную сторону получаем гиперплоскость \mathbf{H}^* такую, что $\mathbf{0} \in \mathbf{H}^*$, и строго отделяющую линейный базис $\mathbf{E}' \cup \mathbf{E}'_r$ от своего дополнения до \mathbf{B} . Заметим, что,

по предположению индукции, \mathbf{E}' можно выбрать не менее чем 2^{r-1} способами, а \mathbf{E}'_r — ровно $p \geq 2$ способами, то есть существует не менее, чем 2^r способов выбрать линейный базис нужного вида, что и требовалось доказать. \square

Утверждение 3.19. *Любой положительный базис пространства \mathbb{R}^n имеет симплицальное представление.*

Доказательство. Согласно Утверждению 3.18, в положительном базисе \mathbf{B} можно выделить линейный базис $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}$ такой, что множества \mathbf{B}_0 и $\mathbf{B} - \mathbf{B}_0$ строго отделяются гиперплоскостью \mathbf{H} , проходящей через $\mathbf{0}$. Пусть \mathbf{c} — вектор нормали к \mathbf{H} , и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle > 0$ для всех $\mathbf{b} \in \mathbf{B}_0$, а также $\langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle < 0$, для всех $\mathbf{b} \in \mathbf{B} - \mathbf{B}_0$. Положим $\mathbf{H}_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$. Тогда пара $(\mathbf{B}', \mathbf{B}'')$, где $\mathbf{B}' := \{\lambda \mathbf{B}_0 : \lambda > 0\} \cap \mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}'' := \{-\lambda(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) : \lambda > 0\} \cap \mathbf{H}_1$, и есть требуемое представление. Действительно, из того, что \mathbf{B}_0 есть линейный базис, следует, что $\text{conv } \mathbf{B}'$ — симплекс, имеющий размерность $n - 1$. Предположим, что $\text{conv } \mathbf{B}''$ — не симплекс. Пусть $\mathbf{x}_0 \in \text{ri } \text{conv } \mathbf{B}' \cap \text{ri } \text{conv } \mathbf{B}''$. По теореме Каратеодори, найдется подмножество $\mathbf{B}'_1 \subseteq \mathbf{B}''$ такое, что $\mathbf{x}_0 \in \text{conv } \mathbf{B}'_1$, причем $\text{conv } \mathbf{B}'_1$ — симплекс, то есть $\mathbf{B}'_1 \subsetneq \mathbf{B}''$. Поскольку $\dim \mathbf{B}' = n - 1$, то $\text{ri } \text{conv } \mathbf{B}' \cap \text{ri } \text{conv } \mathbf{B}'_1 \neq \emptyset$ и, кроме того, $\dim(\mathbf{B}'_1 \cup \mathbf{B}') = n - 1$, $\mathbf{B}'_1 \cup \mathbf{B}'_1 \neq \mathbf{B}' \subset \mathbf{B}''$. Получаем противоречие с Утверждением 3.17. \square

Доказательство Утверждения 3.19 опирается на теорему Каратеодори, — см., например, [12, §3.7], [17, §1.2], [101, §1.2], [207, §2.3], [238], [255, Lect. 1] об этом классическом результате выпуклого анализа.

3.2.3. Регулярные положительные базисы

Положительный базис \mathbf{B} в пространстве \mathbb{R}^n будем называть регулярным, если для некоторого его симплицального представления $(\mathbf{B}', \mathbf{B}'')$ выполняется включение $\mathbf{B}'' \subset \text{conv } \mathbf{B}'$.

Утверждение 3.20. *Пусть \mathbf{B} — положительный базис из $n + r$ точек в \mathbb{R}^n . Тогда следующие утверждения равносильны:*

- (i) \mathbf{B} — регулярный положительный базис.
- (ii) $\beta(\mathbf{B}) = n$.
- (iii) \mathbf{B} имеет ровно r минимальных подбазисов.

- (iv) Множество $\text{conv } \overline{B}$ — симплекс.
- (v) В каждом минимальном подбазисе найдутся не менее двух точек, входящих только в этот минимальный подбазис.
- (vi) Семейство минимальных подбазисов положительного базиса B образует минимальное по включению покрытие множества B .

Доказательство. (i) \Rightarrow (iii). Пусть (B', B'') — симплицальное представление положительного базиса B , $B', B'' \subset \text{conv } B'$, и $E \subseteq B$. Положим $E^+ := \{\lambda E : \lambda > 0\} \cap B'$ и $E^- := \{-\lambda E : \lambda > 0\} \cap B''$. Из Утверждения 3.17 следует, что E — минимальный подбазис тогда и только тогда, когда множества E^+ и E^- минимальны по включению относительно свойства $\text{ri conv } E^+ \cap \text{ri conv } E^- \neq \emptyset$. Поскольку множество вершин B' симплекса $\text{conv } B'$ аффинно независимо то для каждой точки $b \in \text{conv } B'$ найдется единственное подмножество $B_b \subseteq B'$ такое, что $b \in \text{ri conv } B_b$; кроме того, если $C \subsetneq \text{conv } B'$ и $x \in \text{ri conv } C$, то $B_b \subseteq B_x$ для всякого $b \in C$. Из всего сказанного заключаем, что множество $E \subseteq B$ является минимальным подбазисом регулярного положительного базиса B тогда и только тогда, когда $E^- = \{e\}$, $E^+ = B_e$, для некоторого вектора $e \in B''$. Таким образом, B имеет ровно $|B''| = r$ минимальных подбазисов.

(iii) \Rightarrow (iv). Множество $\text{conv } \overline{B}$ в \mathbb{R}^{r-1} имеет (см. Утверждение 3.11(iv)) ровно r гиперграней и с учетом того, что $\text{aff } \overline{B} = \mathbb{R}^{r-1}$, это означает, что $\text{conv } \overline{B}$ — симплекс.

(iv) \Rightarrow (ii). В симплексе $\text{conv } \overline{B}$ имеются G -диагонали, содержащие ровно r точек (все вершины симплекса) и, следовательно (см. Утверждение 3.11(v)), в B есть максимальное одностороннее подмножество из n точек, то есть $\beta(B) = n$.

(ii) \Rightarrow (i). Пусть B' — максимальное одностороннее подмножество и $|B'| = n$. Заметим, что B' — линейно независимое множество; остается показать, что $-(B - B') \subset \text{pos } B'$. Пусть, напротив, $b \in B - B'$ и $-b \notin \text{pos } B'$. Так как $\text{pos } B'$ — острый конус, то существует гиперплоскость, содержащая 0 и строго отделяющая вектор $-b$ от B' и, значит, точка b и множество B' лежат в одном открытом полупространстве, — противоречие с максимальностью одностороннего множества B' .

(iv) \Rightarrow (v). Пусть E — минимальный подбазис в B . Ему соответствует гипергрань F симплекса $\text{conv } \overline{B}$, так что $b \in E \iff \bar{b} \notin F$ для всякого вектора $b \in B$ (см. Утверждение 3.11(iv)). Выберем вектор $x \in \text{vert conv } \overline{B}$ такой, что $x \notin F$. В положительном базисе B найдутся две различные точки b и e такие,

что $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{e}} = \mathbf{x}$ (см. Утверждение 3.11(i)). Так как вектор \mathbf{x} содержится во всех остальных гипергранях симплекса $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}$, то точки \mathbf{b} и \mathbf{e} не могут входить ни в какой другой минимальный подбазис, кроме \mathbf{E} , — см. Утверждение 3.11(iv).

(v) \Rightarrow (vi). Легко проверяется.

(vi) \Rightarrow (iv). От противного, — пусть $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}$ не является симплексом, тогда число его гиперграней N подчинено неравенству $N \geq r + 1$. Ввиду минимальности покрытия минимальными подбазисами и характеристики последних на языке диаграмм (см. Утверждение 3.11(iv)), любые $N - 1 \geq r$ гиперграней $\text{conv } \bar{\mathbf{B}}$ имеют непустое пересечение. Отсюда, по теореме Хелли, примененной в пространстве \mathbb{R}^{r-1} , заключаем, что все N гиперграней имеют непустое пересечение, — противоречие. \square

В доказательстве импликации (vi) \Rightarrow (iv) из Утверждения 3.20 используется классическое утверждение о выпуклых множествах, теорема Хелли. Утверждения типа теоремы Хелли могут быть найдены, например, в [12, §3.7], [17, §1.2], [129, §IV.21], [207, Ch. 2].

Следствие 3.1. *Любой строгий положительный базис является регулярным.*

Доказательство. Из Утверждения 3.13, для строгого положительного базиса \mathbf{B} в пространстве \mathbb{R}^n выполняется равенство $\beta(\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{B}) = n$. \square

Следствие 3.2. *Если $n \in [4]$, то любой положительный базис пространства \mathbb{R}^n является регулярным. Кроме того, для произвольного n при $r \in \{1, 2, n - 1, n\}$ любой положительный базис пространства \mathbb{R}^n из $n + r$ точек является регулярным.*

Доказательство. В силу Утверждения 3.16, в перечисленных случаях имеем $\beta(\mathbf{B}) = n$. \square

Следствие 3.3. *При каждом $n \geq 5$ в пространстве \mathbb{R}^n найдется положительный базис, не являющийся регулярным.*

Доказательство. В силу Утверждения 3.16, при каждом $n \geq 5$ в \mathbb{R}^n найдется положительный базис \mathbf{B} из $n + 3 \geq 4(3 - 1)$ точек, для которого выполняется $\beta(\mathbf{B}) = n + 1$. \square

Утверждение 3.21. *Пусть \mathbf{B} и \mathbf{E} — положительные базисы из $n + r$ точек пространства \mathbb{R}^n . Семейство минимальных подбазисов положительного*

базиса \mathbf{B} комбинаторно изоморфно семейству минимальных подбазисов положительного базиса \mathbf{E} тогда и только тогда, когда семейство максимальных односторонних подмножеств из \mathbf{B} комбинаторно изоморфно семейству максимальных односторонних подмножеств из \mathbf{E} .

Доказательство. В любом положительном базисе пространства \mathbb{R}^n семейство минимальных подбазисов и семейство максимальных односторонних подмножеств положительного базиса однозначно определяют друг друга, что и доказывает утверждение. \square

Утверждение 3.22. Пусть $I_1, I_2, \dots, I_r \subset [n]$. Тогда семейство $\{I_1, I_2, \dots, I_r\}$ образует минимальное по включению покрытие множества $[n]$ в том и только том случае, когда найдется регулярный положительный базис $\mathbf{B} := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_{n+r}\}$ пространства \mathbb{R}^n с семейством $\{\mathbf{B}(I_1 \cup \{n+1\}), \mathbf{B}(I_2 \cup \{n+2\}), \dots, \mathbf{B}(I_r \cup \{n+r\})\}$ минимальных подбазисов, где $\mathbf{B}(I') = \{\mathbf{b}_i : i \in I'\}$. При этом \mathbf{B} — строгий положительный базис тогда и только тогда, когда I_1, I_2, \dots, I_r — попарно непересекающиеся подмножества.

Доказательство. Достаточность следует из Утверждения 3.20(v).

Покажем необходимость. Пусть \mathbf{H} — гиперплоскость в пространстве \mathbb{R}^n , не содержащая $\mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ — вершины некоторого симплекса в \mathbf{H} . Выберем для каждого индекса $i \in [r]$ точку $\mathbf{e}_i \in \text{ri conv}\{\mathbf{b}_j : j \in I_i\}$. Обозначим $\mathbf{B}' := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ и $\mathbf{B}'' := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r\}$. Тогда $\text{ri conv } \mathbf{B}' \cap \text{ri conv } \mathbf{B}'' \neq \emptyset$, поскольку $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_r = [n]$. Пусть $\mathbf{B}'_1 \subseteq \mathbf{B}'$ и $\mathbf{B}''_1 \subseteq \mathbf{B}''$. Если $\mathbf{B}'_1 = \mathbf{B}'$ и $\mathbf{B}''_1 \neq \mathbf{B}''$, то $\text{ri conv } \mathbf{B}'_1 \cap \text{ri conv } \mathbf{B}''_1 = \emptyset$, ввиду минимальности покрытия $\{I_1, I_2, \dots, I_r\}$ множества $[n]$. Пусть $\mathbf{B}'_1 \neq \mathbf{B}'$. Тогда \mathbf{B}'_1 лежит в некоторой гиперграни \mathbf{F} симплекса $\text{conv } \mathbf{B}'$. Положим $\mathbf{H}_1 := \text{aff } \mathbf{F}$, где $\dim \mathbf{H}_1 = n - 2$. Заметим, что из $\text{ri conv } \mathbf{B}'_1 \cap \text{ri conv } \mathbf{B}''_1 \neq \emptyset$ следует, что $\mathbf{B}'_1 \cup \mathbf{B}''_1 \subset \mathbf{H}_1$, то есть $\dim(\mathbf{B}'_1 \cup \mathbf{B}''_1) = n - 2$. Таким образом, выполнены условия Утверждения 3.17, поэтому множество $\mathbf{B} := \mathbf{B}'_1 \cup -\mathbf{B}''_1$ является положительным базисом пространства \mathbb{R}^n . Пара $(\mathbf{B}'_1, \mathbf{B}''_1)$ является симплицальным представлением положительного базиса \mathbf{B} , — см. доказательство Утверждения 3.19. Положительный базис \mathbf{B} регулярен, поскольку, по построению, $\mathbf{B}'' \subset \text{conv } \mathbf{B}'$. Обозначим $\mathbf{b}_{n+i} := -\mathbf{e}_i$ для $i \in [r]$. Тогда регулярный положительный базис \mathbf{B} имеет семейство минимальных подбазисов $\{\{\mathbf{b}_{n+i}\} \cup \{\mathbf{b}_j : j \in I_i\} : i \in [r]\}$, как было показано в доказательстве

импликации (i) \Rightarrow (iii) Утверждения 3.20. Тем самым первое утверждение доказано. Последнее утверждение о СПБ является известным фактом. \square

Доказательство Утверждения 3.22 завершается ссылкой на известный факт, который может быть найден в [238, Теорема 2.1].

3.3. Многогранники и несовместные системы неравенств

Продолжим исследование несовместных систем (2.20) однородных строгих линейных неравенств ранга r над евклидовым вещественным пространством \mathbb{R}^r . Объектом исследования в дальнейшем будет выступать система более общего вида

$$\mathbf{S} := \{ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r; \|\mathbf{a}_i\| = 1, i \in [m] \}, \quad (3.20)$$

определяемая множеством $\mathbf{A}(\mathbf{S}) := \{ \mathbf{a}_i : i \in [m] \}$ задающих ее векторов.

Далее будут использоваться обозначение \mathbf{J} для семейства мультииндексов максимальных совместных подсистем системы \mathbf{S} и обозначение \mathbf{I} для семейства мультииндексов ее минимальных несовместных подсистем. Символы \mathfrak{q} и \mathfrak{p} будут обозначать количества мультииндексов в семействах \mathbf{J} и \mathbf{I} , соответственно; $\mathfrak{q} := \#\mathbf{J}$, $\mathfrak{p} := \#\mathbf{I}$.

Следующие два утверждения будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 3.3. Система (3.20) несовместна тогда и только тогда, когда $\sum_{i \in [m]} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, для некоторых неотрицательных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, среди которых хотя бы одно отлично от 0.

Лемма 3.4. Пусть \mathbf{V} и \mathbf{W} — выпуклые множества в \mathbb{R}^r такие, что $\text{aff}(\mathbf{V} \cup \mathbf{W}) = \mathbb{R}^r$. Множества \mathbf{V} и \mathbf{W} могут быть разделены гиперплоскостью тогда и только тогда, когда $\text{ri} \mathbf{V} \cap \text{ri} \mathbf{W} = \emptyset$.

Лемма 3.3 приведена в [159], а Лемма 3.4 — в [207, Ch. 2].

Неравенство $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0$ системы \mathbf{S} называют существенным, если оно не входит хотя бы в одну из ее МСП. Систему \mathbf{S} называют несократимой, если все ее неравенства являются существенными.

Утверждение 3.23. Система \mathbf{S} — несократимая тогда и только тогда, когда множество $\text{pos} \mathbf{A}(\mathbf{S})$ является линейным подпространством.

Доказательство. Покажем необходимость. Пусть система (3.20) несократима. Покажем, что множество $\mathbf{K} := \text{pos } \mathbf{A}(\mathbf{S})$ — линейное подпространство. Допустим противное. Свяжем с подмножеством индексов $L \subseteq [m]$ подмножество $\mathbf{A}_L(\mathbf{S}) := \{\mathbf{a}_i : i \in L\}$ соответствующих задающих векторов и положим $J_0 := \{i \in [m] : \mathbf{a}_i \in \mathbf{K} \cap -\mathbf{K}\}$ и $J' := [m] - J_0 = \{i \in [m] : \mathbf{a}_i \notin \mathbf{K} \cap -\mathbf{K}\}$. Поскольку множество $\mathbf{K} \cap -\mathbf{K}$ — линейное подпространство, с учетом нашего предположения, $\mathbf{K} \neq \mathbf{K} \cap -\mathbf{K}$ и, значит, $|J'| > 0$, $\dim(\mathbf{K} \cap -\mathbf{K}) \leq r - 1$. Обозначим через \mathbf{K}^* полярную конуса \mathbf{K} , то есть множество $\mathbf{K}^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{g} \in \mathbf{K}\}$. С учетом соотношения $\dim(\mathbf{K} \cap -\mathbf{K}) + \dim \mathbf{K}^* = r$ имеем $\dim \mathbf{K}^* \geq 1$. Для произвольного вектора $\mathbf{b} \in \text{ri } \mathbf{K}^*$ выполнено соотношение $0 \leq \langle \mathbf{K} \cap -\mathbf{K}, \mathbf{b} \rangle \leq 0$, поэтому $\langle \mathbf{A}_{J_0}(\mathbf{S}, \mathbf{b}) \rangle = 0$.

Покажем, что $\langle \mathbf{A}_{J'}(\mathbf{S}, \mathbf{b}) \rangle > 0$. Пусть, напротив, найдется индекс $s \in J'$ такой, что $\langle \mathbf{a}_s, \mathbf{b} \rangle = 0$. Поскольку $(\mathbf{K} \cap -\mathbf{K}) + \text{lin } \mathbf{K}^* = \mathbb{R}^r$, то $\mathbf{a}_s = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$, где $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{K} \cap -\mathbf{K}$, $\mathbf{z}_2 \in \text{lin } \mathbf{K}^*$, и $\mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0}$ ввиду $\mathbf{a}_s \notin \mathbf{K} \cap -\mathbf{K}$. Но тогда $\langle \mathbf{a}_s, \mathbf{b} - \varepsilon \mathbf{z}_2 \rangle = -\varepsilon \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle < 0$ при любом $\varepsilon > 0$, причем $\mathbf{b} - \varepsilon \mathbf{z}_2 \in \text{lin } \mathbf{K}^*$, что противоречит выбору точки $\mathbf{b} \in \mathbf{K}^*$. Далее, поскольку $\langle \mathbf{A}_{J_0}(\mathbf{S}, \mathbf{b}) \rangle = 0$ и $\langle \mathbf{A}_{J'}(\mathbf{S}, \mathbf{b}) \rangle > 0$, равенство $\sum_{i \in [m]} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ влечет равенство $\lambda_i = 0$ для всех индексов $i \in J'$. Это означает, с учетом Леммы 3.3, что неравенства с индексами из J' не входят ни в одну МНП системы \mathbf{S} ; следовательно, они входят во все МСП системы \mathbf{S} , что противоречит условию несократимости этой системы.

Покажем теперь достаточность. Пусть $\mathbf{K} := \text{pos } \mathbf{A}(\mathbf{S})$ — линейное подпространство в \mathbb{R}^n . Покажем, что система (3.20) несократима. Достаточно убедиться в том, что неравенство $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle > 0$ существенно. Поскольку \mathbf{K} — линейное подпространство, то $-\mathbf{a}_1 = \sum_{i \in [m]} \lambda_i \mathbf{a}_i$ для некоторых множителей $\lambda_i \geq 0$, $i \in [m]$. Последнее равенство можно переписать в виде $-\mathbf{a}_1 = \sum_{i=2}^m \lambda'_i \mathbf{a}_i$, где $\lambda'_i \geq 0$, $2 \leq i \leq m$. Среди всех таких равенств выберем некоторое равенство $-\mathbf{a}_1 = \sum_{i \in L} \alpha_i \mathbf{a}_i$ с минимальным числом элементов в множестве L . Покажем, что подсистема с мультииндексом L системы \mathbf{S} совместна. Предположим, что это не так. Тогда, по Лемме 3.3, $\sum_{i \in L} \gamma_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ для некоторых чисел $\gamma_i \geq 0$, $i \in L$, среди которых хотя бы одно положительно. Положим $\varepsilon := \min\{\frac{\alpha_i}{\gamma_i} : i \in L, \gamma_i > 0\}$. Тогда

$$-\mathbf{a}_1 = \sum_{i \in L} \alpha_i \mathbf{a}_i - \sum_{i \in L} \varepsilon \gamma_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in L} (\alpha_i - \varepsilon \gamma_i) \mathbf{a}_i,$$

где $\alpha_i - \varepsilon\gamma_i \geq 0$, по выбору ε , для каждого индекса $i \in L$, причем $\alpha_i - \varepsilon\gamma_i = 0$ для некоторого $i \in L$. Но это противоречит минимальности L . Следовательно, подсистема с мультииндексом L совместна. С другой стороны, подсистема с мультииндексом $L \cup \{1\}$ несовместна ввиду $-\mathbf{a}_1 = \sum_{i \in L} \alpha_i \mathbf{a}_i$, где $\alpha_i \geq 0$ для всех $i \in L$. Таким образом, неравенство $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle > 0$ является существенным, поскольку оно не входит в МСП, содержащую совместную подсистему с мультииндексом L . Утверждение доказано. \square

Соотношение $\dim(\mathbf{K} \cap -\mathbf{K}) + \dim \mathbf{K}^* = r$ и связанное с ним равенство $(\mathbf{K} \cap -\mathbf{K}) + \text{lin } \mathbf{K}^* = \mathbb{R}^r$, приводимые в доказательстве Утверждения 3.23, даны в [129].

Из Утверждения 3.23 следует, что объединение двух несократимых подсистем системы \mathbf{S} также является ее несократимой подсистемой, поэтому система \mathbf{S} имеет наибольшую по включению несократимую несовместную подсистему; пусть J_0 — мультииндекс такой подсистемы. Тогда семейства $\{J_0 \cap J_s : s \in [\mathbf{q}]\}$ и $\{I_s : s \in [\mathbf{p}]\}$ являются семействами мультииндексов МСП и МНП несократимой системы $\{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0, i \in J_0\}$ соответственно в том и только том случае, когда $\{J_s : s \in [\mathbf{q}]\}$ и $\{I_s : s \in [\mathbf{p}]\}$ — семейства мультииндексов МСП и МНП системы (3.20) соответственно. Таким образом, при изучении комбинаторных свойств несовместных систем линейных неравенств можно, не уменьшая общности, ограничиться несократимыми системами.

3.3.1. Комбинаторные свойства многогранников

В комбинаторной теории многогранников одним из эффективных общих методов изучения комбинаторной структуры многогранников является метод преобразований Гейла. Преобразование Гейла связывает вопросы граневой структуры r -мерного многогранника с m вершинами, с вопросами положительной зависимости определенной конфигурации из m векторов, лежащих в пространстве \mathbb{R}^{m-r-1} . В этом разделе будет использоваться преобразование Гейла для установления связи комбинаторных свойств несовместных систем (3.20) с комбинаторными свойствами гиперграней и диагоналей многогранников. Всюду ниже, рассматривая диагонали многогранников, имеются в виду G -диагонали, определенные ранее. Для

произвольного конечного непустого набора точек $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^r$ введем понятие диагонали следующим образом:

Определение 3.3. *Минимальный по включению поднабор $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{X}$, обладающий свойством*

$$\text{conv } \mathbf{D} \cap \text{ri conv } \mathbf{X} \neq \emptyset,$$

называется диагональю набора \mathbf{X} .

Напомним необходимые определения. Пусть дана конечная последовательность точек $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \subset \mathbb{R}^r$ такая, что $\text{aff } \mathbf{X} \simeq \mathbb{R}^r$. Рассмотрим $(m - r - 1)$ -мерное пространство $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ всех решений $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ следующей системы однородных линейных уравнений:

$$\sum_{i \in [m]} \beta_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \quad \sum_{i \in [m]} \beta_i = 0.$$

Зафиксируем в пространстве $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ его произвольный упорядоченный базис $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{m-r-1})$. Пусть $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ — $(m - r - 1) \times m$ -матрица, строками которой служат векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{m-r-1}$ этого базиса. Для каждого индекса $i \in [m]$ обозначим через \mathbf{x}_i^* i -ый столбец матрицы $\mathbf{B}(\mathbf{X})$, рассматриваемый как вектор в пространстве \mathbb{R}^{m-r-1} .

Последовательность $\mathbf{X}^* = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_m^*)$ называется преобразованием Гейла последовательности \mathbf{X} .

Преобразование Гейла не единственно. Но поскольку для любых двух различных преобразований существует линейный изоморфизм \mathbb{R}^{m-r-1} на себя, переводящий первое преобразование Гейла во второе, обычно не интересуются, какой именно базис пространства $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ берется за основу преобразования Гейла.

Преобразование Гейла, в общем случае, может содержать попарно совпадающие точки. Поэтому каждой из попарно различных точек преобразования Гейла приписывают метку — количество ее преобразов.

Определение 3.4. *Пусть $L \subseteq [m]$. Если $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{R}^r$, то подпоследовательность $\mathbf{X}(L) := \{\mathbf{x}_i \in \mathbf{X} : i \in L\}$ называется когранью последовательности \mathbf{X} , если $\text{conv } \mathbf{X}(L) \cap \text{aff } \mathbf{X}([m] - L) = \emptyset$.*

Напомним некоторые базовые свойства преобразования Гейла.

Утверждение 3.24. Пусть дана последовательность точек $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \subset \mathbb{R}^r$, $\text{aff } \mathbf{X} = \mathbb{R}^r$. Пусть $\mathbf{X}^* := (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_m^*) \subset \mathbb{R}^{m-r-1}$ — преобразование Гейла набора \mathbf{X} .

- (i) Если $\sum_{i \in [m]} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, то набор \mathbf{X} является преобразованием Гейла последовательности \mathbf{X}^* .
- (ii) $\sum_{i \in [m]} \mathbf{x}_i^* = \mathbf{0}$, $\text{lin } \mathbf{X}^* = \mathbb{R}^{m-r-1}$, $\text{pos } \mathbf{X}^* = \mathbb{R}^{m-r-1}$.
- (iii) $\mathbf{0} \in \text{ri conv } \mathbf{X}^*$.
- (iv) Поднабор $\mathbf{X}(L)$ — когрань набора \mathbf{X} тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \text{ri conv } \mathbf{X}^*(L)$.

Ряд свойств преобразования Гейла принято формулировать в терминах диаграмм Гейла.

Определение 3.5. Диаграммой Гейла $\mathfrak{G}(\mathcal{P})$ ограниченного выпуклого r -многогранника $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r$ с m вершинами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ называют последовательность точек $(\mathfrak{g}(\mathbf{x}_1), \mathfrak{g}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathfrak{g}(\mathbf{x}_m)) \in \mathbb{R}^{m-r-1}$, определенных по правилу: $\mathfrak{g}(\mathbf{x}_i) := \mathbf{0}$ при $\mathbf{x}_i^* = \mathbf{0}$, и $\mathfrak{g}(\mathbf{x}_i) := \frac{\mathbf{x}_i^*}{\|\mathbf{x}_i^*\|}$ при $\mathbf{x}_i^* \neq \mathbf{0}$.

Таким образом, диаграмма Гейла состоит из конечной последовательности точек множества $\mathbb{S}^{m-r-2} \cup \{\mathbf{0}\}$, где \mathbb{S}^{m-r-2} — это $(m-r-2)$ -мерная единичная сфера с центром в $\mathbf{0}$.

Для подпоследовательности $V \subseteq \text{vert } \mathcal{P}$, $\mathfrak{G}(V)$ обозначает подмножество диаграммы Гейла $\mathfrak{G}(\mathcal{P})$, соответствующее набору V .

Следствие 3.4. (i) Множество $X \subset \text{vert } \mathcal{P}$ — когрань набора вершин многогранника \mathcal{P} тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \text{ri conv } \mathfrak{G}(X)$.

(ii) Множество точек $X := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ представляет собой набор вершин некоторого r -многогранника \mathcal{P} тогда и только тогда, когда

(a) либо $\mathfrak{g}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$ для всех $\mathbf{x}_i \in X$, то есть когда \mathcal{P} — r -симплекс, либо когда

(b) для любого открытого полупространства $C_{>}$ в \mathbb{R}^{m-r-1} такого, что $\overline{C_{>}} \ni \mathbf{0}$, выполняется условие $|\{i \in [m]: \mathfrak{g}(\mathbf{x}_i) \in C_{>}\}| \geq 2$.

(iii) Если F — грань набора вершин многогранника \mathcal{P} , и $Z := \text{vert } \mathcal{P} - \text{vert } F$ — соответствующая ей когрань, то $\text{ri conv } \mathfrak{G}(Z \ni \mathbf{0})$.

- (iv) Многогранник \mathcal{P} является симплицальным тогда и только тогда, когда для каждой гиперплоскости \mathbf{H} , содержащей $\mathbf{0}$, выполнено $\mathbf{0} \notin \text{ri conv}(\mathcal{G}(\mathcal{P}) \cap \mathbf{H})$.
- (v) Многогранник \mathcal{P} является r -гранной пирамидой тогда и только тогда, когда в его диаграмме Гейла вектор $\mathbf{0}$ имеет метку r .

В работах [60, 66, 68, 168, 230, 232], [231, §5.6], [246, Ch. 5], [253, §3.6] доказываются свойства преобразований и диаграмм Гейла, приведенные в Утверждении 3.24 и Следствии 3.4.

Следующее вспомогательное утверждение понадобится в дальнейшем.

Лемма 3.5. Пусть $\mathbf{X} := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{R}^r$. Включение $\mathbf{0} \in \text{ri conv } X$ имеет место тогда и только тогда, когда найдется такой набор коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m > 0$, что $\sum_{i \in [m]} \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$.

Лемма 3.5 доказана в работе [60].

Лемма 3.6. Пусть $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ — последовательность точек пространства \mathbb{R}^r , $\text{aff } \mathbf{X} = \mathbb{R}^r$, и $\mathbf{C} := (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m)$ — последовательность точек пространства \mathbb{R}^{m-r-1} такая, что $\mathbf{C} = \mathbf{X}^*$. Подсистема с мультииндексом L системы $\{\langle \mathbf{c}_i^*, \mathbf{x} \rangle > 0 : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-r-1}; i \in [m]\}$ несовместна тогда и только тогда, когда $\mathbf{X}(L)$ содержит непустую когрань \mathbf{X} .

Доказательство. По Лемме 3.3, подсистема $\{\langle \mathbf{c}_i^*, \mathbf{x} \rangle > 0 : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-r-1}, i \in L\}$ несовместна тогда и только тогда, когда найдутся неотрицательные и не все равные нулю множители λ_k , $k \in L$, такие, что $\sum_{k \in L} \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. По Лемме 3.5, последнее возможно тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \text{ri conv } \mathbf{X}^*(L')$, где $\emptyset \neq L' \subseteq L$, что и доказывает утверждение, в силу Утверждения 3.24(iv). \square

Следующее вспомогательное утверждение, касающееся произвольных наборов точек, в случае наборов вершин выпуклых многогранников было положено нами в основу определения G -диагоналей многогранников.

Лемма 3.7. Рассмотрим набор $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ точек пространства \mathbb{R}^r такой, что $\text{aff } \mathbf{X} = \mathbb{R}^r$. Поднабор $\mathbf{X}(L)$ является диагональю набора \mathbf{X} в том и только том случае, когда $\mathbf{X}(L)$ не содержится целиком ни в одной грани набора \mathbf{X} , а всякий поднабор $\mathbf{X}(L')$, где $\emptyset \neq L' \subset L$, включается хотя бы в одну грань набора \mathbf{X} .

Доказательство. Достаточно показать, что поднабор $\mathbf{X}(L)$ включается в некоторую грань набора \mathbf{X} тогда и только тогда, когда $\text{conv } \mathbf{X}(L) \cap \text{ri conv } \mathbf{X} = \emptyset$.

Пусть $\mathbf{X}(L) \subset \mathbf{X}(M)$ для некоторой грани $\mathbf{X}(M)$ набора \mathbf{X} . Для грани $\mathbf{X}(M)$, по определению, выполняется $\text{aff } \mathbf{X}(M) \cap \text{conv } \mathbf{X}([m] - M) = \emptyset$. Используя Лемму 3.4, можно убедиться в том, что $\text{conv } \mathbf{X}(M) \cap \text{ri conv } \mathbf{X} = \emptyset$, следовательно, и для набора $\mathbf{X}(L)$ выполнено $\text{conv } \mathbf{X}(L) \cap \text{ri conv } \mathbf{X} = \emptyset$.

Пусть теперь соотношение $\text{conv } \mathbf{X}(L) \cap \text{ri conv } \mathbf{X} = \emptyset$ выполнено для некоторого поднабора $\mathbf{X}(L)$. Тогда, по Лемме 3.4, найдется гиперплоскость \mathbf{H} , отделяющая множества $\text{conv } \mathbf{X}(L)$ и $\text{conv } \mathbf{X}$. Положим $M := \{i \in [m] : \mathbf{x}_i \in \mathbf{H}\}$. Отметим, что $\text{aff } \mathbf{X}(M) \cap \text{conv } \mathbf{X}([m] - M) \subseteq \mathbf{H} \cap \text{conv}([m] - M) = \emptyset$, то есть поднабор является гранью набора \mathbf{X} . Далее, $\text{conv } \mathbf{X}(L) \subset \mathbf{H}$ и, значит, $\mathbf{X}(L) \subset \mathbf{X}(M)$. \square

Еще одно вспомогательное утверждение, которое будет использоваться в дальнейшем, таково.

Лемма 3.8. Пусть $\mathbf{X}(L)$ — диагональ набора $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ точек пространства \mathbb{R}^r . Тогда выпуклая оболочка $\text{conv } \mathbf{X}(L)$ является симплексом.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{x}^* \in \text{conv } \mathbf{X}(L) \cap \text{ri conv } \mathbf{X}$. Из теоремы Каратеодори о представлении точек выпуклой оболочки множества из \mathbb{R}^r следует, что $\mathbf{x}^* \in \text{conv } \mathbf{X}(L')$ для некоторого подмножества $L' \subseteq L$ мощности $|L'| = \dim \mathbf{X}(L) + 1$. Предположение, что оболочка $\text{conv } \mathbf{X}(L)$ не является симплексом, противоречит минимальности поднабора $\mathbf{X}(L)$, поскольку $|L'| = \dim \mathbf{X}(L) + 1 < |L|$. \square

Теорема 3.1. Пусть задана несократимая несовместная система линейных неравенств \mathbf{S} и последовательность $\mathbf{B} := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)$ точек аффинной размерности $d := m - r - 1$ в пространстве \mathbb{R}^d такие, что $\mathbf{B}^* := (\mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \dots, \mathbf{b}_m^*) = (\lambda_1 \mathbf{a}_1, \lambda_2 \mathbf{a}_2, \dots, \lambda_m \mathbf{a}_m)$ для некоторых множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m > 0$. Справедливы утверждения:

- (i) Множество $I \subset [m]$ — мультииндекс некоторой МНП системы \mathbf{S} тогда и только тогда, когда дополнение $[m] - I$ — мультииндекс гиперграни набора \mathbf{B} .
- (ii) Множество $J \subset [m]$ — мультииндекс некоторой МСП системы \mathbf{S} тогда и только тогда, когда дополнение $[m] - J$ — мультииндекс диагонали набора \mathbf{B} .

Доказательство. Поскольку все множители λ_k положительны, при доказательстве теоремы можно рассмотреть вместо системы (3.20) систему

$$\{\langle \mathbf{b}_i^*, \mathbf{x} \rangle > 0: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r, i \in [m]\}. \quad (3.21)$$

Пусть I — мультииндекс МНП системы (3.21). Из Леммы 3.6 следует, что I — мультииндекс минимальной по включению непустой кограни набора \mathbf{B} , то есть дополнение $[m] - I$ есть мультииндекс гиперграни набора \mathbf{B} . Обратное утверждение доказывается применением Леммы 3.6 в обратную сторону. Обозначим через \mathbf{I} семейство мультииндексов МНП системы (3.21), а через \mathbf{F} — семейство мультииндексов гиперграней набора \mathbf{B} . Подмножество $J \subset [m]$ — мультииндекс МСП системы (3.21) тогда и только тогда, когда дополнение $[m] - J$ есть минимальное по включению подмножество множества $[m]$ такое, что $([m] - J) \cap I \neq \emptyset$ для всякого мультииндекса $I \in \mathbf{I}$ МНП системы (3.21).

С другой стороны, по Лемме 3.7, дополнение $[m] - J$ является мультииндексом диагонали набора \mathbf{B} тогда и только тогда, когда множество $[m] - J$ есть минимальное по включению подмножество множества $[m]$ такое, что $([m] - J) \cap ([m] - F) \neq \emptyset$ для всякого мультииндекса F гиперграни набора \mathbf{B} .

Поскольку $\mathbf{I} = \{[m] - F: F \in \mathbf{F}\}$, из сказанного выше следует, что J есть мультииндекс МСП системы (3.20) тогда и только тогда, когда дополнение $[m] - J$ — мультииндекс диагонали набора \mathbf{B} . \square

Следствие 3.5. (i) Семейство \mathbf{I} подмножеств множества $[m]$ — семейство мультииндексов всех МНП некоторой несократимой несовместной системы (3.20) ранга r над \mathbb{R}^r тогда и только тогда, когда семейство $\mathbf{I}^\perp := \{[m] - I: I \in \mathbf{I}\}$ — семейство мультииндексов всех гиперграней некоторого набора t точек аффинной размерности $d := t - r - 1$ в пространстве \mathbb{R}^d .

(ii) Семейство \mathbf{J} подмножеств множества $[m]$ — семейство мультииндексов всех МСП некоторой несократимой несовместной системы (3.20) ранга r над \mathbb{R}^r тогда и только тогда, когда семейство $\mathbf{J}^\perp := \{[m] - J: J \in \mathbf{J}\}$ — семейство мультииндексов всех диагоналей некоторого набора t точек аффинной размерности $d := t - r - 1$ в пространстве \mathbb{R}^d .

3.3.2. Комбинаторно дуальные системы

Перейдем к исследованию свойств несовместных систем линейных неравенств

$$S_2 := \{ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r; \|\mathbf{a}_i\| = 1, i \in [m] \}, \quad (3.22)$$

на множество $\mathbf{A}(S_2) := \{ \mathbf{a}_i : i \in [m] \}$ задающих векторов которой наложено следующее структурное ограничение: для любого открытого полупространства $C_{>} \subset \mathbb{R}^r$, определяемого линейным подпространством коразмерности 1, выполнено условие

$$|\{ \mathbf{a} \in \mathbf{A}(S_2) : \mathbf{a} \in C_{>} \}| \geq 2. \quad (3.23)$$

Утверждение 3.25. Для системы (3.22, 3.25) имеет место включение $\mathbf{0} \in \text{ri conv } \mathbf{A}(S_2)$.

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть $\mathbf{0} \notin \text{ri conv } \mathbf{A}(S_2)$. Тогда можно указать подмножество $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}(S_2)$ такое, что $\dim \text{aff } \mathbf{A}' = r - 1$ и $\mathbf{A}(S_2)$ целиком содержится в замкнутом полупространстве, ограниченном гиперплоскостью $\text{aff } \mathbf{A}'$, поскольку невозможность указанного включения означала бы, что набор $\mathbf{A}(S_2)$ целиком содержится в некоторой открытой полусфере единичной сферы \mathbb{S}^{r-1} и, как следствие, совместность системы S_2 . Но включение $\mathbf{A}(S_2)$ в замкнутую полусферу сферы \mathbb{S}^{r-1} противоречит условию (3.23). \square

Утверждение 3.26. Система линейных неравенств (3.22, 3.23) несократима.

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть в соответствии с Утверждением 3.23, множество $\text{pos } \mathbf{A}(S_2)$ не является линейным подпространством. Но это возможно тогда и только тогда (см. доказательство Утверждения 3.25, когда $\text{pos } \mathbf{A}(S_2)$ — некоторое замкнутое полупространство C_{\geq} , ограниченное линейным подпространством \mathbf{H} коразмерности 1 в \mathbb{R}^n ; но это противоречит условию (3.23). \square

Из Утверждений 3.5 и 3.25 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.6. Для системы S_2 вида (3.22, 3.23) найдется такой набор положительных множителей λ_i , что вектор $\mathbf{0}$ является выпуклой комбинацией набора векторов $\mathbf{A}(S_2)$ с этими коэффициентами, то есть $\mathbf{0} = \sum_{i \in [m]} \lambda_i \mathbf{a}_i, \lambda_i > 0, \sum_{i \in [m]} \lambda_i = 1$.

Следующее утверждение проясняет связь между свойствами систем (3.22, 3.23) и свойствами выпуклых многогранников.

Утверждение 3.27. Пусть S_2 — система вида (3.22, 3.23). Справедливы следующие утверждения:

- (i) Семейство подмножеств \mathbf{I} множества $[m]$ является семейством мультииндексов МНП системы S_2 тогда и только тогда, когда семейство $\mathbf{I}^\perp := \{[m] - I : I \in \mathbf{I}\}$ является семейством мультииндексов гиперграней некоторого ограниченного выпуклого $(m - r - 1)$ -многогранника с m вершинами.
- (ii) Семейство подмножеств \mathbf{J} множества $[m]$ является семейством мультииндексов МСП системы S_2 тогда и только тогда, когда семейство $\mathbf{J}^\perp := \{[m] - J : J \in \mathbf{J}\}$ является семейством мультииндексов диагоналей некоторого ограниченного выпуклого $(m - r - 1)$ -многогранника с m вершинами.

Упомянутый многогранник не является пирамидой; в частности, он не является симплексом.

Доказательство. Сопоставим системе S_2 модифицированную систему $S'_2 := \{\langle \lambda_i \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : \mathbf{a}_i \in \mathbf{A}(S_2)\}$ такую, что коэффициенты λ_i удовлетворяют ограничениям из Следствия 3.6. Поскольку все коэффициенты λ_i положительны, множества решений совместных подсистем с одинаковыми мультииндексами для систем S_2 и S'_2 совпадают. Поскольку $\sum_{i \in [m]} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, в соответствии с Утверждением 3.24(i), набор $\{\lambda_1 \mathbf{a}_1, \lambda_2 \mathbf{a}_2, \dots, \lambda_m \mathbf{a}_m\}$ есть преобразование Гейла набора $\{\lambda_1 \mathbf{a}_1, \lambda_2 \mathbf{a}_2, \dots, \lambda_m \mathbf{a}_m\}^*$. По Следствию 3.4(ii)(b) и согласно условию (3.23), получаем, что $\{\lambda_1 \mathbf{a}_1, \lambda_2 \mathbf{a}_2, \dots, \lambda_m \mathbf{a}_m\}^*$ — набор вершин ограниченного выпуклого $(m - r - 1)$ -многогранника в \mathbb{R}^{m-r-1} . Доказательство утверждений (i) и (ii) завершается применением Следствия 3.5.

Напомним, что в наборе векторов $\mathbf{A}(S_2)$, по соглашению, отсутствуют нулевые векторы, поэтому, в соответствии со Следствиями 3.4(ii)(a) и 3.4(v), набор $\{\lambda_1 \mathbf{a}_1, \lambda_2 \mathbf{a}_2, \dots, \lambda_m \mathbf{a}_m\}^*$ не может быть набором вершин пирамиды. \square

Утверждение 3.28. Пусть S_2 — несовместная система (3.22) из m однородных строгих линейных неравенств ранга r , обладающая p минимальными несовместными подсистемами. Пусть \mathbf{J} и \mathbf{I} — семейства мультииндексов всех ее МСП и МНП соответственно.

Система S_2 удовлетворяет условию (3.23) тогда и только тогда, когда существует такая несовместная система S_2^0 (чьи семейства мультииндексов всех МСП и МНП обозначаются через \mathbf{J}^0 и \mathbf{I}^0 соответственно) из \mathfrak{p} однородных строгих линейных неравенств ранга $r + \mathfrak{p} - t$, обладающая t минимальными несовместными подсистемами, что

- (i) для каждого мультииндекса МНП $I \in \mathbf{I}$ найдется такой индекс $t \in [\mathfrak{p}]$ неравенства из системы S_2^0 , что $\#\{I^0 \in \mathbf{I}^0 : t \in I^0\} = |I|$;
- (ii) для каждого мультииндекса МНП $I^0 \in \mathbf{I}^0$ найдется такой индекс $t \in [t]$ неравенства из системы S_2 , что $\#\{I \in \mathbf{I} : t \in I\} = |I|$;
- (iii) для каждого мультииндекса МСП $J \in \mathbf{J}$ найдется такое семейство мультииндексов МНП $\mathcal{M} \subset \mathbf{I}^0$, $\#\mathcal{M} = t - |J|$, что $\bigcup_{I \in \mathcal{M}} I = [\mathfrak{p}]$;
- (iv) для каждого мультииндекса МСП $J^0 \in \mathbf{J}^0$ найдется такое семейство мультииндексов МНП $\mathcal{M} \subset \mathbf{I}$, $\#\mathcal{M} = \mathfrak{p} - |J^0|$, что $\bigcup_{I \in \mathcal{M}} I = [t]$.

Доказательство. Утверждение 3.27 ставит в соответствие системе S_2 выпуклый $(t - r - 1)$ -многогранник \mathcal{P} с t вершинами и \mathfrak{p} гипергранями. Для него, в свою очередь, существует двойственный $(t - r - 1)$ -многогранник \mathcal{P}^0 с \mathfrak{p} вершинами и t гипергранями; решетки граней многогранников \mathcal{P} и \mathcal{P}^0 антиизоморфны. Доказательство завершается повторным применением Утверждения 3.27, на этот раз — к многограннику \mathcal{P}^0 , причем необходимо показать, что среди векторов, задающих систему S_2^0 , отсутствуют нулевые векторы. Предположим, что это не так. Тогда, в соответствии со Следствием 3.4(v), многогранник \mathcal{P}^0 является пирамидой. Но пирамида \mathcal{P}^0 — многогранник, двойственной к которому является пирамида \mathcal{P} , значит, среди задающих систему S_2 векторов $\mathbf{A}(S_2)$ содержится нулевой вектор $\mathbf{0}$, что противоречит условию. \square

Используемое в доказательстве Утверждении 3.28 утверждение о существовании для каждого выпуклого многогранника двойственного к нему (решетки граней таких многогранников, по определению, антиизоморфны) — фундаментальное наблюдение из выпуклого анализа; см., например, [17, §2.10], [207, §3.4], [255, §2.3]. Двойственным к пирамиде многогранником является пирамида той же размерности [17, §2.10].

3.3.3. Оценки количества подсистем

В дополнение к системам линейных неравенств вида (2.20), (3.20) и (3.22, 3.23) рассмотрим систему неравенств S_2 , чье описание дано в (3.22, 3.23), но удовлетворяющую также одному из двух дополнительных условий:

$$\text{каждая подсистема ранга не выше } r - 1 \text{ совместна}; \quad (3.24)$$

$$\text{каждое неравенство содержится в } p + r - m + 1 \text{ МНП}. \quad (3.25)$$

Ниже, в Утверждении 3.31, будет показано, что эквивалентным является определение системы вида (3.22, 3.24), как системы вида (3.22, 3.23), у которой каждая минимальная несовместная подсистема составлена из $r + 1$ неравенств.

Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3.29. *Если в множестве $A(S_2)$ векторов, задающих систему S_2 вида (3.22, 3.23) ранга 2, отсутствуют попарно противоположные, то система S_2 удовлетворяет условию (3.24).*

Утверждение 3.30. *Если S_2 — система вида (3.22, 3.24), то справедливы утверждения.*

- (i) Семейство подмножеств \mathbf{I} множества $[m]$ является семейством мультииндексов МНП системы S_2 тогда и только тогда, когда семейство $\mathbf{I}^\perp := \{[m] - I : I \in \mathbf{I}\}$ является семейством мультииндексов гиперграней некоторого ограниченного выпуклого симплицеального $(m - r - 1)$ -многогранника с m вершинами.
- (ii) Семейство подмножеств \mathbf{J} множества $[m]$ является семейством мультииндексов МСП системы S_2 тогда и только тогда, когда семейство $\mathbf{J}^\perp := \{[m] - J : J \in \mathbf{J}\}$ является семейством мультииндексов диагоналей некоторого ограниченного выпуклого симплицеального $(m - r - 1)$ -многогранника с m вершинами.

Упомянутый многогранник не является симплексом.

Доказательство. Прежде всего, следует повторить рассуждения, использованные при доказательстве Утверждения 3.27. С учетом того что для произвольной гиперплоскости \mathbf{H} , содержащей вектор

$\mathbf{0}$, выполняется $\mathbf{0} \notin \text{conv}(\mathbf{A}(\mathbf{S}_2) \cap \mathbf{H})$, доказательство завершается применением Следствия 3.4(iv). \square

Утверждение 3.31. Система вида (3.22, 3.23) удовлетворяет условию (3.24) тогда и только тогда, когда все ее минимальные несовместные подсистемы имеют одинаковую мощность, равную $r + 1$. Для любой МНП системы \mathbf{S}_2 вида (3.22, 3.24) количество содержащих ее несовместных подсистем мощности k равно $\binom{m-r-1}{m-k}$.

Доказательство. Поскольку, в соответствии с Утверждением 3.30, все множества индексов $[m] - I$, где $I \in \mathbf{I}$, являются мультииндексами наборов вершин гиперграней симплицеального $(m - r - 1)$ -многогранника, они имеют одинаковую мощность $m - r - 1$. Следовательно, любой мультииндекс I минимальной несовместной подсистемы имеет мощность $r + 1$. \square

Следующие два утверждения показывают, что количества совместных и несовместных подсистем различных мощностей системы \mathbf{S}_2 вида (3.22, 3.24) подчинены специфическим соотношениям.

Утверждение 3.32. Пусть \mathbf{S}_2 — система вида (2.20), (3.23), (3.24), ν_i и τ_i — количества ее совместных и несовместных подсистем мощности i , соответственно.

Выполнены следующие соотношения (здесь x — формальная переменная):

$$\begin{cases} \nu_j = \binom{m}{j}, \text{ при } 0 \leq j \leq r, \\ \nu_{m-1} = \nu_m = 0, \\ \sum_{j=r+1}^m \left(\binom{m}{j} - \nu_j \right) (x-1)^{m-j} = \sum_{j=r+1}^m (-1)^{j-r-1} \left(\binom{m}{j} - \nu_j \right) x^{m-j}. \end{cases}$$

Будем называть эти соотношения уравнениями Дена–Соммервилля для совместных подсистем системы \mathbf{S}_2 . Замена в этих соотношениях $\binom{m}{j} - \nu_j$ на τ_j приводит к уравнениям Дена–Соммервилля для несовместных подсистем системы \mathbf{S}_2 .

Доказательство. В соответствии с Утверждением 3.30, множества индексов $[m] - J$, где $J \in \mathbf{J}$, являются мультииндексами диагоналей набора вершин симплицеального $(m - r - 1)$ -многогранника. Будем понимать семейство

его диагоналей как семейство подмножеств множества атомов его решетки граней \mathcal{L} . Эта решетка имеет ранг $\rho(\mathcal{L}) = m - r$, ее атомы — вершины рассматриваемого многогранника. Пусть n_t — количество t -подмножеств множества атомов решетки \mathcal{L} , содержащих в себе в качестве подмножества хотя бы одну диагональ. Пусть W_j — количество элементов ранга j решетки \mathcal{L} . Здесь $W_0 = 1$ и $W_1 = m$. Иными словами, W_j обозначает количество граней с j вершинами. Имеем

$$n_t = \begin{cases} \binom{W_1}{t} - W_t = \binom{m}{t} - W_t, & \text{при } 0 \leq t \leq m - r - 1, \\ \binom{W_1}{t} = \binom{m}{t}, & \text{при } m - r \leq t \leq m. \end{cases}$$

Ясно, что $n_0 = n_1 = 0$.

Далее, $\nu_k = n_{m-k}$, поэтому

$$\nu_k = \begin{cases} \binom{m}{k}, & \text{при } 0 \leq k \leq r, \\ \binom{m}{k} - W_{m-k}, & \text{при } r + 1 \leq k \leq m. \end{cases}$$

Исследуем случай $r + 1 \leq k \leq m$ подробнее; в этой ситуации $\nu_k = \binom{m}{k} - W_{m-k}$.

Уравнения Дена–Соммервилля для чисел Уитни второго рода W_i решетки \mathcal{L} выглядят следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{\rho(\mathcal{L}-1)} W_i (x-1)^i = \sum_{i=0}^{\rho(\mathcal{L}-1)} (-1)^{\rho(\mathcal{L}-i-1)} W_i x^i,$$

или в нашем случае

$$\sum_{i=0}^{m-r-1} W_i (x-1)^i = \sum_{i=0}^{m-r-1} (-1)^{m-r-i-1} W_i x^i, \quad W_0 = 1, \quad W_1 = m.$$

Перепишем последнее выражение эквивалентным образом в виде:

$$\sum_{j=r+1}^m W_{m-j} (x-1)^{m-j} = \sum_{j=r+1}^m (-1)^{j-r-1} W_{m-j} x^{m-j}, \quad W_0 = 1, \quad W_1 = m.$$

Заменив W_{m-j} на $\binom{m}{j} - \nu_j$, получаем доказываемое выражение. \square

Уравнения Дена–Соммервилля для чисел Уитни второго рода, взятые за основу доказательства Утверждения 3.32, сформулированы в [141, §3.14].

Для наглядности приведем решения нескольких младших уравнений Дена–Соммервилля.

Следствие 3.7. Пусть S_2 — система вида (3.22, 3.24) и ν_i — количество ее совместных подсистем мощности i . Тогда

(i) если $m = r + 3$, то $\nu_{r+1} = \binom{m}{2} - m$

(ii) если $m = r + 4$, то

$$\nu_{r+1} = \binom{m}{3} - 2m + 4,$$

$$\nu_{r+2} = \binom{m}{2} - 3m + 6;$$

(iii) если $m = r + 5$, то

$$\nu_{r+2} = 2\nu_{r+1} - 2\binom{m}{4} + \binom{m}{3},$$

$$\nu_{r+3} = \nu_{r+1} - \binom{m}{4} + \binom{m}{2} - m.$$

Следствие 3.8. Пусть S_2 — система вида (3.22, 3.24) и τ_i — количество ее несовместных подсистем мощности i . Тогда справедливы следующие соотношения:

(i) при $r + 1 \leq i \leq m$,

$$\tau_i = \sum_{j=r+1}^m (-1)^{j-r-1} \binom{m-j}{m-i} \tau_j;$$

(ii) при $k \in [\lfloor \frac{m-r}{2} \rfloor]$,

$$\sum_{j=r+k}^m (-1)^{m-j+1} \binom{j-r-1}{k-1} \tau_j = \sum_{j=m-k+1}^m (-1)^{r+j} \binom{j-r-1}{m-r-k} \tau_j.$$

Доказательство. Указанные соотношения непосредственно следуют из Утверждения 3.30 и следующих утверждений: пусть \mathcal{L} — решетка граней симплицального многогранника. Тогда

(i) уравнения Дена–Соммервилля для \mathcal{L} эквивалентны тому, что

$$W_i = \sum_{j=0}^{\rho(\mathcal{L}-1)} (-1)^{\rho(\mathcal{L}-j-1)} \binom{j}{i} W_j,$$

для $i \in [\rho(\mathcal{L}-1)]$;

(ii) уравнения Дена–Соммервилля для \mathcal{L} эквивалентны тому, что

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{\rho(\mathcal{L}+j)} \binom{\rho(\mathcal{L}-j-1)}{\rho(\mathcal{L}-k)} W_j = \sum_{j=0}^{\rho(\mathcal{L}-k)} (-1)^{j+1} \binom{\rho(\mathcal{L}-j-1)}{k-1} W_j,$$

при $k \in [\lfloor \frac{\rho(\mathcal{L})}{2} \rfloor]$.

□

Эквивалентные реформулировки соотношений Дена–Соммервилля, приводимые в доказательстве Следствия 3.8, могут быть найдены в [68, §1.5].

Утверждение 3.33. Система \mathbf{S}_2 вида (3.22, 3.23) удовлетворяет условию (3.24) тогда и только тогда, когда комбинаторно дуальная к ней система \mathbf{S}_2^0 удовлетворяет условию (3.25).

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству Утверждения 3.28. Поскольку многогранник \mathcal{P} , сопоставляемый системе \mathbf{S}_2 преобразованием Гейла, — симплицальный, двойственный ему многогранник \mathcal{P}^0 является простым. Поэтому система \mathbf{S}_2^0 удовлетворяет (3.25). □

Утверждение 3.34. Пусть система \mathbf{S}_2 вида (3.22, 3.23) удовлетворяет условию (3.25) и пусть $I_1, I_2, \dots, I_{m-r-k-1} \in \mathbf{I}$, где $0 \leq k \leq m-r-2$ — мультииндексы некоторых ее МНП. Положим $I := \bigcup_{j \in [m-r-k-1]} I_j$. Если $I \neq [m]$, то первоначально выбранными мультииндексами $I_1, I_2, \dots, I_{m-r-k-1} \in \mathbf{I}$ исчерпываются такие семейства мультииндексов МНП системы \mathbf{S}_2 , что их объединение есть I .

Доказательство. Система \mathbf{S}_2 вида (3.22, 3.23) удовлетворяет условию (3.25) тогда и только тогда, когда мультииндекс каждой ее минимальной несовместной подсистемы является дополнением до $[m]$ мультииндекса гиперграня некоторого простого $(m-r-1)$ -многогранника \mathcal{P} с m вершинами.

Утверждение следует теперь из следующего наблюдения: пусть \mathcal{P} — простой d -многогранник и F_1, F_2, \dots, F_{d-k} — его гиперграни, где $0 \leq k \leq d-1$. Положим $F := \bigcap_{i \in [d-k]} F_i$ и допустим, что $F \neq \emptyset$. Тогда F представляет собой k -мерную грань многогранника \mathcal{P} и гипергранями F_1, F_2, \dots, F_{d-k} исчерпываются множества граней из \mathcal{P} , содержащих F . \square

Наблюдение, упоминаемое в доказательстве Утверждения 3.34, обсуждается в [17, Теорема 12.14].

Утверждение 3.35. Система S_2 вида (3.22, 3.23) удовлетворяет условию (3.25) тогда и только тогда, когда для любой ее МНП с мультииндексом $I \in \mathbf{I}$ существует в точности $m-r-1$ мультииндексов МНП $I_1, I_2, \dots, I_{m-r-1}$ таких, что для каждого $j \in [m-r-1]$ выполняется $|I \cup I_j| = r+2$.

Доказательство. Согласно Утверждениям 3.30 и 3.33, система S_2 удовлетворяет условию (3.24) тогда и только тогда, когда мультииндекс всякой ее минимальной несовместной подсистемы является дополнением до $[m]$ мультииндекса некоторой гиперграни симплициального $(m-r-1)$ -многогранника \mathcal{P} с m вершинами, двойственного некоторому простому $(m-r-1)$ -многограннику \mathcal{P}^0 . Но \mathcal{P}^0 прост тогда и только тогда, когда каждая его вершина инцидентна в точности $m-r-1$ одномерным граням. Одномерные грани многогранника \mathcal{P}^0 антиизоморфны $(m-r-2)$ -мерным симплексам из \mathcal{P} , откуда и следует доказываемое. \square

В доказательстве Утверждения 3.35 говорится об инцидентности каждой вершины простого многогранника одному и тому же количеству одномерных граней, — см. об этом в [17, Теорема 12.12].

Соотношения Дена–Соммервилля, приведенные в Утверждении 3.32, согласно комбинаторной дуальности, описываемой Утверждениями 3.28 и 3.33, могут быть переформулированы для систем вида (3.22, 3.23), (3.25) следующим образом.

Утверждение 3.36. Пусть S_2 — система вида (3.22, 3.23), (3.25), \mathbf{I} — семейство мультииндексов ее МНП и \mathbf{n}_i — количество таких подсемейств $\{I_1, I_2, \dots, I_i\} \subseteq \mathbf{I}$, что $\bigcup_{j \in [i]} I_j = [m]$. Положим $\mathbf{n}_0 := 0$. Тогда выполнены

следующие соотношения (здесь x — формальная переменная):

$$\begin{cases} \mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_1 = 0, \\ \mathbf{n}_k = \binom{\mathbf{p}}{k}, \text{ при } m - r \leq k \leq \mathbf{p}, \\ \sum_{j=r+\mathbf{p}-m+1}^{\mathbf{p}} \left(\binom{\mathbf{p}}{j} - \mathbf{n}_{\mathbf{p}-j} \right) (x-1)^{\mathbf{p}-j} \\ = \sum_{j=r+\mathbf{p}-m+1}^{\mathbf{p}} (-1)^{j-r-\mathbf{p}+m-1} \left(\binom{\mathbf{p}}{j} - \mathbf{n}_{\mathbf{p}-j} \right) x^{\mathbf{p}-j}. \end{cases}$$

Поскольку каждое подмножество вершин грани симплициального многогранника вновь является множеством вершин некоторой его грани, Утверждение 3.30 позволяет оценить количество подсистем разной мощности в системах вида (3.22, 3.24):

Утверждение 3.37. Пусть S_2 — система вида (3.22, 3.24); ν_k и τ_k — количества ее совместных и несовместных подсистем мощности k соответственно. Положим

$$\Phi_j(m-r-1, m) := \sum_{i=0}^{\lfloor (m-r-1)/2 \rfloor} \binom{i}{j} \binom{m+r+i}{i} + \sum_{i=0}^{\lfloor (m-r-1)/2 \rfloor - 1} \binom{m-r-i-1}{j} \binom{m+r+i}{i}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tau_k &\leq \Phi_{k-r-1}(m-r-1, m), \\ \nu_k &\geq \binom{m}{k} - \Phi_{k-r-1}(m-r-1, m), \end{aligned}$$

для $r+1 \leq k \leq m-2$.

Доказательство. Согласно Утверждению 3.30(i), система S_2 вида (3.22, 3.23) удовлетворяет условию (3.24) тогда и только тогда, когда мультииндекс всякой ее минимальной несовместной подсистемы является дополнением до $[m]$ мультииндекса некоторой гиперграни симплициального $(m-r-1)$ -многогранника \mathcal{P} с m вершинами. Утверждение следует из теоремы МакМюллена о максимальном количестве граней: если положить для симплициального d -мерного многогранника с m вершинами

$$\Phi_j(d, m) := \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{i}{j} \binom{m-d+i-1}{i} + \sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \binom{d-i}{j} \binom{m-d+i-1}{i},$$

то для $1 \leq j \leq d-1$ количество его j -мерных граней не превышает $\Phi_{d-j-1}(d, m)$.
□

Утверждение 3.38. Пусть S_2 — система вида (3.22, 3.24); ν_k и τ_k — количества ее совместных и несовместных подсистем мощности k соответственно. Положим

$$\begin{aligned} & \varphi(m-r-1, m) \\ & := \begin{cases} (m-r-2)m - (m-r)(m-r-3), & \text{при } j = 0, \\ \binom{m-r-1}{j+1}m - \binom{m-r}{j+1}(m-r-j-2), & \text{при } j \in [m-r-3]. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tau_k & \geq \varphi_{k-r-1}(m-r-1, m), \\ \nu_k & \leq \binom{m}{k} - \varphi_{k-r-1}(m-r-1, m), \end{aligned}$$

для $r+1 \leq k \leq m-2$.

Доказательство. Исходное рассуждение — то же, что и в доказательстве Утверждения 3.37. Доказываемое Утверждение следует из теоремы Барнетта о минимальном количестве граней симплицеального многогранника: если положить для симплицеального d -мерного многогранника с m вершинами

$$\varphi_j(d, m) := \begin{cases} (d-1)m - (d+1)(d-2), & \text{при } j = 0, \\ \binom{d}{j+1}m - \binom{d+1}{j+1}(d-j-1), & \text{при } j \in [d-2], \end{cases}$$

то для $1 \leq j \leq d-1$ количество его j -мерных граней не меньше $\varphi_{d-j-1}(d, m)$. □

Теорема МакМюллена о максимальном количестве граней, положенная в основу доказательства Утверждения 3.37, воспроизведена в [17, Следствие 18.3]. Теорема Барнетта о минимальном количестве граней симплицеального многогранника, — см. доказательство Утверждения 3.38, — дана в [17, Следствие 19.6].

3.3.4. Диагонали циклических многогранников

Как отмечалось выше, одной из фундаментальных экстремальных конструкций в задачах комбинаторной теории многогранников является циклический многогранник. Напомним, что он определяется как выпуклая оболочка m различных точек параметрически заданной кривой $\mathbf{x}(t) := (t, t^2, \dots, t^d) \in \mathbb{R}^d$ и обозначается $\mathfrak{C}(d, m)$. В этом параграфе будут подсчитаны число диагоналей в многограннике $\mathfrak{C}(d, m)$ и, как следствие, будет дана оценка для количества МСП в системах неравенств. Впрочем, вопрос о количестве диагоналей в циклических многогранниках представляет и самостоятельный интерес в плане изучения свойств этого важного класса многогранников.

Пусть $V := \{\mathbf{x}_i := \mathbf{x}(t_i) : i \in [m]\}$ — набор вершин циклического многогранника $\mathfrak{C}(d, m)$, причем $i < j \Rightarrow t_i < t_j$. Многогранник $\mathfrak{C}(d, m)$ — симплицальный (то есть всякая его собственная грань представляет собой симплекс) и $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ -смежностный (то есть выпуклая оболочка любых его $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ вершин является гранью многогранника). Будем называть поднабор $X \subseteq V$ связным, если он имеет вид $X = (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_j)$ для некоторых индексов $i \leq j$.

Пусть $Y \subseteq V$. Максимальные по включению связные поднаборы набора Y будем называть компонентами набора Y . Компоненту $Y' \subseteq Y$ с нечетным числом элементов будем называть нечетной, с четным — четной. Компоненту $Y' \subseteq Y$ будем называть концевой, если $\mathbf{x}_1 \in Y'$ или $\mathbf{x}_m \in Y'$. Всякий поднабор $Y \subseteq V$ разбивается на непересекающиеся компоненты. Поднабор $Y \subseteq V$ будем называть (r, s) -набором, если $|Y| = r$ и Y имеет в точности s неконцевых нечетных компонент. Ниже через $s(Y)$ обозначается количество нечетных неконцевых компонент поднабора Y и используется следующая характеристика собственных граней набора V .

Лемма 3.9. *Набор $X \subset V$ является собственной гранью набора V тогда и только тогда, когда $s(X) \leq d - |X|$.*

Лемма 3.9 доказана в [233].

Обозначим через $X \setminus \mathbf{x}$ набор, полученный из набора X удалением элемента \mathbf{x} . Поскольку многогранник $\mathfrak{C}(d, m)$ — симплицальный, для всякой собственной грани X набора V из включения $X' \subset X$ следует, что набор X'

также является (собственной) гранью набора V . Таким образом, из Леммы 3.7 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.10. *Набор $X \subset V$ является диагональю набора V тогда и только тогда, когда X не является собственной гранью набора V , а $X \setminus x$ является его собственной гранью для любого $x \in X$.*

Лемма 3.11. *Пусть $m \geq d+2$. Тогда всякая диагональ X набора V содержит лишь одноэлементные компоненты.*

Доказательство. По Лемме 3.10, набор X не может быть собственной гранью набора V , поэтому, с учетом Леммы 3.9, получаем $s(X) > d - |X|$. Предположим, что набор X имеет компоненту X_0 , содержащую более одного элемента. Поскольку, по Лемме 3.8, выпуклая оболочка $\text{conv } X$ является симплексом, то $|X| \leq d + 1$. По условию Леммы, имеем $m \geq d + 2$ — значит, компонента X_0 не содержит одновременно x_1 и x_m . Пусть, для определенности, $X_0 = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$, где $i \neq 1$. Положим $x := x_j$, если мощность $|X|$ четна, и $x := x_{i+1}$, если мощность $|X|$ нечетна. Тогда из неравенства $s(X) > d - |X|$ следует, что $s(X) \setminus x = s(X) + 1 > d - |X| + 1 = d - |X \setminus x|$, то есть $X \setminus x$ не является собственной гранью набора X , — противоречие с Леммой 3.10. \square

Обозначим через $D(d, m)$ количество всех диагоналей, а через $D_s(d, m)$ — количество диагоналей из s элементов набора V вершин циклического многогранника $\mathfrak{C}(d, m)$.

Утверждение 3.39.

$$D(d, m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \leq d + 1, \\ 2 \binom{m-k-2}{k} + \binom{m-k-2}{k+1}, & \text{если } m \geq d + 2 \text{ и } d = 2k, \\ \binom{m-k-2}{k+1} + \binom{m-k-3}{k}, & \text{если } m \geq d + 2 \text{ и } d = 2k + 1. \end{cases}$$

Доказательство. Если $m \leq d + 1$, то $\mathfrak{C}(d, m)$ — симплекс и, как следствие, набор V имеет единственную диагональ, совпадающую с V .

Пусть $m \geq d + 2$. В силу $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ -смежностности многогранника $\mathfrak{C}(d, m)$, из Леммы 3.10 следует, что

$$D_s(d, m) = 0, \quad 1 \leq s \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor. \quad (3.26)$$

1. Пусть $d = 2k$. Вычислим $D_{k+1}(d, m)$. Из k -смежности многогранника $\mathfrak{C}(d, m)$ и из Леммы 3.10 следует, что поднабор $Y \subset V$ из $k + 1$ элементов является диагональю набора V в том и только том случае, если Y не является собственной гранью набора V . Последнее возможно, согласно Лемме 3.9, тогда и только тогда, когда Y есть $(k + 1, s)$ -набор и $s > d - (k + 1) = k - 1$, то есть Y состоит из $k + 1$ одноэлементных компонент, причем x_1 и x_m не принадлежат Y одновременно.

Подсчет количества таких наборов сводится к следующей задаче: на прямой выделено $m - (k + 1)$ черных и $m - k$ белых точек, причем каждая черная точка находится между двумя белыми. Требуется подсчитать количество всех наборов из $k + 1$ белых точек, не содержащих одновременно две белые крайние точки. Имеем

$$D_{k+1}(d, m) = 2 \binom{m-k-2}{k} + \binom{m-k-2}{k+1}. \quad (3.27)$$

Покажем, что $D_s(d, m) = 0$, если $s > k + 1$. Предположим, что найдется диагональ Y набора V , содержащая $k + 1 + p$ элементов, где $p \geq 1$. По Лемме 3.10, набор Y состоит из $k + 1 + p$ одноэлементных компонент. Удаляя из этого набора первые p элементов, получим набор Y' , состоящий из $k + 1$ одноэлементных компонент, причем $x_1 \notin Y'$. Как было показано выше, такой набор Y' является диагональю набора V , что противоречит минимальности Y . Таким образом, $D_s(d, m) = 0$, если $s > k + 1$, откуда, с учетом (3.26) и (3.27), получаем Утверждение 3.39 для случая $d = 2k$.

2. Пусть $d = 2k + 1$. Вычислим $D_{k+1}(2k + 1, m)$. Рассуждая так же, как в случае $d = 2k$, убеждаемся, что набор Y из $k + 1$ элементов является диагональю набора V тогда и только тогда, когда Y состоит из $k + 1$ одноэлементных неконцевых компонент. Количество таких наборов можно подсчитать рассмотренным выше способом, что дает

$$D_{k+1}(2k + 1, m) = \binom{m-k-2}{k+1}. \quad (3.28)$$

Вычислим $D_{k+2}(2k + 1, m)$. Всякая диагональ Y из $k + 2$ элементов набора V состоит, по Лемме 3.9, из $k + 2$ одноэлементных компонент. Покажем, что при этом $x_1, x_m \in Y$. Предположим, например, что $x_1 \notin Y$. Тогда, удаляя последний элемент набора Y , получим набор Y' , состоящий из $k +$

1 одноэлементных неконцевых компонент, то есть диагональ набора \mathbf{V} , — противоречие с минимальностью \mathbf{Y} .

Пусть теперь \mathbf{Y} — набор, состоящий из $k + 2$ одноэлементных компонент, и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \in \mathbf{Y}$. Тогда \mathbf{Y} есть $(k + 2, k)$ -набор и, по Лемме 3.9, он не является собственной гранью набора \mathbf{V} . Удаляя любой элемент из набора \mathbf{Y} , получим $(k + 1, s')$ -набор \mathbf{Y}' , где $s' \leq k \leq d - (k + 1)$, то есть собственную грань набора \mathbf{V} . Из Леммы 3.10 следует, что набор \mathbf{Y} — диагональ набора \mathbf{V} . Таким образом, набор \mathbf{Y} из $k + 2$ элементов есть диагональ набора \mathbf{V} тогда и только тогда, когда он состоит из $k + 2$ одноэлементных компонент и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \in \mathbf{Y}$. Количество таких наборов равно

$$D_{k+2}(2k + 1, m) = \binom{m-k-3}{k}. \quad (3.29)$$

Покажем, что $D_s(2k + 1, m) = 0$, если $s > k + 2$. Предположим, что найдется диагональ \mathbf{Y} набора \mathbf{V} , содержащая $k + 1 + p$ элементов, где $p \geq 2$. Удаляя из этого набора первые $p - 1$ элементов и последний элемент, получим набор \mathbf{Y}' , состоящий из $k + 1$ одноэлементных неконцевых компонент. Как было показано выше, такой набор является диагональю набора \mathbf{V} , что противоречит минимальности \mathbf{Y} . Таким образом, $D_s(d, m) = 0$, если $s > k + 2$, откуда, с учетом соотношений (3.26), (3.28) и (3.29), получаем Утверждение 3.39 для случая $d = 2k + 1$. \square

Следствие 3.9. *Максимальное количество МСП в несократимых системах вида (3.22, 3.23) ранга $r \geq 1$ из $m \geq 2$ неравенств — не меньше величины*

$$\begin{cases} 2\binom{k-1}{n-1} + \binom{k-1}{n-2}, & \text{если } m + n = 2k + 1, \\ \binom{k-1}{n-1} + \binom{k-2}{n}, & \text{если } m + n = 2k. \end{cases}$$

В следующей Главе 4 на основании разработанных математических моделей будут разрабатываться методы численного решения задач анализа несовместных систем.

Выводы по Главе 3

В Главе 3 для важнейшего класса систем независимости, порождаемых несовместными системами линейных неравенств разработаны комбинаторно-геометрические математические модели для исследования их комбинаторных

свойств. Важную роль при этом играют геометрические представления несовместных систем в виде конечных наборов точек n -мерного евклидового пространства и классический инструмент комбинаторной геометрии — преобразование Гейла.

Выводы по Главе 3.

1. Введено понятие G -диагонали выпуклого многогранника — новая для комбинаторной геометрии математическая конструкция, на основе которой получены важные общенаучные и значимые для диссертационной работы результаты.

2. Показано, что классическая классификация многогранников по комбинаторному типу, определяемая изоморфизмом решеток граней, соответствует комбинаторной классификации по типу изоморфизма семейств G -диагоналей. При этом никакие другие известные определения диагоналей (введенные ранее в этой области) не определяют подобной классификации.

3. Установлено соответствие комбинаторных свойств несовместных систем и комбинаторных свойств многогранников. Семейство индексов МСП несовместной системы линейных неравенств совпадает с семейством индексов дополнений диагоналей некоторого многогранника, а семейство индексов МНП — с семейством индексов дополнений гиперграней этого же многогранника. Полноту этой двойственности завершает введенное в диссертационной работе понятие G -диагонали.

4. Полученная двойственная связь между комбинаторными свойствами несовместных систем линейных неравенств и многогранников позволяет взаимно обогатить теорию линейных неравенств и комбинаторную геометрию путем переноса результатов из одной области в другую.

5. Исследованы комбинаторные свойства положительных базисов конечномерных евклидовых пространств, представляющих все многообразие элементов семейств МНП несовместных систем линейных неравенств.

6. Как пример применения полученной двойственной связи (п. 4), на основе разработанных математических моделей получены оценки снизу для количества МСП несовместной системы с использованием оценки числа диагоналей циклического многогранника.

Результаты, полученные в Главе 3, наряду с результатами, полученными в Главе 2, определяют компоненту «Модели» математического обеспечения вычислительного комплекса.

4. Численные методы решения задач анализа несовместных систем

Эта глава посвящена разработке численных методов решения ряда задач анализа несовместных систем условий. Программная реализация этих методов лежит в основе математического обеспечения вычислительного комплекса для решения задач анализа несовместных систем с массивно параллельной обработкой данных. В частности, в этой главе разрабатываются алгоритмы решения задач поиска и подсчета МСП и МНП системы, алгоритмы решения задачи распознавания образов в геометрической постановке, а также алгоритмы расшифровки монотонных булевых функции, порождаемых несовместными системами и неориентированными графами.

4.1. Системы неравенств и комитеты

В Главе 1 были разработаны базовые методы исследования несовместных систем. Также здесь была обоснована взаимосвязь структурных и комбинаторных свойств несовместных систем с аналогичными свойствами абстрактных симплициальных комплексов. В Главе 2 были разработаны графовые методы математического моделирования несовместных систем и получены важные результаты в области исследования графов МСП несовместных систем.

В настоящем разделе на основе вышеупомянутых результатов разрабатываются методы решения задач подсчета и выделения МСП и МНП несовместных систем. Программная реализация этих методов будет положена в основу математического обеспечения вычислительного комплекса.

4.1.1. Граф МСП и комитеты

Пусть L — мультииндекс некоторой совместной подсистемы системы \mathfrak{S} , и $\{J_i: i \in T \subseteq [q]\} \subseteq \mathbf{J}$ — семейство некоторых (не обязательно всех) мультииндексов МСП, содержащих в качестве подмножества мультииндекс L ; иначе говоря, $\{J_i: i \in T\} \subseteq \{J \in \mathbf{J}: J \supseteq L\}$. Алгоритмическую задачу выделения всех мультииндексов МСП системы \mathfrak{S} , содержащих мультииндекс

L , при известном их подсемействе $\{J_i: i \in T\}$, будем называть $(L, \{J_i: i \in T\})$ -задачей для системы \mathfrak{S} или, коротко, $(L, \{J_i: i \in T\})$ -задачей, если ясно, о какой системе неравенств идет речь. Важным частным случаем указанной задачи является (\emptyset, \emptyset) -задача выделения мультииндексов всех МСП системы \mathfrak{S} .

Рассмотрим вначале комбинаторный алгоритм решения задачи, который послужит в дальнейшем базовым механизмом для графо-комбинаторного алгоритма.

Алгоритм КОМБ выделения МСП. Описываемый здесь алгоритм обозначим через $\text{КОМБ}(L, \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T\})$. Условимся обозначать через $\{J_i: i \in T_{\text{pr}}\}$ семейство мультииндексов МСП системы \mathfrak{S} , содержащее подсемейство $\{J_i: i \in T\}$, а также мультииндексы всех МСП, найденных алгоритмом $\text{КОМБ}(L, \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T\})$ к текущему моменту. К началу работы алгоритма мы имеем $\{J_i \in \mathbf{J}: i \in T_{\text{pr}}\} = \{J_i: i \in T\}$.

Мы будем пользоваться следующим утверждением.

Утверждение 4.1. *Для подсемейства $\{J_i: i \in T\} \subseteq \mathbf{J}$ и мультииндекса L совместной подсистемы системы \mathfrak{S} найдется ее максимальная совместная подсистема с мультииндексом $J_s \supseteq L, \mathbf{J} \ni J_s \notin \{J_i: i \in T\}$, тогда и только тогда, когда в блокаторе $\mathfrak{B}(\{[m] - J_i: i \in T\})$ найдется такая минимальная система представителей M для семейства $\{[m] - J_i: i \in T\}$, что подсистема системы \mathfrak{S} с мультииндексом $M \cup L$ совместна.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем его необходимость. Поскольку $J_s \notin \{J_i: i \in T\}$, мы имеем $J_s \cap ([m] - J_i) \neq \emptyset$ для всех индексов $i \in T$; следовательно, найдется минимальная система представителей $M \subseteq J_s$ семейства $\{[m] - J_i: i \in T\}$, — при этом подсистема с мультииндексом $M \cup L$ совместна. \square

Алгоритм КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T\}$)

1. Найти все минимальные системы представителей для семейства $\{[m] - J_i: i \in T_{\text{pr}}\}$, то есть сформировать блокатор $\mathfrak{B}(\{[m] - J_i: i \in T_{\text{pr}}\})$.
2. Проверить совместность подсистем системы \mathfrak{S} с мультииндексами $M \cup L$ для всякого мультииндекса $M \in \mathfrak{B}(\{[m] - J_i: i \in T_{\text{pr}}\})$.

3. Если все такие системы несовместны, то алгоритм заканчивает свою работу, поскольку, согласно Утверждению 4.1, семейство $\{J_i: i \in T_{\text{pr}}\}$ совпадает с \mathbf{J} .
4. Если найдется мультииндекс $M \in \mathfrak{B}(\{[m] - J_i: i \in T_{\text{pr}}\})$ такой, что подсистема с мультииндексом $M \cup L$ совместна, то дополнить эту подсистему до МСП. Мультииндекс полученной МСП добавить в текущее семейство $\{J_i: i \in T_{\text{pr}}\}$ мультииндексов МСП и вернуться к шагу 1.

В Алгоритме КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T\}$) требуется неоднократно решать задачу формирования блокатора некоторого семейства $\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$ подмножеств множества $[m]$, то есть выделения всех минимальных систем представителей для семейства \mathcal{A} . Это — хорошо известная комбинаторная задача, для решения которой предложен целый ряд алгоритмов. Мы приводим здесь еще один алгоритм решения этой задачи, который учитывает специфику его использования в Алгоритме КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T\}$).

Алгоритм формирования блокатора. Пусть задано семейство $\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$ подмножеств множества $[m]$. Блокатор $\mathfrak{B}(\{A_1, A_2, \dots, A_k\})$ подсемейства $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subseteq \mathcal{A}$, $k \in [\alpha]$, будем обозначать через $\{M_j^{(k)}: j \in [\beta_k]\}$. Будем полагать, по определению, что единственной минимальной системой представителей для пустого семейства множеств является пустое множество: $\mathfrak{B}(\emptyset) := \{M_1^{(0)}\} := \{\emptyset\}$. Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 4.2. Пусть $k \in [\alpha]$. Для любого индекса $s \in [\beta_k]$ существует один и только один индекс $i_s \in [\beta_{k-1}]$ такой, что $M_{i_s}^{(k-1)} \subseteq M_s^{(k)}$.

Доказательство. Существование хотя бы одного индекса $i_s \in [\beta_{k-1}]$ такого, что $M_{i_s}^{(k-1)} \subseteq M_s^{(k)}$, очевидно. Его единственность докажем от противного. Пусть существуют два разных индекса $i_1, i_2 \in [\beta_{k-1}]$ такие, что $M_{i_1}^{(k-1)} \subseteq M_s^{(k)}$ и $M_{i_2}^{(k-1)} \subseteq M_s^{(k)}$. Вначале покажем, что

$$(M_{i_1}^{(k-1)} \cup M_{i_2}^{(k-1)}) \cap A_k = \emptyset. \quad (4.1)$$

Предположим обратное: пусть, например, $a \in M_{i_1}^{(k-1)} \cap A_k \neq \emptyset$. Тогда, в силу минимальности $M_s^{(k)}$, мы имеем $M_{i_1}^{(k-1)} = M_s^{(k)}$ и, в силу включения $M_{i_2}^{(k-1)} \subseteq M_s^{(k)} = M_{i_1}^{(k-1)}$ и минимальности $M_{i_1}^{(k-1)}$, получаем $M_{i_1}^{(k-1)} = M_{i_2}^{(k-1)}$.

По определению $M_s^{(k)}$, найдется $c \in M_s^{(k)} \cap A_k$, причем $c \in M_s^{(k)} - M_{i_1}^{(k-1)}$, в силу (4.1). Из несравнимости множеств $M_{i_1}^{(k-1)}$ и $M_{i_2}^{(k-1)}$ по включению следует, что найдется элемент $b \in M_{i_2}^{(k-1)} - M_{i_1}^{(k-1)} \subset M_s^{(k)} - M_{i_1}^{(k-1)}$. Поскольку $c \in A_k$ и $b \in M_{i_2}^{(k-1)}$, ввиду (4.1), $c \neq b$. Но тогда $M_s^{(k)} - \{b\} \supseteq M_{i_1}^{(k-1)} - \{c\}$, где $(M_{i_1}^{(k-1)} \cup \{c\}) \cap A_i \neq \emptyset$ для всех $i \in [k]$, что противоречит минимальности $M_s^{(k)}$. Полученное противоречие и доказывает утверждение. \square

Семейству \mathcal{A} поставим в соответствие ориентированный граф $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ с множеством вершин $\{M_i^{(k)} : i \in [\beta_k], k \in \{0\} \dot{\cup} [\alpha]\}$, в котором из вершины $M_{i_1}^{k_1}$ в вершину $M_{i_2}^{k_2}$ заходит дуга тогда и только тогда, когда $k_2 = k_1 + 1$ и $M_{i_1}^{k_1} \subseteq M_{i_2}^{k_2}$. Обозначим через $\Gamma(M_i^{(k)})$ множество преемников вершины $M_i^{(k)}$, то есть тех вершин, в которые заходят дуги из $M_i^{(k)}$; через $\Gamma^{-1}(M_i^{(k)})$ будем обозначать множество предшественников вершины $M_i^{(k)}$, то есть, тех вершин, из которых исходят дуги, заходящие в $M_i^{(k)}$.

Некоторый граф называют прадеревом с корнем y_0 , если:

- в любую вершину, кроме y_0 , заходит одна и только одна дуга;
- в вершину y_0 не заходит ни одна дуга;
- из вершины y_0 исходит хотя бы одна дуга.

Из Утверждения 4.2 и определения графа $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ непосредственно следует, что он является прадеревом с корнем $M_1^{(0)} = \emptyset$.

Согласно Утверждению 4.2, для каждой вершины $M_i^{(k)}$, отличной от корня, $\Gamma^{-1}(M_i^{(k)}) = 1$. В силу минимальности $M_i^{(k)}$, имеем $|M_i^{(k)} - \Gamma^{-1}(M_i^{(k)})| \leq 1$. Число

$$v(M_i^{(k)}) := \begin{cases} 0, & \text{если } M_i^{(k)} - \Gamma^{-1}(M_i^{(k)}) = \emptyset, \\ a \in M_i^{(k)} - \Gamma^{-1}(M_i^{(k)}), & \text{если } M_i^{(k)} - \Gamma^{-1}(M_i^{(k)}) \neq \emptyset, \end{cases}$$

будем называть внутренним номером вершины $M_i^{(k)}$ прадрева $\mathbf{G}(\mathcal{A})$. Прадерево $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ однозначно определено, если каждая его вершина помечена своим внутренним номером, поскольку для каждой вершины $M_i^{(k)}$ в этом прадереве существует единственная цепь $(M_1^{(0)}, M_{i_1}^{(1)}, \dots, M_{i_{k-1}}^{(k-1)}, M_i^{(k)})$, связывающая $M_i^{(k)}$ с корнем $M_1^{(0)}$, и при этом

$$M_i^{(k)} = \{v(M_{i_1}^{(1)}) \cup \dots \cup v(M_{i_k}^{(k)})\} - \{0\}. \quad (4.2)$$

Идея алгоритма ПРАДЕРЕВО выделения всех минимальных систем представителей семейства \mathcal{A} , использующая праdereво $\mathbf{G}(\mathcal{A})$, состоит в построении праdereва путем последовательного обхода его вершин. Мы совершаем обход, каждый раз двигаясь по дугам праdereва $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ так далеко, как это возможно, и возвращаясь на один шаг назад против дуги праdereва, если дальнейшее продвижение вперед не приводит к еще не пройденной вершине праdereва $\mathbf{G}(\mathcal{A})$. При этом шаг по дуге праdereва будем называть прямым, против — обратным. Обход можно упорядочить так, что в каждый текущий момент нужно хранить сравнительно мало информации.

Пусть мы находимся в текущей вершине $M_i^{(k)}$. Нам потребуются такие данные:

- ДЛИНА — равна k для текущей вершины $M_i^{(k)}$;
- НОМЕРА(i) — одномерный массив внутренних номеров вершин, составляющих цепь, связывающую текущую вершину с корнем праdereва, упорядоченных в соответствии с этой цепью; однозначно определяет текущую вершину;
- ПРЕДШАГ — переменная, принимающая значения ОБРАТНЫЙ, если в текущую вершину мы пришли против дуги праdereва, и ПРЯМОЙ — по дуге праdereва;
- ПРЕДНОМ — переменная, равная внутреннему номеру вершины, из которой мы пришли в текущую вершину при обратном шаге;
- ОБХОД — переменная, принимающая значение ЗАВЕРШЕН, если обход праdereва $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ завершен, и НЕ ЗАВЕРШЕН — в противном случае;
- t, α, \mathcal{A} — определены выше;
- M_{pr} — текущая вершина, то есть, множество, состоящее из ненулевых элементов массива НОМЕРА и его первых ДЛИНА ячеек.

В массиве НОМЕРА организуется стек; переменная ДЛИНА определяет длину этого стека. Прямой шаг соответствует добавлению в стек НОМЕРА внутреннего номера следующей вершины, обратный шаг — удалению последнего элемента из стека.

Указанная выше информация полностью определяет состояние алгоритма. Для задания алгоритма ПРАДЕРЕВО достаточно описать процесс перехода из текущей вершины в следующую при обходе праdereва $\mathbf{G}(\mathcal{A})$:

Алгоритм ПРАДЕРЕВО(\mathcal{A}) — переход из текущей вершины прадерева $\mathbf{G}(\mathcal{A})$

0. Начало элементарного перехода по прадереву $\mathbf{G}(\mathcal{A})$.
1. Если ДЛИНА = α , то выдать $M_{\text{рг}}$ как очередную минимальную систему представителей для семейства \mathcal{A} .
2. Если ДЛИНА $\neq \alpha$ или (ПРЕДШАГ = ОБРАТНЫЙ и ПРЕДНОМ $\in \{0, m\}$), перейти к шагу 6, — обратный переход по прадереву $\mathbf{G}(\mathcal{A})$.
3. Если ПРЕДШАГ = и $M_{\text{рг}} \cap A_{\text{длина}+1} \neq \emptyset$, то $i_0 = 0$; перейти к шагу 7, — прямой переход по прадереву $\mathbf{G}(\{A_1, A_2, \dots, A_{\text{длина}}\})$.
4. Если ПРЕДШАГ = ОБРАТНЫЙ, то $i := \text{ПРЕДНОМ}$; иначе $i := 0$.
5. Перебирать целые числа, начиная с $i + 1$, до m , в порядке их возрастания, до первого числа i_0 такого, что $M_{\text{рг}} \cup \{i_0\}$ есть минимальная система представителей для семейства $\{A_1, A_2, \dots, A_{\text{длина}+1}\}$. Если такого числа не существует, то перейти к шагу 6, — обратный переход по прадереву $\mathbf{G}(\mathcal{A})$; в противном случае, перейти к шагу 7, — прямой переход по прадереву $\mathbf{G}(\mathcal{A})$.
6. Обратный переход по прадереву $\mathbf{G}(\mathcal{A})$. Если ДЛИНА = 0, то ОБХОД = ЗАВЕРШЕН; перейти к шагу 7. Иначе:
 ПРЕДШАГ := ОБРАТНЫЙ,
 ПРЕДНОМ := НОМЕРА(ДЛИНА),
 ДЛИНА := ДЛИНА – 1; перейти к шагу 8.
7. Прямой переход по прадереву $\mathbf{G}(\mathcal{A})$.
 ПРЕДШАГ := ПРЯМОЙ,
 ДЛИНА := ДЛИНА + 1,
 НОМЕРА(ДЛИНА) = i_0 ; перейти к шагу 8.
8. Конец элементарного перехода по прадереву $\mathbf{G}(\mathcal{A})$.

Повторяя описанные действия до тех пор, пока переменная ОБХОД не примет значение ЗАВЕРШЕН, мы обойдем все вершины прадерева $\mathbf{G}(\mathcal{A})$ и найдем все минимальные системы представителей для семейства \mathcal{A} , что гарантируется Утверждением 4.2 и организацией процедуры перехода.

Теперь мы покажем применение изложенного алгоритма в алгоритме КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\}$), существенно использующее структуру прадерева минимальных систем представителей для семейства $\{[m] - J_i : i \in T\}$. Мы

дадим на его основе реализацию алгоритма КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\}$) более экономную, чем его общая схема.

Экономная реализация алгоритма КОМБ. Обозначим через $\{J_i : i \in T_{\text{pr}}\}$ семейство мультииндексов МСП, уже известных на текущий момент. Основной акцент заключается в следующем: в общей схеме алгоритма КОМБ, после того как найден мультииндекс новой МСП, этот мультииндекс добавляется в семейство известных, и процесс повторяется с самого начала. На самом деле, можно организовать алгоритм КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\}$) так, что мы найдем все мультииндексы из семейства $\{[m] - J_i : J_i \in \mathbf{J}, J_i \supseteq L\}$ за один обход прадерава его минимальных систем представителей. Для простоты предположим, что $\{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\} = \{J_1, J_2, \dots, J_t\}$. Множество T может быть и пустым. Пусть мультииндексы новых МСП получают номера, начиная с $t + 1$, в порядке их нахождения алгоритмом. Пусть информация о семействе $\{[m] - J_i : i \in T\}$ задается бинарным массивом $(a_{ij})_{m \times |T|}$; при этом для каждой вновь найденной МСП с мультииндексом J_j автоматически заполняется очередной j -ый столбец матрицы (a_{ij}) ; пусть l — текущее количество столбцов матрицы a_{ij} , то есть количество уже известных МСП. Будем пользоваться алгоритмом элементарного перехода по прадереву $\mathbf{G}(\{[m] - J_i : i \in [l]\})$.

Покажем, что по окончании работы изображенного ниже алгоритма КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\}$) найдены мультииндексы всех МСП, содержащие мультииндекс L , то есть $\{J_1, J_2, \dots, J_{l^*}\} = \{J_i \in \mathbf{J} : J_i \supseteq L\}$. Для этого достаточно, согласно Утверждению 4.1, показать, что $\mathbf{C}_{>}(M \cup L) = \emptyset$ для всякой минимальной системы представителей $M \in \mathfrak{B}(\{[m] - J_1, [m] - J_2, \dots, [m] - J_{l^*}\})$. Пусть, напротив, найдется $M_i^{(l^*)} \in \mathfrak{B}(\{[m] - J_1, [m] - J_2, \dots, [m] - J_{l^*}\})$ такая, что подсистема с мультииндексом $M_i^{l^*} \cup L$ совместна. Рассмотрим цепь, связывающую вершину $M_i^{(l^*)}$ с корнем $M_1^{(0)}$ прадерава $\mathbf{G}(\{[m] - J_i : i \in [l]\})$, то есть цепь $(M_1^{(0)}, M_{i_1}^{(0)}, \dots, M_{i_{l^*-1}}^{(l^*-1)}, M_{i_{l^*}}^{(l^*)})$. Пусть $k \in [l^*]$ — максимальное целое такое, что мы попадали в вершину $M_{i_k}^{(k)}$ алгоритмом ПРАДЕРЕВО($\{[m] - J_i : i \in [l]\})$.

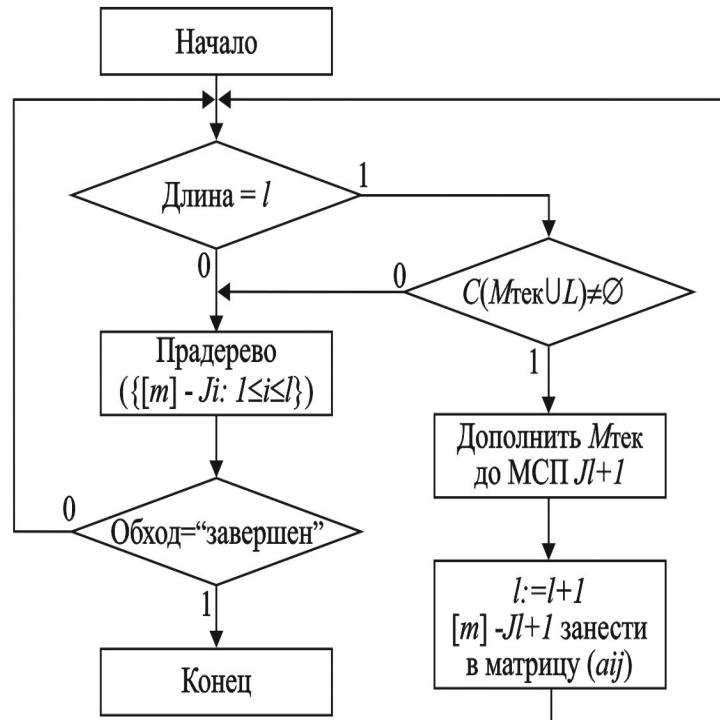


Рис. 2 Алгоритм КОМБ

Рассмотрим тот момент работы алгоритма ПРАДЕРЕВО $(\{[m] - J_i : i \in [l]\})$, когда мы переходим из вершины $M_i^{(k)}$ в последний раз. Ясно, что при этом переход был обратным, то есть мы перешли в вершину $\Gamma^{-1}(M_{i_k}^{(k)}) = M_{i_{k-1}}^{(k-1)}$. Последнее возможно лишь в двух случаях:

1. $k < l \leq l^*$, — мы уже попадали алгоритмом ПРАДЕРЕВО $(\{[m] - J_i : i \in [l]\})$ во все вершины из $\Gamma(M_{i_k}^{(k)})$, что противоречит выбору k ;
2. $k = l \leq l^*$ и $\mathbf{C}_>(M^{(k)} \cup L) = \emptyset$, что противоречит предположению $\emptyset \neq \mathbf{C}_>(M_i^{(l)} \cup L) \supseteq \mathbf{C}_>(M_i^{(k)} \cup L)$.

Полученные противоречия доказывают, что к концу работы алгоритма КОМБ $(L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\})$ будут найдены мультииндексы всех нужных МСП, то есть $\{J_1, J_2, \dots, J_{l^*}\} = \{J_i \in \mathbf{J} : J_i \supseteq L\}$.

Практическое использование комбинаторного алгоритма решения $(L, \{J_i \in \mathbf{J} : J_i \supseteq L\})$ -задачи затрудняется тем, что здесь затраты на выделение очередной МСП быстро растут по мере увеличения числа найденных МСП. Ниже условимся под комбинаторной размерностью $(L, \{J_i \in \mathbf{J} : J_i \supseteq L\})$ -задачи, а также алгоритма КОМБ $(L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\})$ понимать пару $(m, \#\{J_i \in \mathbf{J} : J_i \supseteq L\})$. Это понятие, хотя и достаточно грубое, все же отражает некоторые свойства $(L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\})$ -задачи, которые влияют на

быстрый рост вычислительных затрат с увеличением количества найденных МСП.

Алгоритмы ГРАФ КОМБ выделения МСП. Основная цель этого раздела — сведение (L, \emptyset) -задачи к последовательности $(L_i, \{J_s s \in T_i\})$ -задач меньшей комбинаторной размерности. С этой целью мы построим также приближенный алгоритм решения (L, \emptyset) -задачи, в котором затраты на нахождение очередной МСП растут значительно медленнее, чем в алгоритме КОМБ(L, \emptyset).

Сначала рассмотрим (\emptyset, \emptyset) -задачу, то есть, задачу выделения всех МСП системы \mathfrak{S} .

Опишем алгоритм ГРАФ-КОМБ решения (\emptyset, \emptyset) -задачи, основанный на связности графа МСП системы \mathfrak{S} , и использующий описанный выше комбинаторный алгоритм КОМБ.

Алгоритм ГРАФ-КОМБ

1. Находим мультииндекс J_1 первой МСП, дополняя до МСП совместную подсистему с мультииндексом $\{1\}$, то есть, подсистему, состоящую из первого неравенства. Мультииндексу J_1 присваиваем метку 0.
2. Среди найденных мультииндексов МСП произвольным образом выбираем мультииндекс с меткой 0 и переходим к шагу 3. Если таких мультииндексов нет, переходим к шагу 4.
3. Для выбранного мультииндекса J_s среди найденных мультииндексов отбираем семейство $\{J_i: i \in T\}$ тех из них, которые смежны с J_s в графе МСП системы \mathfrak{S} . Решаем $([m] - J_s, \{J_i: i \in T\})$ -задачу алгоритмом КОМБ($[m] - J_s, \{J_i: i \in T\}$), то есть находим все мультииндексы МСП, смежные с J_s в графе МСП; все вновь найденные мультииндексы МСП получают метку 0; мультииндекс J_s получает метку 1. Переходим к шагу 2.
4. Конец алгоритма.

Поскольку по окончании работы алгоритма все мультииндексы МСП имеют метку 1, то есть для каждого найденного мультииндекса МСП получены также мультииндексы всех МСП, смежных с ним в графе МСП, то, в силу связности графа МСП (Теорема 2.1) системы \mathfrak{S} , алгоритм ГРАФ-КОМБ находит мультииндексы всех МСП.

Алгоритм ГРАФ-КОМБ можно организовать так, что будет использоваться свойство, указанное в Утверждении 2.12(iii): диаметр графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ МСП системы \mathfrak{S} не превосходит половины количества неравенств в этой системе. Если при выполнении шага 3 алгоритма ГРАФ-КОМБ расстояние между вершинами J_1 и J_s в графе $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$ равно $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, то можно не решать $([m] - J_s, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\})$ -задачу, а сразу присвоить вершине J_s метку 1 и перейти к шагу 2. В силу упомянутого Утверждения 2.12(iii), измененный указанным образом алгоритм ГРАФ-КОМБ по-прежнему находит мультииндексы всех МСП системы \mathfrak{S} .

Перейдем теперь к построению графо-комбинаторного алгоритма решения (L, \emptyset) -задачи; обозначим его ГРАФ-КОМБ(L). Этот алгоритм основан на свойстве: подграф $\mathbf{MFSG}^2\{\{J \in \mathbf{J} : J \supseteq L\}\}$ связан для всякого мультииндекса L совместной подсистемы системы \mathfrak{S} .

Алгоритм ГРАФ-КОМБ(L)

1. Дополняя подсистему с мультииндексом L до МСП, найдем мультииндекс J_1 этой МСП; мультииндексу J_1 присваиваем метку 0.
2. Из семейства уже найденных мультииндексов МСП выбираем любой мультииндекс с меткой 0, — пусть это будет мультииндекс J_s , — и отбираем все найденные мультииндексы $\{J_i \in \mathbf{J} : i \in T_s\}$ МСП, смежные с J_s в графе МСП. Если мультииндексов МСП с меткой 0 нет, переходим к шагу 3. Если $J_s \supseteq L$, то положим $L' := [m] - J_s$; если $J_s \not\supseteq L$, то положим $L' := ([m] - J_s) \cup L$. Применяя алгоритм КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T_s\}$), найдем все мультииндексы МСП, смежные с J_s в графе МСП и содержащие L . Вновь найденным мультииндексам МСП присваиваем метку 0, а мультииндексу J_s присваиваем метку 1, если $J_s \not\supseteq L$, и метку 2, если $J_s \supseteq L$. Повторяем шаг 2.
3. Конец алгоритма.

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 4.3. *После окончания работы алгоритма ГРАФ-КОМБ(L) найденные мультииндексы МСП, помеченные меткой 2, составляют семейство всех мультииндексов МСП системы \mathfrak{S} , содержащих мультииндекс L .*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда семейство $\{J_i \in \mathbf{J} : J_i \supseteq L\}$ можно разбить на два непересекающихся подсемейства: $\{J_i \in \mathbf{J} : J_i \supseteq$

$L\} = \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T\} \dot{\cup} \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T'\}$, где $\{J_i \in \mathbf{J}: i \in T\}$ — семейство мультииндексов всех МСП, найденных алгоритмом ГРАФ-КОМБ(L) и помеченных меткой 2. Поскольку подграф $\mathbf{MFSG}^2\langle\{J \in \mathbf{J}: J \supseteq L\}\rangle$ связан, найдется ребро $\{J_s, J_t\}$ в квадрате $\mathbf{MFSG}^2(\mathfrak{S})$ графа МСП системы \mathfrak{S} такое, что $J_s \in \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T\}$ и $J_t \in \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T'\}$. Следовательно, возможны только два взаимоисключающих случая: 1) пара $\{J_s, J_t\}$ — ребро графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$, и 2) существует мультииндекс МСП J_r такой, что пары $\{J_s, J_r\}$ и $\{J_r, J_t\}$ — ребра графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$.

Рассмотрим первый случай. Метка 2 присваивается в алгоритме ГРАФ-КОМБ(L) некоторому мультииндексу МСП J_s только в том случае, когда найдены мультииндексы всех МСП, смежных с J_s в графе $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$; следовательно, мультииндекс МСП J_t был найден этим алгоритмом. Это противоречит включению $J_t \in \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T'\}$, поскольку каждый найденный мультииндекс к концу работы алгоритма имеет метку 2, если он содержит мультииндекс L .

Рассмотрим второй случай. Как и выше, мультииндекс J_r был найден алгоритмом ГРАФ-КОМБ(L). Поскольку к концу работы алгоритма метка мультииндекса J_r отлична от 0, а мультииндекс J_t смежен с J_r и содержит L , то мультииндекс J_t был найден алгоритмом ГРАФ-КОМБ($[m] - J_r, \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T_r\}$) и ему была присвоена метка 2 к концу работы алгоритма, что противоречит включению $J_t \in \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T'\}$. Полученные противоречия и доказывают утверждение. \square

Отличие алгоритма ГРАФ-КОМБ(L) от алгоритма ГРАФ-КОМБ состоит в том, что в первом алгоритме для каждого найденного мультииндекса МСП $J_s \not\supseteq L$ решается $(L \cup ([m] - J_s), \{J_i \in \mathbf{J}: i \in T_s\})$ -задача, имеющая, в общем случае, комбинаторную размерность меньшую, чем $(([m] - J_s), \{J_i: i \in T_s\})$ -задача, решаемая во втором алгоритме. Таким образом, в общем случае, алгоритм ГРАФ-КОМБ(L) является более экономным при поиске МСП, содержащих подсистему с мультииндексом L , чем алгоритм ГРАФ-КОМБ.

Приближенные алгоритмы. В практических задачах нередко достаточно знать лишь подсемейство семейства мультииндексов МСП системы \mathfrak{S} . В этой связи естественно говорить о приближенной $(L, \{J_s \in \mathbf{J}: s \in T_i\})$ -задаче.

$(L, \{J_s \in \mathbf{J} : s \in T_i\})^{(k)}$ -задачей для системы \mathfrak{S} будем называть задачу выделения произвольных $\min\{k, \#\{J \in \mathbf{J} : J \supseteq L\}\}$ мультииндексов МСП, содержащих L . Комбинаторный алгоритм КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\})^{(k)}$ решения $(L, \{J_s \in \mathbf{J} : s \in T_i\})^{(k)}$ -задачи получается из алгоритма КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\}$), если потребовать, чтобы последний оканчивал свою работу в том случае, когда уже найдено k мультииндексов МСП. Комбинаторной сложностью $(L, \{J_s \in \mathbf{J} : s \in T_i\})^{(k)}$ -задачи или алгоритма КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\})^{(k)}$ будем называть пару $(m, \min\{k, \#\{J \in \mathbf{J} : J \supseteq L\}\})$. Комбинаторная размерность $(\emptyset, \emptyset)^{(k)}$ -задачи, равная $(m, \min\{k, q\})$, по-прежнему будет высокой; при этом алгоритм КОМБ($\emptyset, \emptyset)^{(k)}$, естественно, наталкивается на те же трудности, что и раньше.

Графо-комбинаторный алгоритм ГРАФ-КОМБ $^{(k)}$ отличается от алгоритма ГРАФ-КОМБ только тем, что в соответствующем месте вместо точного алгоритма КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\}$) применяется приближенный алгоритм КОМБ($L, \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T\})^{(k)}$, то есть для каждого найденного мультииндекса МСП находятся, в общем случае, не обязательно все мультииндексы, смежные с этим мультииндексом в графе $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$, а только часть их. Замечательно то, что алгоритм ГРАФ-КОМБ $^{(k)}$ даже при очень малых k , скажем, близких к n , находит, благодаря связности графа $\mathbf{MFSG}(\mathfrak{S})$, большое количество мультииндексов МСП системы \mathfrak{S} ; при этом затраты на выделение очередной МСП растут тем медленнее, чем меньше k .

В заключение обсуждения алгоритма ГРАФ-КОМБ $^{(k)}$ отметим следующее. Пусть для некоторой системы \mathfrak{S} с помощью алгоритма ГРАФ-КОМБ $^{(k)}$ найдено достаточно большое количество ее МСП. Дальнейший поиск новых МСП системы \mathfrak{S} можно организовать следующим образом: искать мультииндексы МСП, смежные одновременно с двумя (тремя и т.д.) уже найденными мультииндексами МСП, то есть применяя алгоритм ГРАФ-КОМБ($([m] - J_s) \cup ([m] - J_t), \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T_{st}\})^{(k)}$ к таким парам J_s, J_t уже найденных мультииндексов, что $\mathbf{C}_>(([m] - J_s) \cup ([m] - J_t)) \neq \emptyset$; при этом $\{J_i \in \mathbf{J} : i \in T_{st}\}$ — мультииндексы тех уже найденных МСП, которые смежны и с J_s , и с J_t . Поскольку степени вершин в графах МСП довольно велики, для многих еще не найденных мультииндексов МСП найдутся смежные с ними два, три и более мультииндексов МСП из числа уже найденных. При этом комбинаторная сложность $(([m] - J_s) \cup ([m] - J_t), \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T_{st}\})$ -

задачи может оказаться значительно меньше комбинаторной сложности $(([m] - J_s), \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T_s\})$ - и $(([m] - J_t), \{J_i \in \mathbf{J} : i \in T_t\})$ -задач.

Нечетные циклы в графе МСП и комитеты. В основе популярных и эффективных методов построения комитетов системы \mathfrak{S} лежит следующее фундаментальное свойство графа МСП $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$.

Теорема 4.1. Пусть последовательность $(J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_{2k+1}}, J_{i_1})$ составляет цикл нечетной длины в графе $\text{MFSG}(\mathfrak{S})$ МСП системы \mathfrak{S} . Пусть выбраны попарно различные векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{2k+1}$ — решения МСП с мультииндексами $J_1, J_2, \dots, J_{2k+1}$ соответственно. Тогда совокупность векторов $\mathcal{K} := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{2k+1}\}$ является комитетом системы \mathfrak{S} .

Доказательство. Допустим обратное. Поскольку векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{2k+1}$ попарно различны, множество $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{2k+1}\}$ содержит $2k + 1$ элементов. Тогда найдется номер $i_0 \in [m]$ такой, что неравенству с индексом i_0 удовлетворяет не более k векторов из множества $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{2k+1}$. Следовательно, в последовательности $(J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_{2k+1}})$ мультииндексов МСП найдутся $k + 1$ мультииндексов МСП, не содержащих элемент i_0 и поэтому попарно несмежных в графе МСП системы \mathfrak{S} . Это противоречит тому, что последовательность $(J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_{2k+1}}, J_{i_1})$ составляет цикл в графе МСП системы \mathfrak{S} . \square

4.1.2. Альтернативные покрытия

Пусть X — непустое множество произвольной природы, и $\mathcal{M} \subseteq 2^X$ — некоторое семейство подмножеств множества X . Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ — непустые непересекающиеся подмножества множества X : $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Определение 4.1. Упорядоченная пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ семейств $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ подмножеств множества X , выбранных из допустимого семейства \mathcal{M} , называется альтернативным покрытием пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, если $\mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, $\mathcal{B} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ и $A \cap B = \emptyset$ для любых множеств $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$.

Определение 4.2. Альтернативное покрытие называется конечным, если каждое из семейств \mathcal{A} и \mathcal{B} конечно.

Определение 4.3. *Мощностью конечного альтернативного покрытия $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ называется величина $|\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}|$.*

Эта конструкция имеет непосредственную связь с проблематикой распознавания образов. Пусть в пространстве X зафиксированы два непересекающихся множества \mathcal{A} и \mathcal{B} , и предопределено некоторое допустимое семейство \mathcal{M} подмножеств пространства X . Если существует альтернативное покрытие $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, то оно разделяет множества \mathcal{A} и \mathcal{B} в пространстве X . Следовательно, задача эффективного разделения множеств \mathcal{A} и \mathcal{B} пространства X в классе подмножеств из \mathcal{M} может быть поставлена как задача поиска конечного альтернативного покрытия минимальной мощности пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Таким образом, задачу распознавания образов в геометрической постановке мы можем в символической форме записать в следующем виде:

$$R_1(X, (\mathcal{A}, \mathcal{B}), \mathcal{M} \subseteq 2^X) \rightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Поскольку, с содержательной точки зрения, альтернативные покрытия могут различаться, следующее уточнение задачи распознавания состоит в том, что вводится функционал качества альтернативного покрытия $f(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, который следует оптимизировать, скажем, минимизировать:

$$R_2(X, (\mathcal{A}, \mathcal{B}), \mathcal{M} \subseteq 2^X, f: 2^{\mathcal{M}} \times 2^{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}) \xrightarrow{\min f} (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Один из естественных критериев качества альтернативного покрытия — его мощность. Обозначим через f_{card} функцию вида $f: 2^{\mathcal{M}} \times 2^{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{N}$, для которой имеем $f_{\text{card}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$. Мы формулируем задачу:

$$R_3(X, (\mathcal{A}, \mathcal{B}), \mathcal{M} \subseteq 2^X, f_{\text{card}}) \xrightarrow{\min f_{\text{card}}} (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Альтернативные покрытия и комитеты. Пусть в пространстве X заданы конечные непересекающиеся подмножества \mathcal{A} и \mathcal{B} и фиксирован некоторый класс F вещественных функций над X . Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) > 0, & \text{если } \mathbf{x} \in \mathcal{A}, \\ f(\mathbf{x}) < 0, & \text{если } \mathbf{x} \in \mathcal{B}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Напомним, что комитетом системы неравенств (4.3) называют такую конечную совокупность функций $\mathcal{K} := \{f_1, f_2, \dots, f_q\} \subset F$, что каждому неравенству системы (4.3) удовлетворяет более половины функций из \mathcal{K} .

Для некоторого подмножества $F_0 \subseteq F$ вещественных функций множества

$$\mathbf{C}_>(F_0) = \bigcap_{f \in F_0} \{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) > 0\}$$

или

$$\mathbf{C}_<(F_0) = \bigcap_{f \in F_0} \{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) < 0\}$$

будем называть F -полиэдрами пространства X . Обозначим через $\mathcal{M}(F, X)$ класс всех F -полиэдров пространства X . Тогда мы можем рассматривать задачи распознавания образов $R_1 \div R_3$ в том варианте, когда класс \mathcal{M} есть класс $\mathcal{M}(F, X)$, то есть

$$R'_1(X, (\mathcal{A}, \mathcal{B}), \mathcal{M} = \mathcal{M}(F, X)) \rightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),$$

и аналогично для R_2 и R_3 .

Всякому комитету \mathcal{K} системы неравенств (4.3) мы можем поставить в соответствие альтернативное покрытие $(\mathfrak{A}(\mathcal{K}), \mathfrak{B}(\mathcal{K}))$ пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &:= \{\mathbf{C}_>(\mathcal{K}') : |\mathcal{K}'| > \frac{1}{2}|\mathcal{K}|, \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}\}, \\ \mathfrak{B} &:= \{\mathbf{C}_<(\mathcal{K}') : |\mathcal{K}'| > \frac{1}{2}|\mathcal{K}|, \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}\}. \end{aligned}$$

Из определения комитета и семейства $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ следует, что $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ — альтернативное покрытие для пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Очевидно, что $\mathbf{C}_>(\mathcal{K}') \cap \mathbf{C}_<(\mathcal{K}'') = \emptyset$, если $|\mathcal{K}'| > \frac{1}{2}|\mathcal{K}|$ и $|\mathcal{K}''| > \frac{1}{2}|\mathcal{K}|$. Обозначим через $\mathbf{max}_{\subseteq} \mathfrak{A}$ множество максимальных элементов ч.у. множества $(\mathfrak{A}, \subseteq)$. Положим

$$\mathfrak{A} = \mathbf{max}_{\subseteq} \mathcal{A}, \quad \mathfrak{B} = \mathbf{max}_{\subseteq} \mathcal{B}$$

и

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathcal{K}) &:= \{A' \in \mathbf{max}_{\subseteq} \mathfrak{A} \mid A' \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}, \\ \mathfrak{B}(\mathcal{K}) &:= \{B' \in \mathbf{max}_{\subseteq} \mathfrak{B} \mid B' \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $(\mathfrak{A}(\mathcal{K}), \mathfrak{B}(\mathcal{K}))$ — альтернативное покрытие для пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в классе F -полиэдров.

Мы поставили комитету \mathcal{K} системы (4.3) в однозначное соответствие альтернативное покрытие $(\mathfrak{A}(\mathcal{K}), \mathfrak{B}(\mathcal{K}))$. Изобразим в символическом виде схему построения альтернативного покрытия для пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в классе F -полиэдров на основе метода комитетов:

$$R'_{\text{com}}(X, (\mathcal{A}, \mathcal{B}), \mathcal{M} = \mathcal{M}(F, X)) \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow (\mathfrak{A}(\mathcal{K}), \mathfrak{B}(\mathcal{K})) .$$

Существуют системы вида (4.3) такие, что для двух разных равномоощных комитетов \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_1| &= |\mathcal{K}_2| , \\ |\mathfrak{A}(\mathcal{K}_1)| + |\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1)| &\neq |\mathfrak{A}(\mathcal{K}_2)| + |\mathfrak{B}(\mathcal{K}_2)| . \end{aligned}$$

Приведем соответствующий пример: Пусть $X = \mathbb{R}^2$ и F — класс линейных функционалов, и

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{\mathbf{a}_1 = (-1.5, 1.5), \mathbf{a}_2 = (1.5, 1.5), \mathbf{a}_3 = (0, -1)\} , \\ \mathcal{B} &:= \{\mathbf{b}_1 = (-8, 3), \mathbf{a}_2 = (0, -5), \mathbf{a}_3 = (8, -3)\} , \\ \mathcal{K}_1 &:= \{f_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 2, f_2 = -\mathbf{x}_2, f_3 = -\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 2\} , \\ \mathcal{K}_2 &:= \{g_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 4, g_2 = -\mathbf{x}_2 - 2, g_3 = -\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 4\} , \\ \mathfrak{A}(\mathcal{K}_1) &:= \{\mathbf{C}_>(\{f_1, f_2\}), \mathbf{C}_>(\{f_1, f_3\}), \mathbf{C}_>(\{f_2, f_3\})\} , \\ \mathfrak{B}(\mathcal{K}_1) &:= \{\mathbf{C}_<(\{f_1, f_2\}), \mathbf{C}_<(\{f_1, f_3\}), \mathbf{C}_<(\{f_2, f_3\})\} , \\ \mathfrak{A}(\mathcal{K}_2) &:= \{\mathbf{C}_>(\{f_1, f_2, f_3\})\} , \\ \mathfrak{B}(\mathcal{K}_2) &:= \{\mathbf{C}_<(\{f_1, f_2\}), \mathbf{C}_<(\{f_1, f_3\}), \mathbf{C}_<(\{f_2, f_3\})\} . \end{aligned}$$

Комитеты \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 содержат одинаковое и минимально возможное количество членов (три), однако альтернативные покрытия, соответствующие этим комитетам, имеют разную мощность: $|\mathfrak{A}(\mathcal{K}_1)| + |\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1)| = 6$, в то время как $|\mathfrak{A}(\mathcal{K}_2)| + |\mathfrak{B}(\mathcal{K}_2)| = 4$.

Таким образом, мы можем заключить, что комитет системы (4.3) — это компактная форма задания альтернативного покрытия для пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в классе F -полиэдров, но не обязательно минимальной мощности. Этот вывод является

весьма важным для метода комитетов, так как он мотивирует введение в рассмотрение дополнительного существенного и естественного критерия оптимизации решающего правила. Простейшее применение состоит в том, что если найдено несколько комитетов системы (4.3), то следует выбрать комитет, которому соответствует альтернативное покрытие минимальной мощности.

В случае, когда $X := \mathbb{R}^n$ и F — класс линейных функционалов, рассмотрим подсистемы системы (4.3), задаваемые следующим образом. Пусть $\mathcal{L} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Тогда неравенство $f(\mathbf{x}) > 0$ входит в рассматриваемую подсистему, если $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, и неравенство $f(\mathbf{x}) < 0$ входит в эту подсистему, если $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$. Будем обозначать такую подсистему через $S(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$, где $\mathcal{A}' := \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}' := \mathcal{L} \cap \mathcal{B}$. Предположим, что система неравенств (4.3) несовместна и $\mathcal{K} := \{f_1, f_2, \dots, f_q\}$ — ее комитет. Пусть $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ — альтернативное покрытие, соответствующее комитету \mathcal{K} . Пара $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ является альтернативным покрытием пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в классе выпуклых конусов.

Не для всякого альтернативного покрытия существует порождающий его комитет.

Можно поставить следующую алгоритмическую задачу. Для заданной системы неравенств вида (4.3) найти комитет, порождающий альтернативное покрытие минимальной мощности среди всех комитетов системы (4.3).

Пусть $\{\mathbf{J}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i) : i \in [q]\}$ — семейство всех максимальных по включению совместных подсистем системы (4.3). Составим матрицу инциденций $\mathbf{E} = (e_{ij})$ размера $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| \times q$. Первые $|\mathcal{A}|$ строк помечены элементами из \mathcal{A} , последние $|\mathcal{B}|$ строк — элементами из \mathcal{B} , а столбцы помечены максимальными совместными подсистемами системы (4.3).

В терминах матрицы \mathbf{E} задача может быть сформулирована следующим образом.

1. Задача построения комитета с минимальным количеством членов сводится к выделению минимального набора столбцов в матрице \mathbf{E} такого, что каждая подстрока, полученная пересечением каждой строки матрицы с выделенным набором столбцов содержит больше единиц, чем нулей.
2. Задача построения комитета, порождающего альтернативное покрытие минимальной мощности, сводится к выделению набора столбцов в матрице \mathbf{E} такого, что удовлетворяется условие 1 и, кроме того,

общее количество минимальных по включению подстрок верхней полуматрицы и нижней полуматрицы минимально среди всех таких наборов.

Альтернативные покрытия и логические решающие деревья. Пусть в пространстве X заданы конечные непересекающиеся подмножества \mathcal{A} и \mathcal{B} , и фиксирован некоторый класс F вещественных функций над X . Пусть задано двоичное дерево $\mathcal{T} := (V, E)$ с корнем v_0 , с каждой вершиной которого ассоциирована функция из F , то есть, задано отображение $\psi V \rightarrow F$. Пусть v — лист дерева \mathcal{T} и $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v)$ — путь из корня дерева к текущей вершине v . Тогда вершине v соответствует F -полиэдр

$$\mathbf{C}_v := \mathbf{C}_{>} \left(\left\{ (-1)^{\sigma(v_0)} \psi(v_0), (-1)^{\sigma(v_1)} \psi(v_1), \dots, (-1)^{\sigma(v_{k-1})} \psi(v_{k-1}) \right\} \right),$$

$$\text{где } \sigma(v_i) := \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ — левый сын для } v_{i-1}, \\ 0, & \text{если } v_i \text{ — правый сын для } v_{i-1}. \end{cases}$$

Пусть V' — множество листьев для дерева \mathcal{T} . Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{V'}(\mathcal{T}) &:= \{ \mathbf{C}_v v \in V' \} \\ \mathbf{C}_{V'}^{\mathcal{A}}(\mathcal{T}) &:= \{ \mathbf{C}_v v \in \mathbf{C}_{V'}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{A} \}, \\ \mathbf{C}_{V'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) &:= \{ \mathbf{C}_v v \in \mathbf{C}_{V'}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{B} \}. \end{aligned}$$

Если $\mathbf{C}_{V'}^{\mathcal{A}}(\mathcal{T}) \cap \mathbf{C}_{V'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) = \emptyset$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \bigcup_{v \in V'} \mathbf{C}_v$, то $(\mathbf{C}_{V'}^{\mathcal{A}}(\mathcal{T}), \mathbf{C}_{V'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T}))$ является альтернативным покрытием для $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в классе F -полиэдров.

Изобразим в символическом виде схему построения альтернативного покрытия для пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в классе F -полиэдров на основе решающих логических деревьев:

$$\mathbf{R}'_{\text{tree}}(X, (\mathcal{A}, \mathcal{B}), \mathcal{M} = \mathcal{M}(F, X)) \rightarrow (\mathcal{T} := (V, E)) \rightarrow (\mathbf{C}_{V'}^{\mathcal{A}}(\mathcal{T}), \mathbf{C}_{V'}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T})).$$

Построение альтернативного покрытия пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ по схеме $\mathbf{R}'_{\text{tree}}$ обладает, по сравнению со схемой \mathbf{R}'_{com} , следующими достоинствами.

- 1) Пусть для пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ заданы два дерева $\mathcal{T}_1 := (V_1, E_1)$ и $\mathcal{T}_2 := (V_2, E_2)$ такие, что $(\mathbf{C}_{V'_1}^{\mathcal{A}}(\mathcal{T}_1), \mathbf{C}_{V'_1}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T}_1))$ и $(\mathbf{C}_{V'_2}^{\mathcal{A}}(\mathcal{T}_2), \mathbf{C}_{V'_2}^{\mathcal{B}}(\mathcal{T}_2))$ являются альтернативными покрытиями пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и минимальны по

включению относительно этого свойства. Тогда, если $|V_1| = |V_2|$, то соответствующие альтернативные покрытия также имеют одинаковую мощность.

- 2) Представляется естественной и эффективной организация построения альтернативного покрытия для пары $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ по схеме R'_{tree} в интерактивном режиме.
- 3) При построении альтернативного покрытия по схеме R'_{tree} достаточно просто и естественно решается проблема пропусков исходной информации, которая является трудной для схемы R'_{com} .

4.1.3. Оптимальное разбиение множества классов

Решающая функция для узла. Пусть задано множество n -мерных векторов

$$\mathbb{A} = \{ (\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}) : i \in [1, N] \},$$

и его разбиение на m классов

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \dot{\cup} \mathbb{A}_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathbb{A}_m.$$

Необходимо построить решающее правило для отнесения вектора \mathbf{a}_i к одному из классов.

Решение может быть найдено в классе логических решающих деревьев, задаваемых ориентированным двоичным деревом $G = (V, E)$ с корневой вершиной $v_0 \in V$.

Двоичное дерево $G = (V, E)$ задаёт процесс последовательного разбиения выборки \mathbb{A} на две подвыборки в вершинах степени 2 так, что каждой терминальной вершине v_i соответствует некоторая подвыборка $\mathbb{A}_{v_i} \subseteq \mathbb{A}$, которая может быть отнесена к одному из классов $\text{class}_{v_i} \in [1, m]$. В рассматриваемом случае будут использованы линейные функции для разделения подвыборки в каждой вершине решающего дерева.

Если v — вершина в графе G степени 2, то для неё заданы вектор n_v и скалярная величина ε_v такие, что подвыборка \mathbb{A}_v разбивается на две

подвыборки \mathbb{A}'_v и \mathbb{A}''_v по следующему правилу:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}'_v &= \{ \mathbf{a}_i \in \mathbb{A}_v : \langle n_v, \mathbf{a}_i \rangle \leq \varepsilon_v \}, \\ \mathbb{A}''_v &= \{ \mathbf{a}_i \in \mathbb{A}_v : \langle n_v, \mathbf{a}_i \rangle > \varepsilon_v \},\end{aligned}$$

и для корневой вершины v_0 имеем:

$$\mathbb{A}_{v_0} = \mathbb{A}.$$

Требуется построить решающее дерево $G = (V, E)$ с минимальным числом вершин, при этом в каждой терминальной вершине $v \in V$ имеем:

$$p(v) = \frac{|\{ \mathbf{a}_i \in \mathbb{A}_v : \mathbf{a}_i \in \text{class}_v \}|}{|\mathbb{A}_v|} \geq p_{\min}, \quad (4.4)$$

то есть доля векторов, принадлежащих некоторому классу class_v не менее заданной величины p_{\min} . Если $p_{\min} = 1$, то каждой терминальной вершине соответствуют векторы одного определённого класса.

Правило (4.4) действует, если $|\mathbb{A}_v| \geq K_{\min}$. Если же $|\mathbb{A}_v| < K_{\min}$, то процесс дальнейшего разбиения выборки \mathbb{A}_v не производится и вершина v объявляется терминальной, при этом правило (4.4) может не выполняться. Другими словами, при $|\mathbb{A}_v| < K_{\min}$ выборка \mathbb{A}_v не достаточно представительна для построения дальнейшего правила деления и доля $p(v)$ векторов из этой выборки, принадлежащих классу class_v может быть меньше p_{\min} .

Пусть задана вершина $v \in V$ вместе с соответствующей выборкой \mathbb{A}_v . Пусть также задано разбиение

$$\mathbb{A}_v = (\mathbb{A}_v \cap \mathbb{A}_1) \dot{\cup} \dots \dots \dot{\cup} (\mathbb{A}_v \cap \mathbb{A}_m), \quad (4.5)$$

в котором m' непустых множеств.

Если $m' = 1$, то вершина v является терминальной и $p(v) = 1$, если $2 \leq m' \leq m$, то необходимо последовательно вычислить величины:

$$p_i(v) = \frac{|\{ \mathbf{a}_i \in \mathbb{A}_v \cap \mathbb{A}_i \}|}{|\mathbb{A}_v|}, \quad i \in [1, m].$$

Если существует $i_0 \in [1, m]$ такое, что $p_{i_0}(v) \geq p_{\min}$, то вершина v является терминальной и класс $\text{class}_v = i_0$, если при этом $|A_v| < K_{\min}$, то вершина v является терминальной и

$$\text{class}_v = \arg \max_i \left\{ p_i(v) : i \in [1, m'] \right\}.$$

Рассмотрим случай

$$\begin{cases} 2 \leq m' \leq m, \\ |A_v| \geq K_{\min}, \\ p_i(v) < p_{\min} \text{ для всех } i \in [1, m'], \end{cases}$$

и обозначим

$$I = \{i : A_v \cap A_i \neq \emptyset, i \in [1, m]\}.$$

Пусть заданы некоторый вектор n_v и число \mathcal{E}_v . Тогда вершине v поставим в соответствие две вершины v_1 и v_2 являющиеся потомками вершины v в строящемся решающем дереве таким образом, что

$$\begin{aligned} A_{v_1} &= \{a_j \in A_v : \langle n_v, a_j \rangle \leq \mathcal{E}_v\}, \\ A_{v_2} &= \{a_j \in A_v : \langle n_v, a_j \rangle > \mathcal{E}_v\}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} p(A_{v_1}) &= \left(\frac{|A_{v_1} \cap A_1|}{|A_{v_1}|}, \dots, \frac{|A_{v_1} \cap A_n|}{|A_{v_1}|} \right), \\ p(A_{v_2}) &= \left(\frac{|A_{v_2} \cap A_1|}{|A_{v_2}|}, \dots, \frac{|A_{v_2} \cap A_n|}{|A_{v_2}|} \right). \end{aligned}$$

При этом к векторам n_v и \mathcal{E}_v предъявляются требования, чтобы множества A_{v_1} и A_{v_2} были не пустыми.

Рассмотрим следующую величину

$$\text{discrim}(A_v, n_v, \mathcal{E}_v) = \sum_{i \in I} \left| \frac{|A_{v_1} \cap A_i|}{|A_{v_1}|} - \frac{|A_{v_2} \cap A_i|}{|A_{v_2}|} \right|.$$

Определение 4.4. Величина $\text{discrim}(A_v, n_v, \mathcal{E}_v)$ называется разделяющей силой функции

$$f(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot n_v - \mathcal{E}_v$$

относительно подвыборки A_v .

Содержательный смысл этого понятия состоит в том, что чем сильнее «растаскиваются» векторы из классов A_i обучающей выборки по полупространству, полученному путём разделения пространства гиперплоскостью

$$f(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot n_v - \mathcal{E}_v = 0,$$

тем сильнее разделяет функция $f(\mathbf{a})$ векторы обучающей выборки по классам. Таким образом, естественной выглядит постановка, где для выборки (4.5) требуется найти $n_v \in \mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathcal{E}_v \in \mathbb{R}$ такие, что величина $\text{discrim}(A_v, n_v, \mathcal{E}_v)$ принимает максимальное значение. Естественность такой постановки подтверждается также тем, что для $m = 2$ наилучшее решение достигается при $\text{discrim}(A_v, n_v, \mathcal{E}_v) = 2$, что соответствует линейному разделению классов $A_v \cap A_1$ и $A_v \cap A_2$ гиперплоскостью $f(\mathbf{a}) = n_v \cdot \mathbf{a} - \mathcal{E} = 0$. Задача в такой постановке всегда имеет решение, поскольку в силу того, что A_{v_1} и A_{v_2} не пусты для каждой вершины v , то её потомкам соответствуют подвыборки меньшей мощности и при достижении условий (4.4) или условия $|A_v| < K_{\min}$ вершина v становится терминальной.

Для произвольного подмножества $A' \subseteq A$ введем обозначение для центра подвыборки

$$C(A') = \frac{1}{|A'|} \sum \{\mathbf{a}_i : \mathbf{a}_i \in A'\},$$

и

$$A(I) = \{\mathbf{a}_i : \mathbf{a}_i \in A, i \in I\}.$$

Пусть задано разбиение $I = I_1 \dot{\cup} I_2$, где $I_1 \neq \emptyset, I_2 \neq \emptyset$. Рассмотрим отрезок $[C(I_1), C(I_2)] \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть $n(I_1, I_2)$ — нормированный вектор

$$\frac{C(I_2) - C(I_1)}{\|C(I_2) - C(I_1)\|},$$

тогда разделим отрезок $[C(I_1), C(I_2)]$ на M частей, где длина каждой части равна

$$\frac{\|C(I_2) - C(I_1)\|}{M} .$$

Рассмотрим $(M - 1)$ разделяющих плоскостей $f_j(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_v - \mathcal{E}_j$, проходящих последовательно через все $(M - 1)$ точек деления отрезка $[C(I_1), C(I_2)]$ на M частей. Найдём наилучший вариант среди этих функций по разделяющей силе:

$$j_0 = \arg \max \{ \text{discrim}(A_v, \mathbf{n}_v, \mathcal{E}_j) : j \in [1, M - 1] \} .$$

Легко видеть, что для j_0 имеем $A_{v_1} \neq \emptyset, A_{v_2} \neq \emptyset$.

Для удобства переобозначим

$$\text{discrim}(I_1, I_2) = \text{discrim}(A_v, \mathbf{n}_v, \mathcal{E}_{j_0}) .$$

В случае $C(A(I_1)) = C(A(I_2))$ вместо этих точек выбираются любые две максимально удаленные точки из выборки A_v и к отрезку, связывающему эти точки, применяется та же процедура построения $(M - 1)$ разделяющих плоскостей и выбора наилучшего из них. В общем случае предполагается, что осуществляется перебор всех разбиений вида $I = I_1 \dot{\cup} I_2$ и выбирается такое разбиение, при котором $\text{discrim}(I_1, I_2)$ достигает максимального значения.

Пусть I — множество непустых классов в A_v и $I = I_1 \dot{\cup} I_2$. Определим

$$p(A_v, I_1) = \frac{|\{a_j \in A_v \cap A_i, i \in I_1\}|}{|A_v|} ,$$

и аналогично

$$\begin{aligned} & p(A_v, I_2) , \\ & p(A_{v_1}, I_1) , p(A_{v_1}, I_2) , \\ & p(A_{v_2}, I_1) , p(A_{v_2}, I_2) . \end{aligned}$$

Задача состоит в том, чтобы найти разбиение $I = I_1 \cup I_2$, вектор n и скаляр \mathcal{E} такие, чтобы для v_1 выполнялись условия

$$\begin{cases} p(A_{v_1}, I_1) > p(A_v, I_1) \ \& \ p(A_{v_1}, I_2) < p(A_v, I_2) \ , \\ p(A_{v_2}, I_1) > p(A_v, I_1) \ \& \ p(A_{v_2}, I_2) < p(A_v, I_2) \ , \end{cases}$$

то есть такие, чтобы в сравнении с A_v выборка A_{v_1} содержала больше векторов из I_1 и выборка A_{v_2} — больше векторов из I_2 . Степень дискриминации можно оценить величиной:

$$\begin{aligned} \text{discrim}(A_v, n_v, \mathcal{E}_v) &= |p(A_{v_1}, I_1) - p(A_v, I_1)| + |p(A_{v_1}, I_2) - p(A_v, I_2)| + \\ &+ |p(A_{v_2}, I_1) - p(A_v, I_1)| + |p(A_{v_2}, I_2) - p(A_v, I_2)| \ . \end{aligned}$$

Таким образом, нужно выбрать разбиение $I = I_1 \cup I_2$ и n_v, \mathcal{E}_v такие, что $\text{discrim}(A_v, n_v, \mathcal{E}_v)$ — максимально. Для этого делаются следующие шаги:

1. Рассмотреть все разбиения $I = I_1 \cup I_2$ (их 2, $|I| = 1$).
2. Для каждого разбиения:

$$C_{I_1} = \frac{1}{|I_1|} \sum_{i \in I_1} C_i \ \text{и} \ C_{I_2} = \frac{1}{|I_2|} \sum_{i \in I_2} C_i \ .$$

3. Если длина отрезка $[C_{I_1}, C_{I_2}] \neq 0$, то строится вектор нормали n_{I_1, I_2} и выборка \mathcal{E}_{I_1, I_2} такие, что $\text{discrim}(A_v, n_{I_1, I_2}, \mathcal{E}_{I_1, I_2})$ максимально (перебор по всем гиперплоскостям, перпендикулярным n_{I_1, I_2} и обходящим отрезок $[C_{I_1}, C_{I_2}]$ за M шагов из точки C_{I_1} к точке C_{I_2}).

Возвращаясь к прикладной задаче, вершина v объявляется терминальной, если существует класс $i \in [1, m]$ такой, что $p_i(A_v) \geq p_{\min}$ или $|A_v| \leq K_{\min}$. Поскольку на каждом шаге происходит некоторое деление, то процесс конечен.

Рассмотрим пример.

Пример 4.1. Пусть заданы 4 класса векторов (Рис. 3), в каждом из которых содержится 20 векторов.

1. $p(A_v) = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$,
 $I = I_1 \dot{\cup} I_2 = \{1, 2\} \dot{\cup} \{3, 4\}$,
 $n_v = (0, 1)$, $\mathcal{E}_v = 0$,
 $p(A_{v_1}) = (0.5, 0.5, 0, 0)$,

$$p(A_{v_2}) = (0, 0, 0.5, 0.5) ,$$

$$\text{discrim}(A_v, n_v, \mathcal{E}_v) = 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 2 .$$

$$2. A_{v_1} = \text{class}_1 \cup \text{class}_2 ,$$

$$p(A_{v_1}) = (0.5, 0.5, 0, 0) ,$$

$$I = \{1\} \dot{\cup} \{2\}$$

$$n_{v_1} = (1, 0) , \mathcal{E}_{v_1} = 1 ,$$

$$p(A_{v_{1,1}}) = (1, 0, 0, 0) ,$$

$$p(A_{v_{1,2}}) = (0, 1, 0, 0) ,$$

$$\text{discrim}(A_{v_1}, n_{v_1}, \mathcal{E}_{v_1}) = 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 2 .$$

Вершины $A_{v_{1,1}}$ и $A_{v_{1,2}}$ — терминальные.

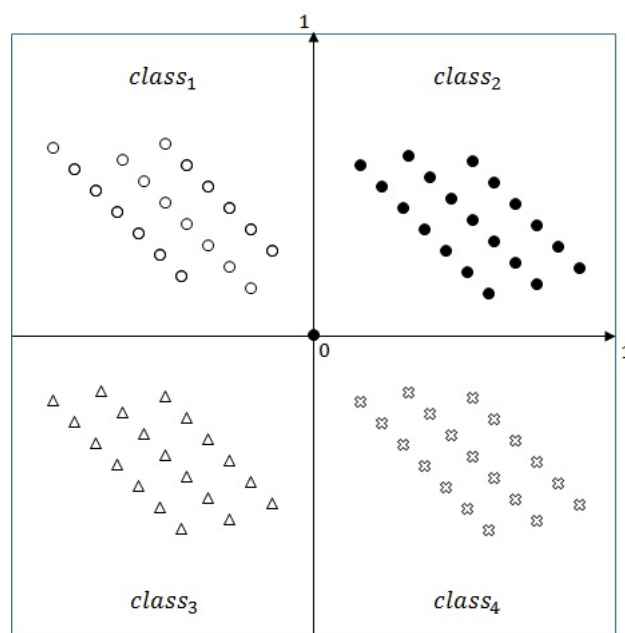


Рис. 3 Классы векторов

$$3. A_{v_2} = \text{class}_3 \cup \text{class}_4 ,$$

$$p(A_{v_2}) = (0, 0, 0.5, 0.5) ,$$

$$I = \{3\} \dot{\cup} \{4\} ,$$

$$n_{v_2} = (1, 0) , \mathcal{E}_{v_2} = 1 ,$$

$$p(A_{v_{2,1}}) = (0, 0, 1, 0) ,$$

$$p(A_{v_{2,2}}) = (0, 0, 0, 1) ,$$

$$\text{discrim}(A_{v_2}, n_{v_2}, \mathcal{E}_{v_2}) = 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 2 .$$

Вершины $A_{v_{2,1}}$ и $A_{v_{2,2}}$ — терминальные.

Заметим, что практическая реализация вышеописанной алгоритмической схемы исключает полный перебор всех возможных разбиений заданного множества классов.

Предварительное разбиение множества классов. Другой подход к построению оптимального разбиения множества классов ориентирован на снижение вычислительных затрат за счет предварительных построений.

Введем обозначения:

$$a_{ij} = \sum \{(\mathbf{a}_{k_1} - \mathbf{a}_{k_2}) : \mathbf{a}_{k_1} \in \mathbb{A}_i, \mathbf{a}_{k_2} \in \mathbb{A}_j\}, i, j \in [1, k] . \quad (4.6)$$

$$a(I_1, I_2) = \sum_{i \in I_1, j \in I_2} a_{ij} . \quad (4.7)$$

Среди всех разбиений вида

$$I_1, I_2 \subseteq [1, m] : I_1, I_2 \neq \emptyset, I_1 \cup I_2 = I ,$$

для выборки A_v , заданной для вершины v решающего дерева $G = (V, E)$, требуется выбрать такое, что величина $\|a(I_1, I_2)\|$ достигает своего максимального значения, то есть

$$a(I_1, I_2) \longrightarrow \max . \quad (4.8)$$

Пусть для обучающей выборки $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \cup \dots \cup \mathbb{A}_m$ рассчитаны попарно для всех векторов суммы разностей вида (4.6). Выберем оптимальное разбиение $I = I_1 \cup I_2$ по последовательной схеме. На первом шаге выбираем разбиение

$$I = \{i_1\} \cup I \setminus \{i_1\} : \|a(\{i_1\}, I \setminus \{i_1\})\| = \max_{i_1} ,$$

другими словами, выбираем такое разбиение, что условие (4.8) выполняется. При этом, по определению,

$$a(\{i_1\}, I \setminus \{i_1\}) = \sum_{j \in I \setminus \{i_1\}} a_{i_1 j} .$$

На следующем шаге выбираем разбиение

$$I = \{i_1, i_2\} \cup I \setminus \{i_1, i_2\} : \|a(\{i_1, i_2\}, I \setminus \{i_1, i_2\})\| = \max_{i_2} ,$$

и так далее, пока не будет найдено оптимальное.

Приведем формальное описание алгоритма для поиска приближенного решения, близкого к оптимальному разбиению.

1. Пусть $I' = \emptyset, I'' = I$
2. $I' \leftarrow \emptyset$
3. $I'' \leftarrow I$
4. Пока $I'' \neq \emptyset$
5. $i_0 = \arg \max_{i \in I''} (\|a(I' \cup \{i\}, I'' \setminus \{i\})\|)$
6. $I' \leftarrow I' \cup \{i_0\}$
7. $I'' \leftarrow I'' \setminus \{i_0\}$

В процессе работы алгоритма формируется последовательность разбиений вида

$$\begin{aligned} I &= (\emptyset \dot{\cup} I) , \\ I_1 &= (\{i_1\} \dot{\cup} I \setminus \{i_1\}) , \\ &\dots\dots\dots , \\ I_n &= (I \dot{\cup} \emptyset) , \end{aligned}$$

среди которых следует выбрать такое, что $\|a(I', I'')\|$ максимально. Таким образом, для заданных обучающей выборки и множества классов будет построено разбиение, близкое к оптимальному. При этом найденное разбиение составляет основу для построения дерева решений для классификации входящих векторов.

Рассмотрим пример.

Пример 4.2. Пусть задано множество классов $I = \{1, 2, 3, 4\}$ (Рис. 4) и 4 вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$. Тогда матрица значений для a_{ij} будет иметь вид

$$a_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{cccc} 0 & (1, 0) & (0, -1) & (1, -1) \\ (0, -1) & 0 & (-1, -1) & (0, -1) \\ (0, 1) & (1, 1) & 0 & (1, 0) \\ (-1, 1) & (0, 1) & (-1, 0) & 0 \end{array} \right\| \end{matrix} .$$

Построим оптимальное разбиение векторов на классы.

$$1. I_1 = \{1\}, I_2 = \{2, 3, 4\},$$

$$a(I_1, I_2) = a_{12} + a_{13} + a_{14} = (1, 0) + (0, -1) + (1, -1) = (2, -2),$$

$$\|a(I_1, I_2)\| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \simeq 2,8.$$

$$2. I_1 = \{1, 2\}, I_2 = \{3, 4\},$$

$$a(I_1, I_2) = a_{13} + a_{14} + a_{23} + a_{24} = (0, -1) + (1, -1) + (-1, -1) + (0, -1) = (0, -4),$$

$$\|a(I_1, I_2)\| = 4.$$

$$3. I_1 = \{1, 2, 3\}, I_2 = \{4\},$$

$$a(I_1, I_2) = a_{14} + a_{24} + a_{34} = (1, -1) + (0, -1) + (1, 0) = (2, -2),$$

$$\|a(I_1, I_2)\| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \simeq 2,8.$$

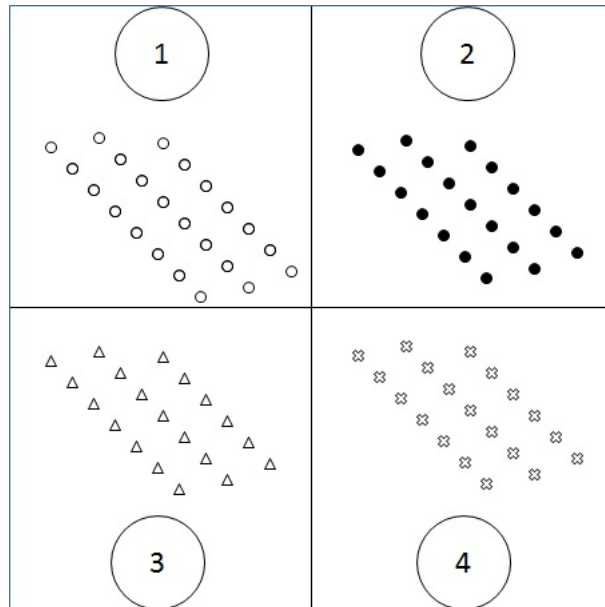


Рис. 4 Множество классов и векторы

Максимальное значение $a(I_1, I_2)$ достигается для разбиения из п. 2, то есть

$$I = \{1, 2\} \dot{\cup} \{3, 4\},$$

что выглядит логичным результатом в практическом смысле.

Таким образом, предложенный алгоритм поиска оптимального разбиения является эффективным за счет использования матрицы $|a_{ij}|$ с предварительно вычисленными значениями.

При обработке больших данных, когда объем выборки достигает сотен тысяч и миллионов векторов, предложенный подход особенно эффективен, поскольку существенно снижает вычислительные затраты на поиск решения.

Алгоритмы дихотомии. Рассмотрим задачу поиска разбиения $I = I_1 \dot{\cup} I_2$, доставляющего максимум функции $\|a(I_1, I_2)\|$. Обозначим через $K(I_i)$ число точек в множестве $\{a_s : a_s \in A_i\}$, то есть

$$K(I_i) = |\{a_s : a_s \in A_i\}| .$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum \{(a_s - a_t) : a_s \in I_i, a_t \in I_j\} = \\ &= \sum_{a_s \in A_i} \left(K(I_j) \cdot a_s - \sum_{a_t \in A_j} a_t \right) = K(I_i) \cdot \sum_{a_s \in A_i} a_s - K(I_i) \cdot \sum_{a_t \in A_j} a_t = \\ &= K(I_i) \cdot K(I_j) \cdot (C(I_i) - C(I_j)) . \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к следующему.

Для заданного множества точек $A \subset \mathbb{R}^n$ и его разбиения $A = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_k$ найти разбиение $I = I_1 \dot{\cup} I_2$, где $I = [1, k]$, такое, что функция

$$|a(I_1, I_2)| = \left| \sum_{\substack{i \in I_1 \\ j \in I_2}} K(I_i) \cdot K(I_j) \cdot (C(I_i) - C(I_j)) \right|$$

принимает максимальное значение среди всех возможных разбиений $I = I_1 \dot{\cup} I_2$. Очевидно, что полученная задача имеет значительную меньшую размерность, чем в исходной формулировке.

Поскольку в полученной формулировке участвуют только центры подмножеств $A_i, i \in [1, k]$, то можно произвести дальнейшее упрощение формулировки задачи.

Пусть задано конечное множество точек $C = \{c_i : i = [1, k]\}$ (служащих аналогом центров подмножеств в прежней формулировке) и заданы натуральные числа $n_i, i \in [1, k]$, (служащие аналогом количества точек в подмножествах $A_i, i \in [1, k]$, в прежней формулировке). Тогда проблема

формулируется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{\substack{i \in I_1 \\ j \in I_2}} n_i \cdot n_j \cdot (c_i - c_j) \right| \longrightarrow \max , \\ I = I_1 \dot{\cup} I_2 . \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Представляют интерес также следующие частные случаи задачи (4.9).

Пусть $n_i = n \forall i \in [1, k]$. Тогда формулировка задачи принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum n_i \cdot n_j \cdot (c_i - c_j) \right| = n^2 \left| \sum_{i \in I_1, j \in I_2} (c_i - c_j) \right| \longrightarrow \max , \\ I = I_1 \dot{\cup} I_2 . \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Следующее упрощение состоит в рассмотрении случая $n_i = 1 \forall i \in [1, k]$. Тогда формулировка задачи принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| |I_2| \cdot \sum_{i \in I_1} c_i - |I_1| \cdot \sum_{i \in I_2} c_i \right| \longrightarrow \max , \\ I = I_1 \dot{\cup} I_2 . \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Задачу (4.11) переформулируем в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} |I_2| \cdot |I_1| \cdot \frac{\sum_{i \in I_1} c_i}{|I_1|} - |I_1| \cdot |I_2| \cdot \frac{\sum_{i \in I_2} c_i}{|I_2|} = |I_1| \cdot |I_2| \cdot \left(\frac{1}{|I_1|} \cdot \sum_{i \in I_1} c_i - \frac{1}{|I_2|} \cdot \sum_{i \in I_2} c_i \right) \longrightarrow \max , \\ I = I_1 \dot{\cup} I_2 . \end{array} \right.$$

И, наконец, с геометрической точки зрения представляет интерес задача обсуждаемого вида в следующей формулировке.

Пусть

$$C(I') \triangleq \frac{1}{|I'|} \cdot \sum_{i \in I'} c_i \quad \forall I' \subset I = [1, k] .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |C(I_1) - C(I_2)| \longrightarrow \max , \\ I = I_1 \dot{\cup} I_2 . \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Рассмотрим подробнее задачу (4.12). Будем использовать стандартное обозначение $\text{conv } A$ для выпуклой оболочки множества A .

Для множества точек A очевидно, что

$$C(I_1) \in \text{conv } A ,$$

$$C(I_2) \in \text{conv } A ,$$

и, следовательно,

$$[C(I_1), C(I_2)] \in \text{conv } A .$$

Утверждение 4.1. Пусть задано конечное множество $C = \{c_i : i \in [1, k] \subset \mathbb{R}^n$. Пусть c_{i_1}, c_{i_2} — два таких вектора, что

$$\|c_{i_1} - c_{i_2}\| = \max_{\substack{i, j \in I \\ i \neq j}} \|a_i - a_j\| .$$

Тогда, если $I_1 \dot{\cup} I_2 = I$ — оптимальное решение задачи (4.12), то

$$\|c_{i_1} - c_{i_2}\| \leq \|a_i - a_j\| . \quad (4.13)$$

Доказательство. Докажем, что в условиях данного утверждения величина $\|c_{i_1} - c_{i_2}\|$ является диаметром множества A , то есть

$$\|c_{i_1} - c_{i_2}\| = \max_{a_i, a_j \in \text{conv } A} \rho(c_i, c_j) ,$$

где $\rho(c_i, c_j)$ — евклидово расстояние между точками c_i, c_j в пространстве \mathbb{R}^n .

Предположим противное, то есть для некоторой пары точек $a, b \in \text{conv } C$ таких, что $[a, b]$ — диаметр $\text{conv } C$, хотя бы одна из них не является крайней. Пусть для определенности $b \notin \text{vert}(\text{conv } C)$, где через $\text{vert}(\cdot)$ обозначены крайние точки $\text{conv } C$.

Рассмотрим отрезок $[a, b]$. Поскольку b не является крайней точкой, то, следовательно, найдется отрезок $[c, d]$, для которого точка b является внутренней и $[c, d] \subset \text{conv } A$. Тогда получим треугольник с вершинами a, c, d , в котором b является внутренней точкой отрезка $[c, d]$. Все стороны этого треугольника лежат в множестве $\text{conv } A$.

Легко видеть, что в этом случае имеет место одно из неравенств: $\rho(a, c) > \rho(a, b)$ или $\rho(a, d) > \rho(a, b)$ в противоречии с максимальнойностью $\rho(a, b)$.

Таким образом, точки a_{i_1}, a_{i_2} лежат на концах некоторого диаметра множества $\text{conv } C$ и, поскольку $C(I_1) \in \text{conv } A$ и $C(I_2) \in \text{conv } A$, то и $[C(I_1), C(I_2)] \subset \text{conv } A$ и, следовательно, имеет место неравенство (4.13). \square

Построим эвристический алгоритм поиска оптимального решения задачи (4.13), то есть поиска разбиения $I = I_1 \dot{\cup} I_2$, доставляющего максимальное значение для $\rho(C(I_1), C(I_2))$.

Алгоритм MDP (maximum distance pair)

Входные данные: Множество точек $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ и $I = [1, K]$.

Выходные данные: Разбиение $I = I_1 \dot{\cup} I_2$, для которого $\rho(C(I_1), C(I_2))$ принимает максимальное значение среди всех возможных разбиений.

1. Вычислить $\rho(c_i, c_j)$ для всех пар $i, j \in [1, n], i \neq j$.
2. Определить пару i_0, j_0 такую, что

$$\rho(c_{i_0}, c_{j_0}) = \max_{i, j \in I} \rho(c_i, c_j) .$$

3. Построить направление $c_{i_0} - c_{j_0}$ в пространстве \mathbb{R}^n .
4. Построить проекции всех точек из множества C :

$$p_i = \langle c_i, c_{i_0} - c_{j_0} \rangle , i \in [1, n] .$$

5. Присвоить $I_1 = \{i_0\}, I_2 = \{j_0\}$.
6. Для $\forall i \in [1, n] \setminus I_1 \dot{\cup} I_2$ вычислить две величины:
 - (a) $|p(I_1 \cup \{i\}) - p(I_2)| = p_1$.
 - (b) $|p(I_1) - p(I_2 \cup \{i\})| = p_2$.
 - (c) Если $p_1 > p_2$, то присвоить $I_1 \leftarrow I_1 \cup \{i\}$, если $p_1 < p_2$, то присвоить $I_2 \leftarrow I_2 \cup \{i\}$.
7. Если $I_1 \cup I_2 \neq I$, то вернуться к п. 6.
8. Конец алгоритма

В результате алгоритма будут найдены подмножества I_1, I_2 , для которых $|p(I_1) - p(I_2)|$ максимально. При этом очевидно, что $\rho(C(I_1), C(I_2)) \geq |p(I_1) - p(I_2)|$.

Описанный алгоритм является полиномиальным относительно размерности задачи n (размерность пространства) и k (число векторов),

а найденное значение $|p(I_1) - p(I_2)|$ дает достаточно хорошую нижнюю оценку оптимизируемой функции $\|C(I_1) - C(I_2)\|$.

Ясно, что в предлагаемом подходе к построению решающего дерева наиболее сложной задачей является разделение множества классов на два подмножества классов с целью построения разделяющей функции в некоторой вершине решающего дерева.

В общем случае после произведенных упрощений были рассмотрены несколько формулировок разбиения исходного множества классов $I = [1, k]$ на два подмножества $I = I_1 \dot{\cup} I_2$ на основе анализа взаимного расположения точек из $C = \{c_i : i = [1, k]\}$, представляющих центры классов A_i исходной выборки $A = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_k$. Во всех случаях для подмножеств I_1, I_2 определяются некоторые вещественные функции $f(I_1, I_2)$ и формулируются задачи поиска разбиения $I = I_1 \dot{\cup} I_2$, для которого функция $f(I_1, I_2)$ максимальна.

Перечислим рассмотренные выше виды функции $f(I_1, I_2)$.

$$f_1(I_1, I_2) = |I_1| \cdot |I_2| \cdot \|C(I_1) - C(I_2)\| , \quad (4.14)$$

$$f_2(I_1, I_2) = \|C(I_1) - C(I_2)\| , \quad (4.15)$$

Пусть $a, b \in C = \{c_i : i \in [1, k]\}$ такие, что $\rho(a, b) = \max_{\substack{i \neq j \\ i, j \in [1, k]}} \rho(c_i, c_j)$ и p_i — проекция точки c_i на направление $[a, b]$.

$$f_3(I_1, I_2) = \|pr_{[a,b]}C(I_1) - pr_{[a,b]}C(I_2)\| . \quad (4.16)$$

Пусть задан некоторый вектор p в пространстве \mathbb{R}^n .

Обозначим

$$p(c_i) = \frac{\langle c_i, p_i \rangle}{\|p_i\|} , \quad i = [1, k] ,$$

$$P(C) = \{p(c_i) : i = [1, k]\} .$$

Тогда мы можем определить для случаев (4.14)–(4.15) их «одномерные» аналогии для направления, заданного вектором p .

Интересен случай, когда $p = a - b$, где $a, b \in C$ — два вектора из множества C такие, что

$$\rho(a, b) = \max_{i,j=[1,k]} (\rho(c_i), c_j) .$$

Ниже в таблице приведены результаты экспериментов с четырьмя различными алгоритмами разделения классов.

Алгоритм $\mathcal{A}(f_1)$ ($\mathcal{A}(f_2)$) — алгоритм полного перебора всех 2^m вариантов разделения множества C на два подмножества с использованием функции f_1 из (4.14) (f_2 из (4.15)).

Алгоритм $\mathcal{L}(f_1)$ ($\mathcal{L}(f_2)$) — разделение проекции множества C на направление $[a, b]$ с максимально удаленными точками $a, b \in C$, в котором рассматриваются только разделения, в которых минимальные отрезки, охватывающие все точки каждого подмножества, не пересекаются. Очевидно, что таких наборов не более $(m - 1)$.

Пусть $\bar{C} = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_m\}$ — проекция набора C на направление $[a, b]$. Тогда множество \bar{C} может быть линейно упорядочено по любой координате своих точек, которая не равна 0 для всех точек из \bar{C} . Множество \bar{C} имеет не более m попарно различных точек. Для простоты предположим, что $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_m)$ и есть упорядоченное множество попарно различных точек.

Рассмотрим $(m - 1)$ точек $b_i = 0,5 \cdot \bar{c}_i + 0,5 \cdot \bar{c}_{i-1}, i = [1, m - 1]$. Тогда мы в алгоритме \mathcal{L} будем рассматривать только следующее разбиение множества классов C :

$$\begin{aligned} I_1(b_i) &= \left\{ i \in [1, m]: \langle \bar{c}_i, \vec{ab} \rangle < \langle \bar{c}_i, b_i \rangle \right\} , \\ I_2(b_i) &= \left\{ i \in [1, m]: \langle \bar{c}_i, \vec{ab} \rangle > \langle \bar{c}_i, b_i \rangle \right\} . \end{aligned}$$

Таким образом, в алгоритме \mathcal{L} будет рассмотрено только не более $(m - 1)$ вариантов разбиения множества \bar{C} и, следовательно, только $(m - 1)$ вариантов разбиения исходного множества C . При этом также будут рассматриваться два варианта реализации алгоритма \mathcal{L} : $\mathcal{L}(f_1)$ — с использованием функции близости f_1 и $\mathcal{L}(f_2)$ — с использованием функции f_2 соответственно.

В алгоритмах $\mathcal{A}(f_1)$, $\mathcal{A}(f_2)$ просматриваются 2^m пар подмножеств и для каждой пары необходимо выполнить $\mathcal{O}(n)$ операций для расчета близости между подмножествами пары. Таким образом алгоритмы $\mathcal{A}(f_1)$, $\mathcal{A}(f_2)$ имеют вычислительную сложность $\mathcal{O}(n \cdot 2^m)$.

В алгоритмах $\mathcal{L}(f_1), \mathcal{L}(f_2)$ выполняется $\mathcal{O}(n \cdot m^2)$ операций для выделения пары максимально удаленных точек набора, $\mathcal{O}(n \cdot m)$ операций для вычисления проекций точек набора на направление, определяемое парой максимально удаленных точек, и $\mathcal{O}(m^2)$ операций для определения наилучшего разбиения исходного набора на два подмножества. Таким образом алгоритмы $\mathcal{L}(f_1), \mathcal{L}(f_2)$ будут иметь вычислительную сложность $\mathcal{O}(n \cdot m^2)$.

Вычислительные эксперименты проводились для 100 случайных наборов по 32 точки в двумерном пространстве. Каждое разбиение $I = I_1 \dot{\cup} I_2$ исходного множества из 32 классов может быть представлено двоичным кодом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i \in [0, 1]$ для $i = [1, m]$, где $\alpha_i = 0 \iff i \in I_1$ и $\alpha_i = 1 \iff i \in I_2 \forall i \in [1, m]$.

Таблица 1. Алгоритмы дихотомии

алгоритм	$\mathcal{A}(f_1)$	$\mathcal{L}(f_1)$	$\mathcal{A}(f_2)$	$\mathcal{L}(f_2)$	сложность алгоритма
$\mathcal{A}(f_1)$	100%	88,4%	64,2%	62,7%	$\mathcal{O}(n \cdot 2^m)$
$\mathcal{L}(f_1)$	88,4%	100%	65,3%	63,8%	$\mathcal{O}(n \cdot m^2)$
$\mathcal{A}(f_2)$	64,2%	65,3%	100%	94,9%	$\mathcal{O}(n \cdot 2^m)$
$\mathcal{L}(f_2)$	62,7%	63,8%	94,9%	100%	$\mathcal{O}(n \cdot m^2)$

Пусть заданы $I = I_1 \dot{\cup} I_2$ и $I = I'_1 \dot{\cup} I'_2$ — два разбиения, близость между которыми следует оценить, и α, α' — соответствующие им двоичные коды.

Обозначим для двоичных наборов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ через $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m)$ дополнительный набор такой, что $\bar{\alpha}_i + \alpha_i = 1, \forall i = [1, m]$. Также обозначим через $hamming(\alpha, \alpha')$ расстояние между двоичными наборами по Хэммингу:

$$hamming(\alpha, \alpha') = \left| \left\{ i \in [1, m] : \alpha_i \neq \alpha'_i, i = [1, m] \right\} \right|.$$

Близость между наборами α, α' мы будем оценивать по формуле:

$$\rho(\alpha, \alpha') = \min \left\{ hamming(\alpha, \alpha'), hamming(\bar{\alpha}, \alpha') \right\}.$$

В таблице для каждой пары алгоритмов из рассматриваемой четверки алгоритмов в соответствующей клетке таблицы помещено среднее значение величины $\rho(\alpha, \alpha')$ для разбиений α и α' , полученных соответственно рассматриваемой парой алгоритмов.

Содержательный смысл полученных результатов состоит в следующем: несмотря на существенную разницу между сложностью алгоритмов $\mathcal{A}(f_1)$ и $\mathcal{L}(f_1)$, полученные разбиения в среднем очень близки — 88,4%. С этой точки зрения алгоритм $\mathcal{L}(f_1)$ будучи полиномиальным ($\mathcal{O}(n \cdot m^2)$) дает результаты, очень близкие к результатам алгоритма $\mathcal{A}(f_1)$ полного перебора.

Еще более близкие результаты дает пара $\mathcal{A}(f_2)$ и $\mathcal{L}(f_2)$. Однако применение функции f_2 вместо функции f_1 дает серьезное ухудшение результатов.

Таким образом, с практической точки зрения наибольший интерес представляет алгоритм $\mathcal{L}(f_1)$, который дает хорошие результаты, оставаясь эффективным с вычислительной точки зрения.

4.2. Булевы функции и комплексы

Мультииндексы подсистем несовместных систем со свойством монотонности и, в частности, мультииндексы подсистем несовместных систем линейных неравенств задают разбиение булевой решетки мультииндексов на два частично упорядоченных подмножества, соответствующих совместным и несовместным подсистемам. Это разбиение исчерпывающим образом определяется так называемой границей, то есть совокупностью мультииндексов максимальных совместных и минимальных несовместных подсистем, причем семейство мультииндексов МСП естественным образом рассматривается как семейство гиперграней абстрактного симплициального комплекса. В терминах монотонных булевых функций мультииндексы МСП и МНП соответствуют верхним нулям и нижним единицам некоторой булевой функции, сопоставляемой исследуемой системе неравенств.

В этом разделе рассматривается взаимосвязь задач поиска максимальных совместных подсистем системы неравенств с задачей оптимальной расшифровки монотонных булевых функций. Расшифровка лежит в основе многочисленных приложений, поэтому нами подробно обосновывается специфический подход к ее эффективной реализации.

4.2.1. Оптимальная расшифровка булевых функций

Напомним несколько конструкций и обозначений, которые использовались ранее в Главе 1.

Для двоичных наборов $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ и $\beta := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ из единичного дискретного m -мерного куба $\mathbf{B}^m := \{0,1\}^m$ упорядочение $\alpha \leq \beta$, по определению, выполнено в том и только том случае, когда $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in [m]$.

Количество единиц в наборе $\alpha \in \mathbf{B}^m$ будет обозначаться через $|\alpha|$.

Мы будем обозначать посредством $\alpha \oplus \beta$ покоординатное сложение наборов α и β над множеством \mathbf{B} , наделенным свойствами конечного поля \mathbb{F}_2 из двух элементов.

Любая монотонная булева функция (МБФ) $f: \mathbf{B}^m \rightarrow \mathbf{B}$, то есть отображение, для которого выполнены импликации

$$\alpha, \beta \in \mathbf{B}^m, \alpha \leq \beta \implies f(\alpha) \leq f(\beta), \quad (4.17)$$

индуцирует разбиение $\mathbf{B}^m = f^{-1}(0) \dot{\cup} f^{-1}(1)$ куба \mathbf{B}^m на прообразы элементов из множества \mathbf{B} . При таком разбиении семейство

$$\mathfrak{J}(\mathbf{J}) := \{\{j \in [m]: \alpha_j = 1\}: \alpha \in f^{-1}(0)\}, \quad (4.18)$$

понимается как подмножество булевой решетки $\mathbb{B}(m)$ подмножеств множества индексов $[m]$ и составляет ее порядковый идеал, порожденный в $\mathbb{B}(m)$ семейством \mathbf{J} максимальных по включению множеств из семейства $\{\{j \in [m]: \alpha_j = 1\}: \alpha \in f^{-1}(0)\}$. Идеал $\mathfrak{J}(\mathbf{J})$ — это ч.у. множество граней абстрактного симплицеального комплекса $\Delta(\mathbf{J})$ с семейством гиперграней \mathbf{J} .

Сходным образом из условия монотонности (4.17) вытекает, что семейство

$$\mathfrak{I}(\mathbf{I}) := \{\{j \in [m]: \alpha_j = 1\}: \alpha \in f^{-1}(1)\}$$

может рассматриваться как порядковый фильтр в решетке $\mathbb{B}(m)$, порожденный семейством \mathbf{I} минимальных по включению множеств из семейства $\{\{j \in [m]: \alpha_j = 1\}: \alpha \in f^{-1}(1)\}$.

Напомним, что множество $f^{-1}(0)$ составляют нули функции f , а множество $f^{-1}(1)$ — единицы этой функции. Подмножество $\mathfrak{Q}(f) := \mathbf{max} f^{-1}(0)$ максимальных элементов ч.у. множества $f^{-1}(0)$ — это множество верхних нулей функции f ; подмножество $\mathfrak{P}(f) := \mathbf{min} f^{-1}(1)$ минимальных элементов ч.у. множества $f^{-1}(1)$ — множество нижних единиц функции f .

Верхний нуль $\alpha \in \mathfrak{Q}(f)$ функции f называется максимальным, если $|\alpha| = \max_{\beta \in \mathfrak{Q}(f)} |\beta|$. Двойственным образом нижняя единица $\alpha \in \mathfrak{P}(f)$ функции f называется минимальной, если $|\alpha| = \min_{\beta \in \mathfrak{P}(f)} |\beta|$.

Обозначим класс всех монотонных булевых функций от m переменных через \mathcal{M}_m .

Пусть с функцией $f \in \mathcal{M}_m$ связан оракул \mathcal{O}_f , то есть оператор, позволяющий для произвольной точки $\alpha \in \mathbf{B}^m$ вычислять значение функции f в этой точке.

Определение 4.5. *Под расшифровкой априорно неизвестной монотонной булевой функции понимается ее восстановление с использованием оракула \mathcal{O}_f .*

При этом фундаментальной является задача построения алгоритмов расшифровки МБФ, требующих наименьшего, в том или ином смысле, числа обращений к оракулу.

Пусть $\varphi(G, f)$ — количество обращений некоторого алгоритма G к оператору \mathcal{O}_f при расшифровке функции $f \in \mathcal{M}_m$. Оптимальность алгоритма G в смысле числа обращений к оператору \mathcal{O}_f можно оценивать, например, следующими функционалами:

$$\varphi(G, m) = \max_{f \in \mathcal{M}_m} \varphi(G, f), \quad (4.19)$$

$$\eta(G, m) = \max_{f \in \mathcal{M}_m} \frac{\varphi(G, f)}{|\mathfrak{Q}(f) \dot{\cup} \mathfrak{P}(f)|}, \quad (4.20)$$

$$\eta_1(G, m) = \max_{f \in \mathcal{M}_m} (\varphi(G, f) - |\mathfrak{Q}(f) \dot{\cup} \mathfrak{P}(f)|), \quad (4.21)$$

$$\eta_2(G, m) = \sum_{f \in \mathcal{M}_m} \varphi(G, f). \quad (4.22)$$

Введем в рассмотрение величину $\varphi(m) := \min_G \varphi(G, m)$, где минимум берется по всем алгоритмам G расшифровки МБФ от m переменных. Аналогичные обозначения $\eta(m)$, $\eta_1(m)$ и $\eta_2(m)$ примем для критериев (4.20)÷(4.22).

В типичном случае расшифровка монотонных булевых функций требует асимптотически в два раза меньшего количества обращений к оракулу, чем в наихудшем случае, — см. [131, 132].

Оптимальный по классическому шенноновскому критерию $\varphi(G, m)$, определенному в (4.19), алгоритм расшифровки монотонных булевых функций построен в работе [8], где было доказано, что $\varphi(m) = \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} + \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor + 1}$.

Для разнообразных практических целей оптимального в шенноновской постановке алгоритма недостаточно.

Например, оптимальные в шенноновской постановке алгоритмы расшифровки из работ [8] и [139] требуют не менее $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$ обращений к оператору \mathcal{O}_f при расшифровке таких простых функций, как тождественный нуль $f_0 \equiv 0$ и тождественная единица $f_1 \equiv 1$.

Проанализируем сложность алгоритмов расшифровки по критерию $\eta(G, m)$.

Такие алгоритмы должны в процессе расшифровки запросить значения функции на множестве $\mathcal{Q}(f) \dot{\cup} \mathcal{P}(f)$. Это значит, что $\varphi(G, f) \geq |\mathcal{Q}(f) \dot{\cup} \mathcal{P}(f)|$ для любого алгоритма G и любой монотонной булевой функции $f \in \mathcal{M}_m$. Таким образом, критерий $\eta(G, m)$ формализует естественное требование пропорциональности вычислительных затрат алгоритма G при расшифровке функции f , измеряемых величиной $\varphi(G, f)$, объективной сложности задачи расшифровки функции f , измеряемой величиной $|\mathcal{Q}(f) \dot{\cup} \mathcal{P}(f)|$.

Процесс расшифровки функции $f \in \mathcal{M}_m$ алгоритмом G может быть описан последовательностью

$$G(f) = (g_1(f), f(g_1(f)), g_2(f), f(g_2(f)), \dots, g_k(f), f(g_k(f))) ,$$

определенным образом выбираемых наборов $g_i(f) \in \mathbf{B}^m$ и вычисляемых соответствующих значений $f(g_i(f)) \in \mathbf{B}$ функции f , для $i \in [\varphi(G, f)]$. Иными словами, $g_i(f)$ — это последовательные обращения-вопросы алгоритма G к оператору \mathcal{O}_f в процессе расшифровки функции f , а $f(g_i(f))$ — ответы оператора \mathcal{O}_f .

Ниже рассматриваются только такие алгоритмы G расшифровки МБФ, для которых последовательность $G(f)$ определена однозначно для всякой функции $f \in \mathcal{M}_m$.

Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{B}^m$. Через $\mathfrak{M}_f(\mathcal{A})$ обозначим множество всех тех точек α единичного куба \mathbf{B}^m , значения функции f в которых определяются однозначно, по свойству монотонности, ее значениями на множестве \mathcal{A} , то есть $\alpha \in \mathfrak{M}_f(\mathcal{A})$, если найдется набор $\beta \geq \alpha$ такой, что $\beta \in \mathcal{A} \cap f^{-1}(0)$, или набор $\beta' \leq \alpha$ такой, что $\beta' \in \mathcal{A} \cap f^{-1}(1)$.

В дальнейшем нам потребуются в качестве стандартных процедур процедура $\text{ВН}(f, \alpha)$ выделения по точке $\alpha \in f^{-1}(0)$ такого верхнего нуля α' функции f , что $\alpha' \geq \alpha$, и процедура $\text{НЕ}(f, \alpha)$ выделения по точке $\alpha \in f^{-1}(1)$ такой нижней единицы α' , что $\alpha \geq \alpha'$. Процедуры $\text{ВН}(f, \alpha)$ и $\text{НЕ}(f, \alpha)$ работают по стандартной схеме, вычисляя значения функции f на некоторых наборах с помощью оператора \mathcal{O}_f .

- Процедура $\text{ВН}(f, \alpha)$.

Пусть набор $\alpha \in \mathbf{B}^m$ содержит $k < m$ единиц $\alpha_i = 1$. Перенумеруем нули в α слева направо. Обозначим через β^i двоичный набор, содержащий $m - 1$ нулей и одну единицу на месте i -го нуля набора α . Тогда последовательность

$$(\alpha^1, f(\alpha^1), \alpha^2, f(\alpha^2), \dots, \alpha^{m-k}, f(\alpha^{m-k})), \quad (4.23)$$

где $\alpha^1 := \alpha \oplus \beta^1$ и $\alpha^i := \alpha \oplus \beta^i \oplus (1 - f(\alpha^1))\beta^1 \oplus (1 - f(\alpha^2))\beta^2 \oplus \dots \oplus (1 - f(\alpha^{i-1}))\beta^{i-1}$, определяет верхний нуль $\alpha' \in \mathfrak{Q}(f)$ такой, что $\alpha' \geq \alpha$, а именно

$$\alpha' = \max_{\leq} \{ \{ \alpha \} \cup \{ \alpha^i : i \in [m - k], f(\alpha^i) = 0 \} \}.$$

- Процедура $\text{НЕ}(f, \alpha)$.

Пусть набор $\alpha \in \mathbf{B}^m$ содержит $k > 0$ единиц $\alpha_i = 1$. Перенумеруем единицы в α слева направо. Обозначим через γ^i двоичный набор, содержащий $m - 1$ нулей и одну единицу на месте i -ой единицы набора α . Тогда последовательность

$$(\alpha^1, f(\alpha^1), \alpha^2, f(\alpha^2), \dots, \alpha^k, f(\alpha^k)), \quad (4.24)$$

где $\alpha^1 := \alpha \oplus \gamma^1$ и $\alpha^i := \alpha \oplus \gamma^i \oplus f(\alpha^1)\gamma^1 \oplus f(\alpha^2)\gamma^2 \oplus \dots \oplus f(\alpha^{i-1})\gamma^{i-1}$, определяет нижнюю единицу $\alpha' \in \mathfrak{P}(f)$ такую, что $\alpha' \leq \alpha$, а именно

$$\alpha' = \min_{\leq} \{ \{ \alpha \} \cup \{ \alpha^i : i \in [k], f(\alpha^i) = 1 \} \}.$$

Ниже через $\text{ВН}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ и $\text{НЕ}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ будут обозначаться сами последовательности (4.23) и (4.24). Заметим, что последовательность $\text{ВН}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ содержит $m - |\boldsymbol{\alpha}|$ обращений к оператору $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$, а последовательность $\text{НЕ}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ содержит $|\boldsymbol{\alpha}|$ обращений к $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$. По определению, будем полагать последовательность $\text{ВН}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ пустой, если $|\boldsymbol{\alpha}| = m$, и полагать последовательность $\text{НЕ}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ пустой, если $|\boldsymbol{\alpha}| = 0$.

Обозначим через $G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ последовательность вида

$$G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) := \begin{cases} (\boldsymbol{\alpha}, 0, \text{ВН}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})), & \text{если } \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0, \\ (\boldsymbol{\alpha}, 1, \text{НЕ}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})), & \text{если } \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 1. \end{cases}$$

Из определения вытекает, что последовательность $G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ содержит верхний нуль $\boldsymbol{\alpha}' \geq \boldsymbol{\alpha}$ функции \mathbf{f} , если $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$, и $G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ содержит нижнюю единицу $\boldsymbol{\alpha}' \leq \boldsymbol{\alpha}$ функции \mathbf{f} , если $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 1$. Введем для этих элементов общее обозначение $\arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$.

Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{B}^m)$ семейство всех подмножеств единичного куба \mathbf{B}^m . Определим для фиксированной функции выбора $\psi: \mathcal{B}(\mathbf{B}^m) \rightarrow \mathbf{B}^m$ алгоритм расшифровки МБФ следующим образом:

$$G_\psi(\mathbf{f}) := (G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^1), G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^2), \dots, G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^k)), \quad (4.25)$$

где $\boldsymbol{\alpha}^1 := \psi(\mathbf{B}^1)$ и $\boldsymbol{\alpha}^i := \psi(\mathbf{B}^m - \mathfrak{M}_{\mathbf{f}}(\{\arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) : s \in [i-1]\}))$.

Процесс расшифровки функции \mathbf{f} алгоритмом G_ψ завершается тогда, когда выполнено $\mathfrak{M}_{\mathbf{f}}(\{\arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) : s \in [k]\}) = \mathbf{B}^m$. Анализируя определение (4.25) последовательности $G_\psi(\mathbf{f})$, можно установить, что

$$\{\arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) : s \in [\varphi(G_\psi, \mathbf{f})]\} = \Omega(\mathbf{f}) \dot{\cup} \mathfrak{P}(\mathbf{f}), \quad (4.26)$$

$$|\{\boldsymbol{\alpha}^i : i \in [\varphi(G_\psi, \mathbf{f})], \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}^i) = 0\}| = |\Omega(\mathbf{f})|, \quad (4.27)$$

$$|\{\boldsymbol{\alpha}^i : i \in [\varphi(G_\psi, \mathbf{f})], \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}^i) = 1\}| = |\mathfrak{P}(\mathbf{f})|. \quad (4.28)$$

Утверждение 4.4. Для любой функции выбора $\psi: \mathcal{B}(\mathbf{B}^m) \rightarrow \mathbf{B}^m$ справедливо неравенство $\eta(G_\psi, m) \leq m + 1$.

Доказательство. Последовательность $G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^i)$ содержит не более $m + 1$ обращений к оператору $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$, если $|\boldsymbol{\alpha}^i| = 0$ или $|\boldsymbol{\alpha}^i| = m$, и не более m обращений

в остальных случаях. Из сказанного, с учетом (4.26), выводим, что

$$\varphi(G_\psi, \mathbf{f}) \leq m|\mathfrak{Q}(\mathbf{f})| + m|\mathfrak{P}(\mathbf{f})| + 2. \quad (4.29)$$

Для функций тождественный нуль $\mathbf{f}_0(\boldsymbol{\alpha}) \equiv 0$ и тождественная единица $\mathbf{f}_1(\boldsymbol{\alpha}) \equiv 1$, мы имеем $\eta(G_\psi, \mathbf{f}_0) \leq m+1$ и $\eta(G_\psi, \mathbf{f}_1) \leq m+1$ соответственно. Если $\mathbf{f} \notin \{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1\}$, то $|\mathfrak{P}(\mathbf{f}) \dot{\cup} \mathfrak{Q}(\mathbf{f})| \geq 2$, и доказываемое следует из (4.29). \square

Утверждение 4.5. Пусть $\psi: \mathcal{B}(\mathbf{B}^m) \rightarrow \mathbf{B}^m$ — произвольная функция выбора, $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_m$, и $\boldsymbol{\alpha}^i$ — фиксированный элемент последовательности $G_\psi(\mathbf{f}) = (G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^1), G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^2), \dots, G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^k))$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) Если $\boldsymbol{\alpha}^i \in \mathbf{min}_{\leq}(\mathbf{B}^m - \mathcal{M}_m(\{\arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) : s \in [i-1]\}))$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}^i) = 1$, то $\boldsymbol{\alpha}^i$ — минимальная нижняя единица функции \mathbf{f} и, значит, $\boldsymbol{\alpha}^i = \arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^i)$.
- (ii) Если $\boldsymbol{\alpha}^i \in \mathbf{min}_{\leq}(\mathbf{B}^m - \mathcal{M}_m(\{\arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) : s \in [i-1]\}))$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}^i) = 0$, то $\boldsymbol{\alpha}^i$ — максимальный верхний нуль функции \mathbf{f} и, значит, $\boldsymbol{\alpha}^i = \arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^i)$.

Доказательство. Докажем утверждение (i). Пусть $\{\boldsymbol{\beta}^1, \boldsymbol{\beta}^2, \dots, \boldsymbol{\beta}^l\}$ — множество элементов из \mathbf{B}^m , покрываемых элементом $\boldsymbol{\alpha}^i$ в ч.у. множестве $\mathcal{B}(\mathbf{B}^m)$. Тогда $\boldsymbol{\beta}^j \in \mathfrak{M}_{\mathbf{f}}(\{\arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) : s \in [i-1]\})$, $j \in [l]$, в силу минимальности $\boldsymbol{\alpha}^i = \mathbf{min}_{\leq} \{\mathbf{B}^m - \mathfrak{M}_{\mathbf{f}}(\{\arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) : s \in [i-1]\})\}$ и $\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}^j) = 0$, $j \in [l]$, поскольку в противном случае элемент $\boldsymbol{\alpha}^i$ принадлежал бы множеству $\mathfrak{M}_{\mathbf{f}}(\{\arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) : s \in [i-1]\})$, что противоречит выбору элемента $\boldsymbol{\alpha}^i$ в (4.25) последовательности $G_\psi(\mathbf{f})$. Из сказанного следует, что $\boldsymbol{\alpha}^i$ — минимальная нижняя единица функции \mathbf{f} .

Утверждение (ii) доказывается аналогичным образом. \square

Практическое значение Утверждения 4.5 состоит в том, что оно позволяет для некоторых функций выбора существенно упростить соответствующие им алгоритмы расшифровки G_ψ . Рассмотрим два практически интересных примера функций выбора. Пусть ψ — произвольная функция выбора. Положим для любого $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{B}^m$

$$\psi_0(\mathcal{A}) := \psi(\mathbf{min}_{\leq} \mathcal{A}), \quad (4.30)$$

$$\psi_1(\mathcal{A}) := \psi(\mathbf{max}_{\leq} \mathcal{A}). \quad (4.31)$$

Рассмотрим последовательность $G_{\psi_0}(\mathbf{f}) = (G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^1), G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^2), \dots, G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^k))$. Из Утверждения 4.5 следует, что всякий элемент $\boldsymbol{\alpha}^i$ из $G_{\psi_0}(\mathbf{f})$ такой, что $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}^i) = 1$, является минимальной нижней единицей функции \mathbf{f} . Это значит, что в $G_{\psi_0}(\mathbf{f})$ подпоследовательность $G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^i)$, в случае $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}^i) = 1$ можно без ущерба для процесса расшифровки заменить на $(\boldsymbol{\alpha}^i, 1)$. Тем самым определен следующий алгоритм.

• **Алгоритм G'_{ψ_0}**

Алгоритм с последовательностью расшифровки $G'_{\psi_0}(\mathbf{f}) := (G'(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^1), G'(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^2), \dots, G'(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^k))$, где

$$G'(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^i) := \begin{cases} (\boldsymbol{\alpha}^i, 0, (\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^i)), & \text{если } \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}^i) = 0, \\ (\boldsymbol{\alpha}^i, 1), & \text{если } \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}^i) = 1, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^1 := \psi_0(\mathbf{B}^m) = (0, 0, \dots, 0),$$

$$\boldsymbol{\alpha}^i := \psi_0(\mathbf{B}^m - \mathfrak{M}_{\mathbf{f}}(\{\arg G'(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) : s \in [i-1]\})),$$

$$\arg G'(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) := \begin{cases} \arg G(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s), & \text{если } \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}^s) = 0, \\ \boldsymbol{\alpha}^s, & \text{если } \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}^s) = 1. \end{cases}$$

Процесс расшифровки функции \mathbf{f} алгоритмом G' завершается тогда, когда выполнено $\mathfrak{M}_{\mathbf{f}}\{\arg G'(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^s) : s \in [k]\} = \mathbf{B}^m$.

• **Алгоритм G'_{ψ_1}**

В описании алгоритма G_{ψ_0} заменим 1 на 0, и 0 на 1 во всех местах, кроме $\boldsymbol{\alpha}^1$, а $\text{ВН}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^i)$ — на $\text{НЕ}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^i)$; получим Алгоритм G'_{ψ_1} — модификацию алгоритма G_{ψ_1} на основе Утверждения 4.5.

Утверждение 4.6. Пусть $\psi: \mathcal{B}(\mathbf{B}^m) \rightarrow \mathbf{B}^m$ — произвольная функция выбора, а величины ψ_0 и ψ_1 определяются соотношениями (4.30) и (4.31). Тогда

$$\varphi(G'_{\psi_0}, \mathbf{f}) \leq m|\mathfrak{Q}(\mathbf{f})| + |\mathfrak{P}(\mathbf{f})| + 1, \quad (4.32)$$

$$\varphi(G'_{\psi_1}, \mathbf{f}) \leq |\mathfrak{Q}(\mathbf{f})| + m|\mathfrak{P}(\mathbf{f})| + 1. \quad (4.33)$$

Доказательство. Докажем неравенство (4.32). Из определения алгоритма G'_{ψ_0} и из Утверждения 4.5 следует, что соотношения (4.26) имеют место и для последовательности $G'_{\psi_0}(\mathbf{f})$, откуда, с учетом определения последовательности $G'(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}^i)$, получаем (4.32).

Соотношение (4.33) доказывается аналогичным образом. \square

Таким образом, алгоритм G'_{ψ_0} эффективен при расшифровке монотонных булевых функций с относительно малым числом максимальных верхних нулей.

Следующее Утверждение, в частности, утверждает, что функция $\eta(m)$ не ограничена никакой константой равномерно для всех m .

Утверждение 4.7. *Для функции $\eta(m)$ справедливо*

$$\max\{2, \log_2 m^{1/2}\} \leq \eta(m) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2.$$

Доказательство. Докажем оценку снизу. Покажем вначале, что $\eta(m) \geq \max\{2, \log_2 m^{1/2}\}$. Пусть G — произвольный алгоритм расшифровки. Обозначим $H(k) := \{\mathbf{f} \in \mathcal{M}_m : |\mathfrak{Q}(\mathbf{f}) \dot{\cup} \mathfrak{P}(\mathbf{f})| \leq k\}$. Для $i \in [m]$ определим функцию $\mathbf{f}_i \in \mathcal{M}_m$ с одним максимальным верхним нулем $\mathfrak{Q}(\mathbf{f}_i) = \{(1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)\}$, где нуль расположен в i -ой позиции, и с одной минимальной нижней единицей $\mathfrak{P}(\mathbf{f}_i) = \{(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\}$, — единица расположена в i -ой позиции. Таким образом, $|H(2)| \geq m$. Пусть $l := \max\{\varphi(G, \mathbf{f}) : \mathbf{f} \in H(2)\}$. Из требования однозначной определенности последовательности $G(\mathbf{f})$ вытекает, что количество МБФ $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_m$, для которых $\varphi(G, \mathbf{f}) \leq l$, не превосходит количества двоичных наборов длины l , то есть 2^l . Следовательно, из определения числа l , имеем $|H(2)| \geq m$ и получаем $l \geq \log_2 m$. Тогда для некоторой функции $\mathbf{f} \in H(2)$ имеем $\varphi(G, \mathbf{f}) \geq \log_2 m$ и, значит, $\eta(G, m) \geq \log_2 m^{1/2}$. Аналогично доказывается неравенство $\eta(m) \geq 2$. Оценка снизу доказана.

Для доказательства неравенства $\eta(m) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$ построим конкретный алгоритм G расшифровки МБФ с $\eta(G, m) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$. Введем на единичном кубе \mathbf{B}^m еще одно отношение частичного порядка \preceq : мы устанавливаем $\alpha \preceq \beta$ тогда и только тогда, когда $|\alpha| \leq |\beta|$. Через $\mathbf{B}^{m, k}$ обозначим множество всех двоичных наборов $\alpha \in \mathbf{B}^m$, содержащих k единиц. Определим следующую функцию выбора $\psi_2: \mathcal{B}(\mathbf{B}^m) \rightarrow \mathbf{B}^m$:

$$\psi_2(\mathcal{A}) = \begin{cases} \beta^1 := \psi(\max_{\preceq} \min_{\preceq} \mathcal{A}), & \text{если } |\beta^1| > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \\ \beta^2 := \psi(\min_{\preceq} \max_{\preceq} \mathcal{A}), & \text{если } |\beta^1| \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \text{ и } |\beta^2| \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \\ \beta^3 := \psi(\mathbf{B}^{m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \cap \mathcal{A}), & \text{если } |\beta^1| \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \leq |\beta^2|, \end{cases}$$

понимая под ψ произвольную, но фиксированную функцию выбора для $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{B}^m$.

Докажем, что это определение корректно, то есть функция $\psi_2(\mathcal{A})$ определена для любого множества наборов $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{B}^m$. Для этого достаточно показать, что из $|\beta^1| \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \leq |\beta^2|$ следует соотношение $\mathbf{B}^{m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Пусть $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^k)$ — максимальная по включению цепь ч.у. множества (\mathcal{A}, \leq) . Очевидно, что $\gamma^1 \in \mathbf{min}_{\leq} \mathcal{A}$ и $\gamma^k \in \mathbf{max}_{\leq} \mathcal{A}$, поэтому из $|\beta^1| \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \leq |\beta^2|$ и определения наборов β^1 и β^2 следует, что $|\gamma^1| \leq |\beta^1| \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \leq |\beta^2| \leq |\gamma^k|$; это и означает, что среди элементов цепи $(\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^k)$ найдется набор с $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ единицами, то есть $\mathbf{B}^{m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

•Алгоритм G'_{ψ_2}

Рассмотрим последовательность $G_{\psi_2}(\mathbf{f}) := (G(\mathbf{f}, \alpha^1), G(\mathbf{f}, \alpha^2), \dots, G(\mathbf{f}, \alpha^k))$. Из Утверждения 4.5 и определения функции выбора ψ_2 следует, что если $|\alpha^i| > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ и $f(\alpha^i) = 1$, то α^i — минимальная нижняя единица, и если $|\alpha^i| < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ и $f(\alpha^i) = 0$, то α^i — максимальный верхний нуль функции \mathbf{f} . Это означает, что, в данных случаях, в последовательности $G_{\psi_2}(\mathbf{f})$ можно без ущерба для процесса расшифровки заменить последовательность $G(\mathbf{f}, \alpha^i)$ на $(\alpha^i, 1)$ или на $(\alpha^i, 0)$ соответственно. Тем самым определен Алгоритм G'_{ψ_2} , с последовательностью расшифровки $G'_{\psi_2}(\mathbf{f}) := (G'(\mathbf{f}, \alpha^1), G'(\mathbf{f}, \alpha^2), \dots, G'(\mathbf{f}, \alpha^k))$, где

$$G'(\mathbf{f}, \alpha) := \begin{cases} (\alpha, f(\alpha)), & \text{если } f(\alpha) = 1 \text{ и } |\alpha| > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \\ & \text{или } f(\alpha) = 0 \text{ и } |\alpha| < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \\ G(\mathbf{f}, \alpha), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\alpha^1 := \psi_2(\mathbf{B}^m),$$

$$\alpha^i := \psi_2(\mathbf{B}^m - \mathfrak{M}_{\mathbf{f}}(\{\arg G'(\mathbf{f}, \alpha^s) : s \in [i-1]\})),$$

$$\arg G'(\mathbf{f}, \alpha^s) := \begin{cases} \alpha^s, & \text{если } f(\alpha^s) = 1 \text{ и } |\alpha^s| > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \\ & \text{или } f(\alpha^s) = 0 \text{ и } |\alpha^s| < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \\ \arg G(\mathbf{f}, \alpha^s), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Алгоритм $G'_{\psi_2}(\mathbf{f})$ завершает расшифровку функции $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_m$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_{\mathbf{f}}(\{\arg G'(\mathbf{f}, \alpha^s) : s \in [k]\}) = \mathbf{B}^m$. Сравнивая последовательности G_{ψ_2} и $G'_{\psi_2}(\mathbf{f})$, убеждаемся в том, что G'_{ψ_2} также

удовлетворяет соотношениям (4.26). С другой стороны, из определения последовательности $G'(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ следует, что $G'(\mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ содержит не более $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$ обращений к оператору $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ для всякого $i \in [k]$. Из сказанного следует, что $\varphi(G'_{\psi_2}, \mathbf{f}) = (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2) |\mathcal{Q}(\mathbf{f}) \dot{\cup} \mathcal{P}(\mathbf{f})|$ и, значит, $\eta(G'_{\psi_2}, \mathbf{f}) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$. \square

Сравнивая разработанные в этом параграфе алгоритмы с другими известными алгоритмами, заметим, что для оптимальных по шенноновскому критерию $\varphi(G, m)$ алгоритмов расшифровки МБФ « A_1 » из [8] и « A_2 » из [139] имеем $\eta(A_1, m), \eta(A_2, m) \geq \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$. Это наблюдение следует из того, что при расшифровке функции тождественный нуль $\mathbf{f}_0 \equiv 0$ алгоритмы « A_1 » и « A_2 » обращаются не менее $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$ раз к оператору $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$, где $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$ — число цепей в рассматриваемом в [8, 139] цепном разбиении единичного куба \mathbf{B}^m .

Алгоритмы нахождения верхних нулей и нижних единиц монотонных булевых функций, сходные с рассматриваемыми в этом параграфе, используются, например, в [170, 229, 251]. Эти алгоритмы, известные под обобщенным названием алгоритмов поиска границы (алгоритмы Find-Border), получили весьма широкое распространение. Они обсуждаются также в работах [94, 132, 171, 178, 228, 248, 250].

В [150] предложен адаптивный алгоритм для решения многомерной задачи о ранце, который может быть эффективно применен также для расшифровки МБФ, имеющих небольшое количество максимальных верхних нулей. Эффективность этого алгоритма подтверждается примером расшифровки конкретной МБФ десяти двоичных переменных с пятью максимальными верхними нулями:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^1 &= (1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1) , \\ \boldsymbol{\alpha}^2 &= (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) , \\ \boldsymbol{\alpha}^3 &= (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1) , \\ \boldsymbol{\alpha}^4 &= (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) , \\ \boldsymbol{\alpha}^5 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) . \end{aligned}$$

Алгоритм из [150] требует для расшифровки этой функции 150 обращений к оператору $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$, в то время как оптимальные по Шеннону алгоритмы из [8, 139] требуют не менее 252 обращений к оператору $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$. Оценим теперь количество обращений к оператору $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ алгоритма G'_{ψ_0} при расшифровке данной конкретной

функции \mathbf{f} . Несложно установить, что функция имеет 20 минимальных нижних единиц. Тогда, согласно Утверждению 4.6, получаем, что алгоритм G'_{ψ_0} требует не более 71 обращений к оператору \mathcal{O}_f . Алгоритм G'_{ψ_0} допускает такую реализацию, когда в памяти вычислительной системы достаточно хранить лишь верхние нули функции $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_m$. Алгоритм G'_{ψ_1} эффективен при расшифровке МБФ с относительно малым количеством минимальных нижних единиц. Он допускает такую реализацию, когда в памяти вычислительной системы достаточно хранить лишь минимальные нижние единицы функции $\mathbf{f} \in \mathcal{M}_m$.

4.2.2. Булевы функции и системы неравенств

Задача выделения максимальных по включению совместных подсистем несовместной монотонной системы условий естественным образом сводится к задаче расшифровки монотонных булевых функций.

Мы рассмотрим здесь задачу выделения всех МСП несовместной системы линейных неравенств вида (3.20), то есть системы

$$S := \{ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle > 0 : \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{a}_i\| = 1, i \in [m] \},$$

однородных строгих линейных неравенств ранга n над вещественным евклидовым пространством \mathbb{R}^n .

Напомним, что сведение ее к задаче расшифровки МБФ состоит в следующем. Пусть $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ — произвольный двоичный набор. Выделим в $\boldsymbol{\alpha}$ все единичные компоненты. Пусть их номера — i_1, i_2, \dots, i_k . Выделим в системе S подсистему неравенств с мультииндексом $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ и обозначим ее через $S(\boldsymbol{\alpha})$. Положим

$$f(\boldsymbol{\alpha}) := \begin{cases} 0, & \text{если } S(\boldsymbol{\alpha}) \text{ совместна,} \\ 1, & \text{если } S(\boldsymbol{\alpha}) \text{ несовместна.} \end{cases}$$

Функция \mathbf{f} монотонна, а множество ее верхних нулей находится во взаимно однозначном соответствии с семейством максимальных совместных подсистем системы S .

Оказывается, что при некоторой естественной для рассматриваемого класса монотонных булевых функций модификации оператора \mathcal{O}_f можно предложить алгоритм расшифровки МБФ, оптимальный по всем критериям (4.19)÷(4.22). От нового оператора \mathcal{O}'_f требуется:

- 1) установить значение функции $f(\alpha)$ для данного набора $\alpha \in \mathbf{B}^m$;
- 2) если $f(\alpha) = 1$, то выдать одну нижнюю единицу α' функции f такую, что $\alpha' \leq \alpha$.

Естественность этой модификации состоит в том, что для рассматриваемого класса МБФ, порождаемых несовместными системами \mathbf{S} , в качестве такого оператора может служить развитый инструментарий линейного программирования.

Обозначим через $\varphi(\mathcal{O}'_f, G, f)$ число обращений к оператору \mathcal{O}'_f алгоритма G при расшифровке функции $f \in \mathcal{M}_m$. Для любого алгоритма G расшифровки МБФ и для любой функции $f \in \mathcal{M}_m$ справедливо неравенство $\varphi(\mathcal{O}'_f, G, f) \geq |\Omega(f) \dot{\cup} \mathfrak{P}(f)|$.

Утверждение 4.8. *Существует алгоритм G^* расшифровки МБФ такой, что $\varphi(\mathcal{O}'_f, G^*, f) = |\Omega(f) \dot{\cup} \mathfrak{P}(f)|$ для всякой функции $f \in \mathcal{M}_m$.*

Доказательство. Построим такой алгоритм G^* . Положим $\mathcal{O}'_f(\alpha) := \alpha$, если $f(\alpha) = 0$, и $\mathcal{O}'_f(\alpha) := \alpha'$, если $f(\alpha) = 1$, где α' — нижняя единица функции f , определяемая оператором \mathcal{O}'_f . Зададим последовательность $G^*(f)$ расшифровки функции $f \in \mathcal{M}_m$ алгоритмом G^* следующим образом:

$$\begin{aligned} G^*(f) &:= (\alpha^1, f(\alpha^1), \alpha^2, f(\alpha^2), \dots, \alpha^k, f(\alpha^k)) , \\ \alpha^1 &:= (1, 1, \dots, 1) \in \mathbf{B}^m , \\ \alpha^i &:= \psi(\max_{\leq}(\mathbf{B}^m - \mathfrak{M}_f(\{\mathcal{O}'_f(\alpha^s) : s \in [i-1]\}))) , \end{aligned}$$

где ψ — произвольная функция выбора. Процесс расшифровки заканчивается тогда, когда выполнено $\mathfrak{M}_f(\{\mathcal{O}'_f(\alpha^s) : s \in [k]\}) = \mathbf{B}^m$, то есть

$$\{\mathcal{O}'_f(\alpha^s) : s \in [k]\} \supseteq \Omega(f) \dot{\cup} \mathfrak{P}(f) . \quad (4.34)$$

Далее, если $f(\alpha^i) = 0$, то $\mathcal{O}'_f(\alpha^i)$ — максимальный верхний нуль функции f в силу максимальности

$$\alpha^i = \psi(\max_{\leq}(\mathbf{B}^m - \mathfrak{M}_f(\{\mathcal{O}'_f(\alpha^s) : s \in [i-1]\}))) ,$$

аналогично тому, как это было в Утверждении 4.5; если же $f(\alpha^i) = 1$, то $\mathcal{O}'_f(\alpha)$ — минимальная нижняя единица функции f , по определению. Таким образом, справедливо включение

$$\{\mathcal{O}'_f(\alpha^s) : s \in [k]\} \subseteq \Omega(f) \dot{\cup} \mathfrak{P}(f) . \quad (4.35)$$

Покажем теперь, что выполняется импликация

$$t, p \in [k], \quad t < p \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{O}'_f(\alpha^t) \neq \mathcal{O}'_f(\alpha^p) . \quad (4.36)$$

Действительно, если $f(\alpha^t) \neq f(\alpha^p)$, то $\mathcal{O}'_f(\alpha^t) \neq \mathcal{O}'_f(\alpha^p)$, по определению. Если $f(\alpha^t) = f(\alpha^p) = 0$, то $\mathcal{O}'_f(\alpha^t) \neq \mathcal{O}'_f(\alpha^p)$, поскольку $\mathcal{O}'_f(\alpha^p) \notin \mathfrak{M}_f(\{\mathcal{O}'_f(\alpha^s) : s \in [t]\})$. Если же $f(\alpha^t) = f(\alpha^p) = 1$, то $\alpha^p \notin \mathfrak{M}_f(\{\mathcal{O}'_f(\alpha^s) : s \in [t]\})$, а поскольку $\mathcal{O}'_f(\alpha^p) \leq \alpha^p$, то и $\mathcal{O}'_f(\alpha^p) \notin \mathfrak{M}_f(\{\mathcal{O}'_f(\alpha^s) : s \in [t]\})$, то есть $A'_f(\alpha^t) \neq A'_f(\alpha^p)$. Из соотношений (4.34) ÷ (4.36) следует, что $k = \varphi(\mathcal{O}'_f, G^*, f) = |\Omega(f) \dot{\cup} \mathfrak{P}(f)|$. Утверждение доказано. \square

Заметим, что в процессе расшифровки функции f в памяти вычислительной системы достаточно хранить лишь множество $\{\mathcal{O}'_f(\alpha^1), \mathcal{O}'_f(\alpha^2), \dots, \mathcal{O}'_f(\alpha^k)\}$, то есть не более $|\Omega(f) \dot{\cup} \mathfrak{P}(f)|$ двоичных наборов длины m .

Алгоритм G^* расшифровки МБФ оптимален по всем критериям (4.19) ÷ (4.22).

4.2.3. Булевы функции и графы

Пусть задан неориентированный граф $G = (N, U)$ с семейством ребер $U = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$. Если $N' \subset N$, то $G\langle N' \rangle$ обозначает индуцированный подграф графа G , на множестве вершин N' . Для вершины $v \in N$, $\mathcal{N}(v) \subset N$ — множество вершин, смежных v , или окрестность вершины v в графе G . Для $N' \subseteq N$ запись $\binom{N'}{2}$ будет обозначать семейство неупорядоченных 2-

подмножеств множества N' . Если k и j – целые числа, то $\binom{k}{j}$ – биномиальный коэффициент.

Обозначим через $[n]$ интервал $\{1, 2, \dots, n\}$, а через $|\cdot|$ – мощность множества. Если $x := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, то $\text{supp}(x) := \{i \in [n] : x_i = 1\}$.

Рассмотрим монотонную булеву функцию (МБФ) $f_G: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, множество $T(f_G) := f_G^{-1}(1)$ единиц которой задано следующим образом:

$$f_G(x) := 1 \iff |U \cap (\{n_i \in N : i \in \text{supp}(x)\})| \geq 1; \quad (4.37)$$

иными словами, $f_G(x) := 1$ тогда и только тогда, когда индуцированный подграф $G\langle\{n_i \in N : i \in \text{supp}(x)\}\rangle$ имеет по меньшей мере одно ребро.

Другая монотонная булева функция $g_G: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, естественным образом сопоставляемая графу G , определяется множеством $F(g_G) := g_G^{-1}(0)$ своих нулей так:

$$g_G(x) := 0 \iff \text{подграф } G\langle\{n_i \in N : i \in \text{supp}(x)\}\rangle \text{ — полный}; \quad (4.38)$$

при том, что к полным графам относятся также пустой граф $G\langle\emptyset\rangle$ и изолированные вершины $G\langle\{n_i\}\rangle$, $n_i \in N$.

Пусть $X \subseteq \{0, 1\}^n$ – множество двоичных наборов длины n . Обозначим через $\max_{\subseteq} X$ множество всех максимальных элементов частично упорядоченного множества $(X, <)$ и $\max_{|\cdot|} X$ множество элементов множества X с максимальным числом единиц в наборе. При этом двоичный набор $x := (x_1, \dots, x_n)$ меньше двоичного набора $x' := (x'_1, \dots, x'_n)$, если найдется индекс $j \in [n]$ такой, что $x_j < x'_j$, и для всех $i \neq j$, $i \in [n]$ имеет место соотношение $x_i \leq x'_i$.

Определение 4.6. Двоичный набор $x \in \{0, 1\}^n$ называется верхним нулем монотонной булевой функции $\varphi: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, если $\varphi(x) = 0$, и $\varphi(x') = 1$ для любого набора $x' \in \{0, 1\}^n$ такого, что $x < x'$; двойственным образом, набор x называется нижней единицей функции φ , если $\varphi(x) = 1$, и $\varphi(x') = 0$ для любого набора x' такого, что $x' < x$. Верхний нуль x функции φ называется максимальным, если соответствующее множество $\text{supp}(z)$ имеет максимальную в семействе $\{\text{supp}(z) : z \in \max_{\subseteq} F(\varphi)\}$ мощность.

Теоретико-графовой конструкцией, связывающей между собой МБФ из (4.37) и (4.38), является дополнительный граф. Граф \bar{G} , дополнительный к графу G , имеет, по определению, множество вершин N и множество ребер $\binom{N}{2} \setminus U$. Непосредственно из определений (4.37) и (4.38) следуют полезные тождества

$$f_G = g_{\bar{G}}, \quad f_{\bar{G}} = g_G.$$

Задача 4.1. Для функции f_G из (4.37) найти множество $\max_{\subseteq} F(f_G)$ ее верхних нулей.

Задача 4.2. Для функции f_G найти ее максимальные верхние нули, то есть наборы $x \in \max_{\subseteq} F(f_G)$ с максимальным количеством $|\text{supp}(x)|$ единичных компонент.

Таким образом с неориентированным графом связана специальным образом заданная МБФ и, следовательно, несовместная система условий. В контексте исходного неориентированного графа, порождающего МБФ, решения Задач 4.1 и 4.2 соответствуют максимальным (по включению) и наибольшим независимым множествам вершин соответственно.

Эвристический алгоритм поиска наибольшего независимого множества. Задача поиска наибольшего независимого множества вершин в неориентированном графе конфликтов является классической \mathcal{NP} -трудной задачей. Для ее решения был разработан эвристический алгоритм с абсолютной оценкой точности решения.

Для удобства будем пользоваться общепринятой графовой терминологией. Рассмотрим неориентированный граф $G = (V, \mathcal{E})$, в котором

$$V = \{v_i, i = [n]\}$$

— множество вершин, и

$$\mathcal{E} = \{e = (v_i, v_j), i, j \in [n]\}$$

— множество ребер.

Определение 4.7. Для любого целого $k \in [n - 1]$ вершина $v \in V$ графа $G = (V, \mathcal{E})$ называется k -вершиной если $|\mathcal{N}(v)| = k$ и ее окрестность является полным индуцированным подграфом.

Определение 4.8. Для любых целых $k \in [n - 1]$ и t вершина $v \in V$ графа $G = (V, \mathcal{E})$ называется (k, t) -вершиной если $k = |\mathcal{N}(v)|$ и в ее окрестности недостает t ребер до полного индуцированного подграфа.

Утверждение 4.9. Если вершина v является k -вершиной в неориентированном графе $G = (V, \mathcal{E})$, то существует наибольшее независимое множество вершин $S \subseteq V$ такое, что $v \in S$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное наибольшее независимое множество вершин S и k -вершину $v \in V$. Легко видеть, что среди элементов множества $\{v\} \cup \mathcal{N}(v)$ существует вершина u такая, что $u \in S$. В самом деле, в противном случае можно было бы найти независимое множество $S' \subseteq V$ такое, что $S' = \{v\} \cup S$ и $|S'| > |S|$. Получаем противоречие с тем, что множество S является наибольшим.

Рассмотрим два возможных случая.

1) Если $v \in S$, то утверждение доказано.

2) Если $v \notin S$ и $u \in S$ для некоторой вершины $u \in \mathcal{N}(v)$, то для S можно найти множество

$$S' = S - \{u\} \cup \{v\} ,$$

которое также будет независимым по определению k -вершины. По построению имеем $|S'| = |S|$. Таким образом мы получаем наибольшее независимое множество S' такое, что $v \in S'$, что и требовалось доказать. \square

Отметим, что Утверждение 4.9 лежит в основе разрабатываемого эвристического алгоритма с абсолютной оценкой точности.

Алгоритм с абсолютной оценкой точности. Обозначим множество всех независимых множеств графа G через $\mathcal{S}(G)$ и множество всех наибольших независимых множеств — через $\mathcal{S}_{\max}(G)$. Пусть $\max \mathcal{S}(G) = |S| : S \in \mathcal{S}_{\max}(G)$ обозначает мощность наибольшего независимого множества вершин графа G .

Утверждение 4.10. Пусть два графа $G_1 = (V_1, \mathcal{E}_1)$ и $G_2 = (V_2, \mathcal{E}_2)$ таковы, что $V_1 = V_2$ и $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$. Тогда

$$\mathcal{S}_{\max}(G_2) \subseteq \mathcal{S}(G_1) .$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное независимое множество $S \in \mathcal{S}(G_2)$ графа G_2 . По определению имеем:

$$\forall u, v \in V_2: u, v \in S \implies (u, v) \notin \mathcal{E}_2 .$$

По условию $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ и $V_1 = V_2$. Как следствие для любого $S \in \mathcal{S}(G_2)$ получаем

$$\forall u, v \in V_2: u, v \in S \implies (u, v) \notin \mathcal{E}_1 ,$$

и таким образом

$$S \in \mathcal{S}(G_1) . \tag{4.39}$$

Тогда для любого независимого множества графа G такого, что $S \in \mathcal{S}(G_2)$, выполняется включение (4.39), то есть

$$\mathcal{S}(G_2) \subseteq \mathcal{S}(G_1) .$$

В то же время по определению любое наибольшее независимое множество является независимым. Таким образом

$$\mathcal{S}_{\max}(G_2) \subseteq \mathcal{S}(G_2) \subseteq \mathcal{S}(G_1) ,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 4.1. Пусть $G_1 = (V, \mathcal{E}_1)$ и $G_2 = (V, \mathcal{E}_2)$ таковы, что $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$. Тогда

$$\max S(G_1) \geq \max S(G_2) .$$

Доказательство. Рассмотрим наибольшее независимое множество $S \in \mathcal{S}_{\max}(G_2)$. Согласно Утверждению 4.10 имеем $S \in \mathcal{S}(G_1)$. По определению для любого $S \in \mathcal{S}(G_1)$ существует $S' \in \mathcal{S}_{\max}(G_1)$ такое, что $|S'| \geq |S|$. Тогда

$$\max S(G_1) = |S'| \geq |S| = \max S(G_2) ,$$

что и требовалось доказать. \square

Следующее утверждение лежит в основе абсолютной оценки точности приближенного решения.

Утверждение 4.11. Пусть $G = (V, \mathcal{E})$ такой граф, в котором вершины v и u не смежные. И пусть $G' = (V', \mathcal{E}')$ такой граф, в котором $V' = V$ и $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{(v, u)\}$. Тогда

$$\max S(G) \geq \max S(G') \geq \max S(G) - 1. \quad (4.40)$$

Доказательство. Неравенство $\max S(G) \geq \max S(G')$ следует из Следствия 4.1 поскольку $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$. Докажем справедливость неравенства $\max S(G') \geq \max S(G) - 1$. Пусть S — наибольшее независимое множество вершин графа G .

1) Предположим, что $v \notin S$ и $u \notin S$. Тогда $S \in \mathcal{S}_{\max}(G')$. В самом деле, в противном случае мы бы получили, что существует наибольшее независимое множество $S' \in \mathcal{S}_{\max}(G')$ такое, что $|S'| > |S|$. Согласно Утверждению 4.9, получаем, что $S' \in \mathcal{S}(G)$, но это противоречит тому, что рассматриваемое множество S является наибольшим. Таким образом в этом случае имеем:

$$\max S(G) = |S| = \max S(G') \geq \max S(G) - 1.$$

2) Предположим, что $v \in S$ и $u \notin S$. Если добавлено ребро (v, u) , то $S \in \mathcal{S}_{\max}(G')$, как уже было показано.

3) Предположим, что $v \in S$ и $u \in S$. Если добавлено ребро (v, u) , то получаем $S \notin \mathcal{S}_{\max}(G')$. В этом случае можно найти множество S' такое, что $S' = S - \{v\}$. Тогда $S' \in \mathcal{S}_{\max}(G')$ и

$$|S'| = |S| - 1$$

по построению. По определению наибольшего независимого множеств имеем

$$\max S(G') \geq |S'| = |S| - 1 = \max S(G) - 1,$$

что и требовалось доказать. \square

Следствие 4.2. Пусть $\{e_1, \dots, e_k\}$ — подмножество из k пар вершин, которые не смежные в графе $G = (V, \mathcal{E})$. И пусть граф $G' = (V', \mathcal{E}')$ такой, что $V' = V$ и $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{e_1, \dots, e_k\}$. Тогда

$$\max S(G) \geq \max S(G') \geq \max S(G) - k.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться Утверждением 4.11 k раз. \square

Утверждение 4.12. Если вершина v является (k, t) -вершиной в графе $G = (V, \mathcal{E})$, то существует максимальное независимое множество $S \subseteq V$ такое, что $v \in S$ и

$$|S| \geq \max S(G) - t.$$

Доказательство. Согласно определению в окрестности вершины v не достаёт t ребер до полного индуцированного подграфа. Предположим, что это ребра $\{e_1, \dots, e_m\}$. Тогда вершина v будет k -вершиной в графе G' , который получен из графа G путем добавления t ребер $\{e_1, \dots, e_m\}$. Согласно Утверждению 4.9 существует $S' : S' \in \mathcal{S}_{\max}(G')$ такое, что $v \in S'$.

Согласно Следствию 4.2 имеем:

$$|S'| = \max S(G') \geq \max S(G) - t.$$

Из Утверждения 4.10 следует, что $S' \in \mathcal{S}(G)$. По определению существует максимальное независимое множество S такое, что $|S| \geq |S'|$ и, как следствие,

$$|S| \geq |S'| \geq \max S(G) - t,$$

что и требовалось доказать. \square

На основе Утверждения 4.12 можно предложить эффективный рекурсивный алгоритм для решения MIS Problem. Определим некоторые свойства алгоритма.

На вход алгоритма $\mathcal{B}(G)$ поступает неориентированный граф $G = (V, \mathcal{E})$. Например, он может быть задан с помощью матрицы смежности. Ясно, что каждая итерация алгоритма влечет обновление значений матрицы смежности, когда некоторая вершина включается в S и исключается из V_0 вместе со своей окрестностью.

В массивах $k[v], m[v]$ (длины n каждый) хранятся значения параметров k и m соответствующих вершин. Эти параметры также обновляются на каждой итерации алгоритма.

Функция $MinMaxParam(v)$ возвращает последовательно вершину v с наименьшим значением параметра m и с наибольшим значением параметра k . Другими словами, сначала вершины упорядочиваются по возрастанию m . Среди отобранных вершин с наименьшим значением m выбирается вершина с наибольшим значением k . Например, если среди вершин исходного графа существует единственная вершина со значением 0 параметра m , то функция $MinMaxParam(v)$ вернет эту вершину независимо от значения параметра k .

Алгоритм позволяет находить независимое множество вершин S и вычислять абсолютную оценку точности решения $(\max S(G) - |S|)$.

Алгоритм $\mathcal{B}(G)$: для решения MIS Problem с абсолютной оценкой точности

Входные данные: неориентированный граф $G = (V, \mathcal{E})$

Выходные данные: независимое множество $S (S \subseteq V)$ и оценка Est отклонения от точного решения

- 1: $V_0 \leftarrow V$ // текущее множество вершин содержит кандидатов на включение в независимое множество
- 2: $S \leftarrow \{\}$
- 3: $Est \leftarrow 0$
- 4: Пока $V_0 \neq \{\}$
- 5: для всех $v \in V_0$
- 6: calculate $k[v]$
- 7: calculate $m[v]$
- 8: $v_0 \leftarrow MinMaxParam(v)$
- 9: $S \leftarrow S \cup \{v_0\}$
- 10: $Est \leftarrow Est + m[v_0]$
- 11: $V_0 \leftarrow V_0 - \{v_0\} - \mathcal{N}(v_0, V_0)$ // удалить из числа кандидатов выбранную вершину вместе с ее окрестностью

Этот алгоритм был реализован и использован для поиска наибольшего независимого множества вершин в дополнительных графах DIMACS. Ясно, что в исходном графе полученное решение будет соответствовать клике.

Тогда становится возможным сравнение результатов с другими эффективными алгоритмами.

Свойства алгоритма в классе деревьев. Следующее следствие показывает, что в некоторых случаях Алгоритм $\mathcal{B}(G)$ позволяет находить точное решение MIS Problem.

Следствие 4.3. *Если $Est = 0$ то независимое множество S , найденное с помощью Алгоритма $\mathcal{B}(G)$, является наибольшим.*

Доказательство. Если $Est = 0$, то $m[v] = 0$ для всех $v \in S$. Это значит, что все эти вершины являются k -вершинами. Таким образом, согласно Утверждению 4.9 найденное независимое множество является наибольшим. \square

Ясно, что условие $Est = 0$ выполняется не всегда. Это мотивирует исследование частных классов графов, для которых выполняются ограничения Следствия 4.3.

Утверждение 4.13. *Для любого связного графа $G = (V, \mathcal{E})$, где $|V| > 2$, существует наибольшее независимое множество вершин, которое содержит все висячие вершины этого графа.*

Доказательство. Рассмотрим связный граф $G = (V, \mathcal{E})$, где $|V| > 2$. Пусть $v \in V$ его висячая вершина. Реализация Алгоритма $\mathcal{B}(G)$ допускает несколько различных состояний множества V_0 . Рассмотрим детально каждое из них.

1) Вершина v висячая и единственная k -вершина. Тогда $S \leftarrow S \cup \{v\}$ как и требовалось.

2) Вершина v висячая и не единственная k -вершина. Рассмотрим вершину u смежную с висячей вершиной v . Вершина u не может быть включена в S на первом шаге, поскольку окрестность вершины u не является полным индуцированным подграфом. В самом деле, вершина v — висячая и смежная с вершиной u , то есть вершина v находится в окрестности вершины u . Поскольку граф $G = (V, \mathcal{E})$ связный, то в окрестности вершины u (на первом шаге, когда множество V_0 совпадает с множеством V) существуют и другие вершины. Но вершина v не может быть смежной ни с одной из них, так как $deg(v, V_0) = 1$ и вершина, смежная с вершиной v , это вершина u . Таким образом, вершина u не является k -вершиной и не будет включена в множество S на первом шаге алгоритма.

Аналогичная ситуация возникает на любом шаге, пока в окрестности вершины u существуют вершины, кроме вершины v . Вершины в окрестности вершины u по-прежнему будут не смежные и вершина u не будет k -вершиной.

Пусть на некотором шаге все вершины из окрестности u удалены, кроме висячей вершины v . Это может произойти, когда вершины, смежные с вершинами из окрестности u , включаются в множество S . В этом случае вершина u становится k -вершиной и может быть включена в S . Однако вершина v также может быть включена в S , что не снижает мощности множества S .

В самом деле, пусть $s: |S| = s$ — мощность множества S на некотором шаге. И пусть вершина u включается в S , а вершина v — нет. Тогда

$$S \longleftarrow S \cup \{u\} \implies |S| = s + 1.$$

Теперь предположим, что вершина v включается в S , а вершина u — нет. Тогда

$$S \longleftarrow S \cup \{v\} \implies |S| = s + 1,$$

то есть можно включить висячую вершину без уменьшения мощности независимого множества. Заметим, что если вышеописанная ситуация произошла, то все вершины в S являются k -вершинами. Таким образом, согласно Следствию 4.3 существует наибольшее независимое множество вершин, которое содержит висячую вершину v .

Рассуждая аналогично для любой висячей вершины, убеждаемся в справедливости утверждения. \square

Таким образом, можно сформулировать более общее утверждение относительно Алгоритма $\mathcal{B}(G)$.

Утверждение 4.14. *Алгоритм $\mathcal{B}(G)$, реализуемый в классе деревьев, позволяет находить точное решение MIS Problem.*

Доказательство. Согласно Следствию 4.3 независимое множество, найденное с помощью Алгоритма $\mathcal{B}(G)$, является наибольшим, если $Est = 0$. В случае, когда исходный граф является деревом, на каждом шаге его висячие вершины (или изолированные вершины) могут быть включены в множество S . Тогда $Est = \sum_{v \in S} m[v] = 0$ и независимое множество S является наибольшим, что и требовалось доказать. \square

Отметим, что Утверждение 4.14 является свойством Алгоритма $\mathcal{B}(G)$. Кроме как с его помощью, MIS Problem может быть эффективно решена в классе деревьев с помощью метода динамического программирования из [176]. Однако у этих подходов все же имеются структурные различия.

Вычислительные эксперименты. Обсудим алгоритмическую сложность Алгоритма $\mathcal{B}(G)$.

Для каждой вершины v требуется найти количество вершин в окрестности и количество ребер, которые должны быть добавлены в окрестность, чтобы она стала полным индуцированным подграфом. Удаление $v \cup \mathcal{N}(v, V_0)$ и ребер $e \in G \langle \{v\} \cup \mathcal{N}(v, V_0) \rangle$ происходит до тех пор, пока V_0 не станет пустым. Пусть n и m — количество вершин и ребер в исходном графе соответственно.

Тогда получаем следующую оценку. Общее число итераций меньше или равно n . Каждая итерация требует не более, чем $\mathcal{O}(n \cdot m)$ действий для вычисления параметров и не более, чем $\mathcal{O}(m)$ действий для удаления выбранных вершин вместе с их окрестностями. Таким образом, сложность Алгоритма $\mathcal{B}(G)$ is $\mathcal{O}(n \cdot n \cdot m + n \cdot m) = \mathcal{O}(n^2 \cdot m)$. Ниже в таблице представлены результаты вычислительных экспериментов на дополнительных графах DIMACS. В таблице также представлены результаты сравнения с эффективными алгоритмами из [226], [237], [242].

В столбце $\omega(G)$ — размер максимальной клики в соответствующем графе, а точное решение (наибольшая клика) выделено жирным шрифтом. В столбце $\mathcal{B}(G)$ — результаты, полученные с помощью предлагаемого эвристического алгоритма.

Таблица 2. Результаты вычислительных экспериментов на дополнительных графах DIMACS

	DIMACS	$\omega(g)$	approximate solution	Median Runtimes In Seconds					$\mathcal{B}(G)$
				IncMaxCLQ [3]	BBMCX [4]	RPC [5]			
						$\delta=1$	$\delta=2$	$\delta=3$	
1	C125.9	34	33						0,001
2	C250.9	44	42	333.2	1144	1041.2	987.8	971.2	0,005
3	DSJC1000_5	15	13	261.2	211				0,529
4	DSJC500_5	13	11		1.66				0,082
5	MANN_a27	126	126	0.43	0.318				0,01
6	MANN_a45	345	344	114.1	41.4	31.2	34.6	85.6	48,151001
7	MANN_a81	1100	1099						696,870972
8	brock400_2	29	22	259.9	132	107.7	103.8	104	0,024
9	brock400_4	33	22	197.7	20.2	79.7	76.9	77.1	0,04
10	brock800_2	24	18		3586	2971.6	2845.8	2842.2	0,19
11	brock800_4	26	17		2532	1405.8	1341.4	1333.3	0,191
12	hamming8-4	16	16						0.011
13	p_hat300-1	8	8						0.038
14	p_hat300-2	25	25						0.029
15	p_hat300-3	36	34	0.87	0.531	1.1	1	1.2	0.015
16	p_hat700-1	11	8						0.363
17	p_hat700-2	44	43	1.25	1.42	2.3	2.3	2.4	0.691
18	p_hat700-3	62	61	357.4	718	894.5	841.3	854.4	0.144

Можно видеть, что найденное решение совпадает с наилучшим из известных на сегодняшний день только в нескольких случаях, но в большинстве случаев приближение решения достаточно близко к наилучшему. Кроме того, алгоритм демонстрирует высокую эффективность в части сложности вычислений.

4.3. Графы и параллельная обработка данных

Адекватные модели представления позволяют в значительной мере оптимизировать процессы записи, хранения, передачи и обработки данных в различных вычислительных компонентах. Графовые модели являются одними из наиболее распространенных, используемых для этих целей. Так, например, в предыдущем разделе было показано, что условия несовместной системы могут быть эффективно представлены в виде вершин неориентированного

графа. Однако, в практических задачах такие графы характеризуются очень большой размерностью, измеряемой десятками тысяч вершин. В этой связи представляется актуальной разработка методов параллельной обработки данных с графовой структурой. Рассмотрим модель представления данных в виде вершин и дуг ориентированного графа.

Пусть задан ориентированный граф $\vec{G} = (V, E)$ и набор порожденных сильно связных подграфов $\vec{G}_s = (V_s, E_s)$, $s = [1, K]$, таких, что выполняются соотношения

$$\bigcup_{s=1}^K V_s = V \text{ и } \bigcup_{s=1}^K E_s = E .$$

Простые графы по определению не содержат петель и кратных ребер, поэтому если в ориентированном графе существует дуга между некоторой парой вершин, то эта дуга единственна в рассматриваемом направлении. Таким образом любой путь в ориентированном графе $\vec{G} = (V, E)$ может быть представлен в виде последовательности вершин:

$$p_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k(i)}}) , v_{i_j} \in V, i = [1, m], j = [1, k(i)] . \quad (4.41)$$

Пусть задано некоторое множество путей вида (4.41) в ориентированном графе $\vec{G} = (V, E)$:

$$\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, m]\} . \quad (4.42)$$

Забегая вперед, отметим, что такая модель представления данных (в виде множества путей сильно связного ориентированного графа) оказывается эффективной для исследования прикладной задачи организации грузовых железнодорожных перевозок на этапе назначения и перемещения локомотивов. Для решения этой задачи будет использоваться разрабатываемый в диссертации вычислительный комплекс. При этом, ввиду ее высокой комбинаторной сложности, особый интерес представляет разработка метода параллельной обработки данных такого типа. С этой целью рассмотрим следующую задачу.

Пусть заданное множество путей ориентированного графа подлежит обработке в вычислительном комплексе. Эта процедура подразумевает передачу данных вышеуказанного типа в некоторую программу, которая, после реализации ряда алгоритмов, возвращает преобразованные данные такого

же типа и передает их в некоторую другую программу для последующей обработки. Задача при этом состоит в том, чтобы разбить каждый путь из множества (4.42) на подпути меньшей длины

$$p_i = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{n(i)}}) , i = [1, m] , \quad (4.43)$$

таким образом, чтобы каждый подпуть $p_{i_j}, j = [1, n(i)]$, целиком лежал в некотором порожденном сильно связном подграфе $\vec{G}_s, s \in [1, K]$. Такой подход позволит передавать на вход алгоритмов данные меньшей размерности и обрабатывать их независимо, не нарушая при этом структуру решения.

Рассмотрим поперечное пересечение некоторого подпути с некоторым порожденным сильно связным подграфом:

$$p_{i_j s} = p_{i_j} \cap \vec{G}_s = \left\{ v_k : \begin{cases} v_k \in p_{i_j}, i \in [1, m], j \in [1, n(i)], \\ v_k \in V_s, s \in [1, K] \end{cases} \right\} ,$$

где $v_k, k \in [1, n]$ — вершины исходного графа. Другими словами $p_{i_j s}$ — это множество вершин ориентированного графа, каждая из которых одновременно входит в последовательность рассматриваемого подпути и является вершиной некоторого порожденного сильно связного подграфа. Тогда искомое решение влечет такое разбиение каждого пути, что

$$\forall p_{i_j} \exists \vec{G}_s : p_{i_j s} = p_{i_j}, i = [1, m], j = [1, n(i)], s \in [1, K] .$$

Количество $(k(i) - 1)$ дуг в последовательности вида (4.41) определено для каждого пути $p_i, i = [1, m]$, и по-прежнему характеризует длину этого пути, а количество $n(i)$ подпутей в разбиении вида (4.43) — сложность этого разбиения. Кроме того, для каждого подпути $p_{i_j}, i = [1, m], j = [1, n(i)]$, определен номер $n(i_j), n(i_j) \in [1, K]$, порожденного сильно связного подграфа, в котором целиком содержится этот подпуть. Таким образом для заданных ориентированного графа $\vec{G} = (V, E)$, набора $\vec{G}_s, s = [1, K]$, и множества путей (4.42) любое разбиение вида (4.43) определяется следующими характеристиками:

1. $(k(i) - 1)$ — количество дуг в пути $p_i, i = [1, m]$, то есть $k(i) \in [1, n - 1]$,

2. $n(i)$ — количество подпутей p_{i_j} в разбиении вида (4.43), то есть $n(i) \in [1, k(i)]$,
3. $n(i_j)$ — номер порожденного сильно связного подграфа $\vec{G}_s, s \in [1, K]$, в котором целиком лежит подпуть p_{i_j} , то есть $n(i_j) \in [1, K]$.

Поясним понятие разбиения пути на подпути меньшей длины вида (4.43) и характеристик 1–3 этого разбиения на простом примере ориентированного графа.

Пример 4.3. Пусть заданы (Рис. 5) ориентированный граф $\vec{G} = (V, E)$, набор порожденных сильно связных подграфов $\vec{G}_s, s \in [1, 3]$, и множество путей

$$\mathbb{P} = \left\{ p_1 = (v_1, v_2, v_4, v_6, v_3) , p_2 = (v_1, v_4, v_5) , \right. \\ \left. p_3 = (v_3, v_6, v_4, v_2, v_1) , p_4 = (v_5, v_4, v_2, v_1) \right\} .$$

Для каждого пути $p_i \in \mathbb{P}, i = [1, 4]$ построим разбиение на подпути меньшей длины вида (4.43):

$$p_1 = (p_{1_1} = (v_1, v_2, v_4) , p_{1_2} = (v_4, v_6, v_3)) , \quad (4.44)$$

$$p_2 = (p_{2_1} = (v_1, v_4) , p_{2_2} = (v_4, v_5)) , \quad (4.45)$$

$$p_3 = (p_{3_1} = (v_3, v_6, v_4) , p_{3_2} = (v_4, v_2, v_1)) , \quad (4.46)$$

$$p_4 = (p_{4_1} = (v_5, v_4) , p_{4_2} = (v_4, v_2, v_1)) . \quad (4.47)$$

По построению (4.44)–(4.47) имеем:

$$p_{1_1 1} = p_{1_1} \cap \vec{G}_1 = p_{1_1} , p_{1_2 3} = p_{1_2} \cap \vec{G}_3 = p_{1_2} ,$$

$$p_{2_1 1} = p_{2_1} \cap \vec{G}_1 = p_{2_1} , p_{2_2 2} = p_{2_2} \cap \vec{G}_2 = p_{2_2} ,$$

$$p_{3_1 3} = p_{3_1} \cap \vec{G}_3 = p_{3_1} , p_{3_2 1} = p_{3_2} \cap \vec{G}_1 = p_{3_2} ,$$

$$p_{4_1 2} = p_{4_1} \cap \vec{G}_2 = p_{4_1} , p_{4_2 1} = p_{4_2} \cap \vec{G}_1 = p_{4_2} .$$

Таким образом, для каждого подпути $p_{i_j}, i = [1, 4], j = [1, n(i)]$, существует порожденный сильно связный подграф $\vec{G}_s, s \in [1, 3]$, такой, что подпуть целиком лежит в подграфе.

Определим характеристики 1–3 разбиений (4.44)–(4.47):

$$k(1) = 4, n(1) = 2, n(1_1) = 1, n(1_2) = 3, \quad (4.48)$$

$$k(2) = 2, n(2) = 2, n(2_1) = 1, n(2_2) = 2, \quad (4.49)$$

$$k(3) = 4, n(3) = 2, n(3_1) = 3, n(3_2) = 1, \quad (4.50)$$

$$k(4) = 3, n(4) = 2, n(4_1) = 2, n(4_2) = 1. \quad (4.51)$$

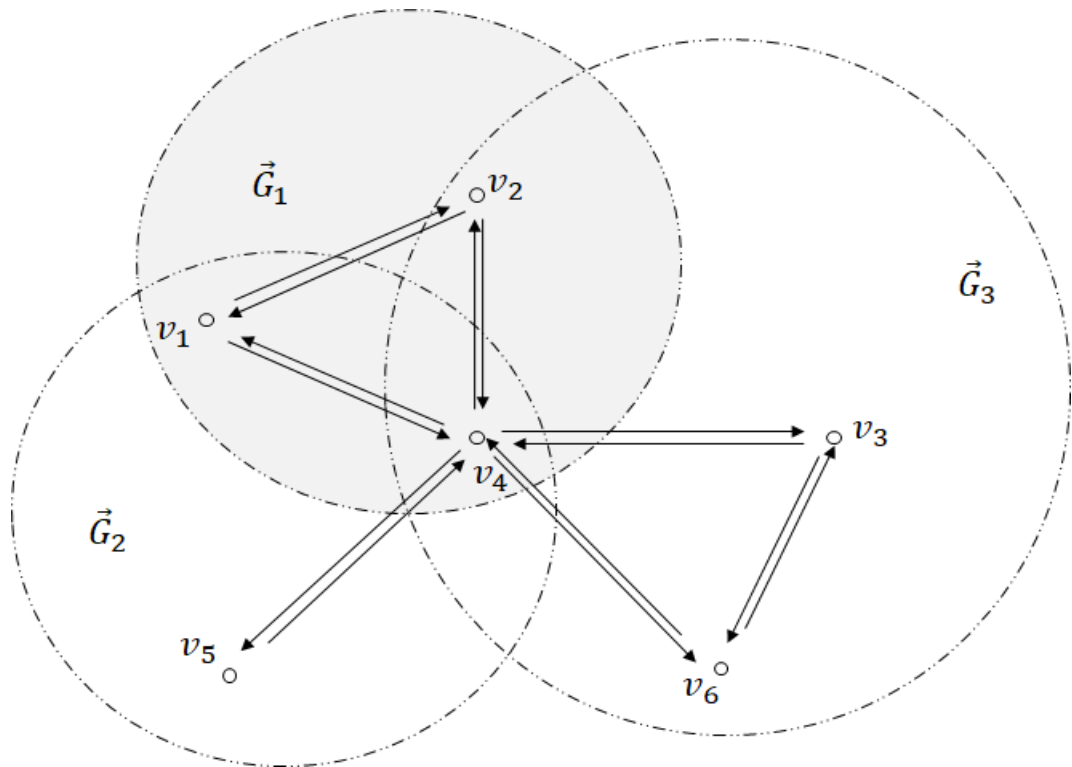


Рис. 5 Ориентированный граф

Введем в рассмотрение положительную функцию $t(\cdot)$, определенную на множестве дуг ориентированного графа $\vec{G} = (V, E)$, значение которой для каждой дуги можно понимать как затраты некоторого ресурса для прохождения по этой дуге (например, временного). Для любого пути p_i из множества \mathbb{P} определим $t(p_i)$ следующим образом:

$$t(p_i) \triangleq \sum_{e \in p_i} t(e).$$

Далее, не уменьшая общности и для большей наглядности, положим

$$t(e) \triangleq 1 \text{ для всех } e \in E.$$

Тогда для любого пути p_i из множества \mathbb{P} значение функции $t(\cdot)$ будет соответствовать количеству дуг в этом пути, то есть — его длине:

$$t(p_i) \triangleq \sum_{e \in p_i} t(e) = k(i) - 1 \text{ для всех } i = [1, m].$$

Определение 4.9. *Декомпозицией множества ориентированных путей $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, m]\}$ называется набор разбиений вида (4.43), построенных для каждого пути из этого множества.*

Обозначим через \mathbb{D} множество всех возможных декомпозиций заданного множества путей. Заметим, что для каждой декомпозиции из \mathbb{D} и для каждого подпути в разбиении фиксирован конкретный сильно связный подграф, содержащий этот подпуть. Это важно подчеркнуть потому, что подпуть может содержаться более, чем в одном сильно связном подграфе. Таким образом, каждая декомпозиция представляет собой некоторое разбиение всех путей $p_i \in \mathbb{P}, i = [1, m]$. Тогда сложность декомпозиции есть суммарная сложность всех разбиений в условиях этой декомпозиции:

$$c(D) \triangleq \sum_{i=1}^m n(i), D \in \mathbb{D}.$$

Поясним вышеприведенное понятие сложности декомпозиции на ранее рассмотренном примере ориентированного графа.

Пример 4.4. *Набор разбиений (4.44)–(4.47) определяет некоторую декомпозицию D_1 заданного множества путей $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, 4]\}$. Сложность декомпозиции D_1 по определению и с учетом (4.48)–(4.51):*

$$c(D_1) = \sum_i n(i) = 8. \quad (4.52)$$

Другая декомпозиция D_2 того же множества путей $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, 4]\}$ может, например, иметь вид:

$$p_1 = (p_{1_1} = (v_1, v_2), p_{1_2} = (v_2, v_4, v_6, v_3)), \quad (4.53)$$

$$p_2 = (p_{2_1} = (v_1, v_4, v_5)), \quad (4.54)$$

$$p_3 = (p_{3_1} = (v_3, v_6, v_4, v_2), p_{3_2} = (v_2, v_1)), \quad (4.55)$$

$$p_4 = (p_{4_1} = (v_5, v_4) , p_{4_2} = (v_4, v_2) , p_{4_3} = (v_2, v_1)) . \quad (4.56)$$

Определим характеристики разбиений (4.53)–(4.56) (разбиения путей из \mathbb{P} в условиях декомпозиции D_2):

$$k(1) = 5 , n(1) = 2 , n(1_1) = 1 , n(1_2) = 3 , t(p_1) = 4 , \quad (4.57)$$

$$k(2) = 3 , n(2) = 1 , n(2_1) = 2 , t(p_2) = 2 , \quad (4.58)$$

$$k(3) = 5 , n(3) = 2 , n(3_1) = 3 , n(3_2) = 1 , t(p_3) = 4 , \quad (4.59)$$

$$k(4) = 4 , n(4) = 3 , n(4_1) = 2 , n(4_2) = 3 , n(4_3) = 1 , t(p_4) = 3 . \quad (4.60)$$

Сложность декомпозиции D_2 по определению и с учетом (4.57)–(4.60):

$$c(D_2) = \sum_i n(i) = 9 . \quad (4.61)$$

Рассмотрим понятие равномерности декомпозиции как степени насыщенности каждого сильно связного подграфа в условиях этой декомпозиции.

Определение 4.10. Ресурсом порожденного сильно связного подграфа $\vec{G}_s, s = [1, K]$, называется некоторое число $N_s, s = [1, K]$, заданное для каждого подграфа.

Для каждой декомпозиции $D \in \mathbb{D}$ введем в рассмотрение величину

$$t(\vec{G}_s, D) \triangleq \sum_j \sum_i \{t(p_{i_j}) : n(i_j) = s\} . \quad (4.62)$$

Величина (4.62) определяет количество дуг, лежащих в каждом из подграфов $\vec{G}_s, s = [1, K]$, в условиях рассматриваемой декомпозиции. Другими словами, величина (4.62) — это количество дуг в последовательностях только тех подпутей, которые в условиях рассматриваемой декомпозиции целиком лежат в каждом из порожденных сильно связных подграфов $\vec{G}_s, s = [1, K]$.

Обозначим далее

$$\Delta t(\vec{G}_s, D) = \frac{t(\vec{G}_s, D)}{N_s} , s = [1, K] , D \in \mathbb{D} , \quad (4.63)$$

и пусть для каждой декомпозиции

$$\begin{aligned}\Delta t_{\max}(D) &\triangleq \max_s \left\{ \Delta t(\vec{G}_s, D) \right\}, \\ \Delta t_{\min}(D) &\triangleq \min_s \left\{ \Delta t(\vec{G}_s, D) \right\}.\end{aligned}$$

Для некоторой заданной константы C условие равномерности декомпозиции может быть формализовано следующим образом:

$$\Delta t_{\max}(D) - \Delta t_{\min}(D) \leq C. \quad (4.64)$$

Другими словами, условие (4.64) отражает степень насыщенности каждого порожденного сильно связного подграфа в условиях рассматриваемой декомпозиции множества путей.

Поясним условие равномерности декомпозиции вида (4.64) на рассмотренном ранее примере ориентированного графа.

Пример 4.5. Рассмотрим множество декомпозиций $\mathbb{D} = \{D_1, D_2\}$ множества путей $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, 4]\}$ ориентированного графа $\vec{G} = (V, E)$ из Примера 4.3. Пусть для каждого порожденного сильно связного подграфа $\vec{G}_s, s = [1, 3]$, задан ресурс

$$N_s = \left[\frac{\sum_{i=1}^4 k(i)}{3} \right] = 5, s = [1, 3],$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа, стоящего в скобках.

Определим для ориентированного графа $\vec{G} = (V, E)$ константу C следующим образом:

$$C = \frac{\left(\Delta t_{\max}(D_1) - \Delta t_{\min}(D_1) \right) + \left(\Delta t_{\max}(D_2) - \Delta t_{\min}(D_2) \right)}{2}. \quad (4.65)$$

Исследуем на равномерность декомпозицию D_1 . Из (4.44)–(4.47), (4.48)–(4.51) и с учетом обозначения (4.62) имеем:

$$\begin{aligned} t(\vec{G}_1, D_1) &= t(p_{1_1}) + t(p_{2_1}) + t(p_{3_2}) + t(p_{4_2}) = 7, \\ t(\vec{G}_2, D_1) &= t(p_{2_2}) + t(p_{4_1}) = 2, \\ t(\vec{G}_3, D_1) &= t(p_{1_2}) + t(p_{3_1}) = 4. \end{aligned}$$

Далее, следуя обозначению (4.63), имеем:

$$\Delta t(\vec{G}_1, D_1) = \frac{t(\vec{G}_1, D_1)}{N_1} = \frac{7}{5}, \quad \Delta t(\vec{G}_2, D_1) = \frac{2}{5}, \quad \Delta t(\vec{G}_3, D_1) = \frac{4}{5},$$

и, таким образом, для рассматриваемой декомпозиции D_1 получаем следующее значение

$$\Delta t_{\max}(D_1) - \Delta t_{\min}(D_1) = 1.$$

Рассмотрим декомпозицию $D_2 \in \mathbb{D}$. Аналогично из (4.53)–(4.56), (4.57)–(4.60) и с учетом обозначений (4.62), (4.63) для рассматриваемой декомпозиции $D_2 \in \mathbb{D}$ имеем:

$$\begin{aligned} t(\vec{G}_1, D_2) &= t(\vec{G}_2, D_2) = 3, \quad t(\vec{G}_3, D_2) = 7, \\ \Delta t(\vec{G}_1, D_2) &= \Delta t(\vec{G}_2, D_2) = \frac{3}{5}, \quad \Delta t(\vec{G}_3, D_2) = \frac{7}{5}, \\ \Delta t_{\max}(D_2) - \Delta t_{\min}(D_2) &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Согласно (4.65) определим для ориентированного графа $\vec{G} = (V, E)$ константу $C = 0,9$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \Delta t_{\max}(D_1) - \Delta t_{\min}(D_1) &> C, \\ \Delta t_{\max}(D_2) - \Delta t_{\min}(D_2) &< C, \end{aligned}$$

откуда, согласно (4.64), заключаем, что имеет место неравномерность декомпозиции D_1 и, напротив, равномерность декомпозиции D_2 . Отметим также, что правило (4.65) не является принципиальным и носит исключительно демонстрационный характер. В общем случае приоритетной

следует объявить ту декомпозицию, которая доставляет наименьшее значение разности (4.64).

Рассмотрим множество путей $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, m]\}$ ориентированного графа $\vec{G} = (V, E)$.

Определение 4.11. Пути $p_i, p_j \in \mathbb{P}, i, j \in [1, m]$, называются взаимно обратными, если они содержат одни и те же вершины и каждая дуга $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in E$ пути p_i является обратной (противоположно направленной) к соответствующей дуге $(v_{j_s}, v_{j_{s+1}}) \in E$ пути p_j :

$$p_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k(i)-1}}, v_{i_{k(i)}}),$$

и

$$p_j = (v_{j_1} = v_{i_{k(i)}}, v_{j_2} = v_{i_{k(i)-1}}, \dots, v_{j_{k(j)-1}} = v_{i_2}, v_{j_{k(j)}} = v_{i_1}), \quad (4.66)$$

где $(k(i) - 1), (k(j) - 1) \in [1, (n - 1)]$, характеризуют длины путей p_i, p_j соответственно.

Из определения ясно, что $k(i) = k(j)$ для любых взаимно обратных путей $p_i, p_j \in \mathbb{P}, i, j \in [1, m]$. Пару таких путей будем обозначать через (p_i, p_i^*) , имея ввиду соотношение (4.66) для $p_j = p_i^*$.

В условиях некоторой декомпозиции $D \in \mathbb{D}$ каждый путь $p_i \in \mathbb{P}, i = [1, m]$, представлен в виде последовательности подпутей меньшей длины. Пусть при этом в некотором порожденном сильно связном подграфе $\vec{G}_s, s \in [1, K]$, целиком лежат некоторые подпути $p_{i_j}, i \in [1, m], j \in [1, n(i)]$. Обозначим количество пар различных взаимно обратных подпутей $(p_{i_j}, p_{i_j}^*)$, целиком лежащих в некотором порожденном сильно связном подграфе $\vec{G}_s, s \in [1, K]$, в условиях рассматриваемой декомпозиции через

$$\text{balance}(\vec{G}_s, D) \triangleq \left| \left\{ (p_{i_j}, p_{i_j}^*) : n(i_j) = s, i \in [1, m], j \in [1, n(i)] \right\} \right|.$$

При этом будем считать, что если подпуть целиком лежит в некотором порожденном сильно связном подграфе, то и взаимно обратный с ним подпуть также целиком лежит в этом подграфе.

Определение 4.12. *Балансом декомпозиции $D \in \mathbb{D}$ называется величина*

$$\text{balance}(D) \triangleq \sum_{s=1}^K \text{balance}(\vec{G}_s, D), \quad (4.67)$$

то есть количество пар взаимно обратных подпутей, которые в условиях рассматриваемой декомпозиции целиком лежат в одних и тех же порожденных сильно связных подграфах.

Поясним понятие баланса декомпозиции на рассмотренном ранее примере ориентированного графа.

Пример 4.6. *Рассмотрим декомпозиции D_1, D_2 множества путей $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, 4]\}$ ориентированного графа $\vec{G} = (V, E)$ из Примера 4.3.*

Определим значение $\text{balance}(\vec{G}_s, D_1)$ для каждого подграфа $\vec{G}_s, s = [1, 3]$. В условиях декомпозиции D_1 , согласно (4.48)–(4.51), в подграфе \vec{G}_1 целиком лежат подпути $p_{1_1}, p_{2_1}, p_{3_2}, p_{4_2}$. При этом на «роль» взаимно обратных подпутей могут претендовать только $p_{1_1}, p_{3_2}, p_{4_2}$, поскольку $k(1_1) = k(3_2) = k(4_2) \neq k(2_1)$. В самом деле,

$$p_{1_1} = (v_1, v_2, v_4), \quad p_{3_2} = (v_4, v_2, v_1) = p_{1_1}^*,$$

то есть p_{1_1} и p_{3_2} образуют пару взаимно обратных ориентированных подпутей $(p_{1_1}, p_{1_1}^)$. Таким образом,*

$$\text{balance}(\vec{G}_1, D_1) = |\{(p_{1_1}, p_{3_2} = p_{1_1}^*)\}| = 1.$$

Аналогично для остальных сильно связных подграфов в условиях рассматриваемой декомпозиции получаем

$$\text{balance}(\vec{G}_2, D_1) = |\{(p_{2_2}, p_{4_1} = p_{2_2}^*)\}| = 1,$$

$$\text{balance}(\vec{G}_3, D_1) = |\{(p_{1_2}, p_{3_1} = p_{1_2}^*)\}| = 1.$$

Тогда баланс декомпозиции D_1 определяется из (4.67) и равен

$$\text{balance}(D_1) = \sum_{s=1}^3 \text{balance}(\vec{G}_s, D) = 3.$$

Рассмотрим далее декомпозицию D_2 , определенную в (4.53)–(4.56). Из найденных характеристик (4.57)–(4.60) имеем:

$$\begin{aligned} \text{balance}(\vec{G}_1, D_2) &= |\{(p_{1_1}, p_{3_2} = p_{1_1}^*)\}| = 1, \\ \text{balance}(\vec{G}_2, D_2) &= \text{balance}(\vec{G}_3, D_2) = 0. \end{aligned}$$

Тогда из (4.67) получаем, что $\text{balance}(D_2) = 1$.

Непосредственно из определений понятий сложности, равномерности и баланса декомпозиции множества путей следует утверждение о соотношении этих величин друг с другом и с количественными характеристиками исходного ориентированного графа.

Утверждение 4.2. Пусть задан ориентированный граф $\vec{G} = (V, E)$, в котором $|V| = n$ и для которого заданы множество путей $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, m]\}$ и набор сильно связанных подграфов $\vec{G}_s, s = [1, K]$. Пусть $\mathbb{D} = \{D_j, j = 1, 2, \dots\}$ – множество всех возможных декомпозиций множества \mathbb{P} . Справедливы соотношения:

1. любое разбиение пути p_i из множества \mathbb{P} сохраняет значение функции $t(\cdot)$: $t(p_i) = \sum_{j=1}^{n(i)} t(p_{i_j}), i = [1, m]$;
2. для любого подграфа $\vec{G}_s, s = [1, K]$, в условиях любой декомпозиции $D \in \mathbb{D}$ множества путей \mathbb{P} выполняется: $\sum_{s=1}^K t(\vec{G}_s, D) = \sum_{i=1}^m t(p_i)$;
3. для сложности любой декомпозиции $D \in \mathbb{D}$ множества путей \mathbb{P} выполняется: $c(D) \leq m \cdot (n - 1)$;
4. для баланса любой декомпозиции $D \in \mathbb{D}$ множества путей \mathbb{P} выполняется: $\text{balance}(D) \leq \left\lceil \frac{c(D)}{2} \right\rceil$, где через $\lceil \cdot \rceil$ обозначена целая часть числа.

Доказательство. Доказательство приведенных соотношений очевидным образом следует из соответствующих определений. \square

Задача о декомпозиции заданного множества путей $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, m]\}$ ориентированного графа $\vec{G} = (V, E)$ для заданного набора порожденных сильно связанных подграфов $\vec{G}_s, s = [1, K]$, определенных вместе со своими ресурсами $N_s, s = [1, K]$, может быть формализована как многокритериальная

задача оптимизации. При этом требуется найти такую декомпозицию, для которой выполняются следующие ограничения:

$$\begin{cases} c(D) \longrightarrow \min_j c(D_j) \\ balance(D) \longrightarrow \max_j balance(D_j) , \\ \Delta t_{\max}(D) - \Delta t_{\min}(D) \longrightarrow \min_j (\Delta t_{\max}(D_j) - \Delta t_{\min}(D_j)) , \end{cases} \quad (4.68)$$

где $\{D_j, j = 1, 2, \dots\}$ — все возможные декомпозиции заданного множества путей ориентированного графа.

Для решения задачи (4.68) и, как следствие, для реализации метода параллельной обработки данных с графовой структурой такого типа, оказывается эффективным эвристический алгоритм последовательной быстрой сортировки строк специальным образом заданной таблицы.

4.3.1. Алгоритм декомпозиции

Здесь будут описаны принципы построения специальной таблицы для заданного множества путей ориентированного графа. Также будут приведены эвристический алгоритм решения графовой задачи, формализованной в предыдущем параграфе, и оценка сложности этого алгоритма. Программная реализация этого алгоритма лежит в основе управляющей программы для реализации методов параллельной обработки данных в вычислительном комплексе.

Пусть l — максимальное количество вершин в путях из заданного множества путей $p_i \in \mathbb{P}, i = [1, m]$:

$$l = \max_i k(i) , i = [1, m] .$$

Для каждого пути определим множество минимальных по включению наборов подграфов таких, что путь p_i целиком лежит в объединении подграфов из каждого набора:

$$\vec{G}(p_i) = \left\{ \left\{ \vec{G}_s, s \in [1, K]: p_i \cap \bigcup_s \vec{G}_s = p_i \right\} \right\} , i = [1, m] . \quad (4.69)$$

Минимальность по включению здесь означает несократимость поднабора — исключение любого подграфа влечет непринадлежность пути объединению оставшихся в наборе подграфов.

Построим наборы вида (4.69) для путей ориентированного графа из примера, рассмотренного в предыдущем разделе.

Пример 4.7. Рассмотрим множество путей $\mathbb{P} = \{p_i: i = [1, 4]\}$ и набор порожденных сильно связных подграфов $\vec{G}_s, s = [1, 3]$. Определим множества вида (4.69) для каждого пути:

$$\begin{aligned} \vec{G}(p_1) &= \left\{ \left\{ \vec{G}_1, \vec{G}_3 \right\} \right\}, \quad \vec{G}(p_2) = \left\{ \left\{ \vec{G}_2 \right\} \right\}, \\ \vec{G}(p_3) &= \left\{ \left\{ \vec{G}_3, \vec{G}_1 \right\} \right\}, \quad \vec{G}(p_4) = \left\{ \left\{ \vec{G}_2, \vec{G}_1 \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Заметим, что, например, набор $\left\{ \vec{G}_2, \vec{G}_1 \right\}$ для пути p_2 не является минимальным по включению, поскольку исключение подграфа \vec{G}_1 из этого набора сохраняет принадлежность пути подграфу \vec{G}_2 .

Построим таблицу, состоящую из m подтаблиц. Каждая такая подтаблица соответствует всем возможным минимальным по включению разбиениям пути $p_i, i = [1, m]$. Рассмотрим подтаблицу для некоторого пути $p_i, i \in [1, m]$. В этой подтаблице (обозначим ее через $M(p_i)$) имеется $(2l - 1 + K)$ столбцов. При этом первые $(2l - 1)$ столбцов соответствуют номерам вершин в пути p_i , заданным вместе с номерами подграфов, в которые попадают эти вершины при фиксированном разбиении. В последующих K столбцах меткой «1» отмечены подграфы из $\vec{G}(p_i)$ и меткой «0» — все остальные подграфы. Таким образом, число строк подтаблицы $M(p_i)$ соответствует количеству поднаборов в наборе вида (4.69) для пути p_i . Если для некоторого пути $p_j, j \in [1, m]$, количество вершин в пути меньше, чем l , то есть $k(j) < l$, то номера вершин по-прежнему записываются последовательно в строках подтаблицы вместе с номерами соответствующих подграфов, а оставшиеся столбцы заполняются метками «0». Тогда строки подтаблицы $M(p_j)$ примут вид

$$v_1(j) s_1(j) v_2(j) s_2(j) \dots v_{k(j)}(j) 0 \dots 0 x_1(j) \dots x_K(j),$$

где $s_k(\cdot) \in [1, K], x_k \in \{0, 1\}$, то есть количество столбцов остается равным $(2l - 1 + K)$ для любого пути.

Поясним процедуру построения вышеописанной таблицы на примере ориентированного графа, рассмотренного ранее.

Пример 4.8. Построим подтаблицы $M(p_i)$ для всех путей из $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, 4]\}$ из Примера 4.3. Определим количество столбцов для каждой такой подтаблицы:

$$l = \max_i k(i) = 5 .$$

Значит, с учетом заданного набора сильно связанных подграфов $\vec{G}_s, s = [1, 3]$, каждая подтаблица имеет 12 столбцов. Согласно (4.70) имеем:

Таблица 3. Таблица путей

	v_1	s_1	v_2	s_2	v_3	s_3	v_4	s_4	v_5	\bar{G}_1	\bar{G}_2	\bar{G}_3
$M(p_1)$	1	1	2	3	4	3	6	3	3	1	0	1
	1	1	2	1	4	3	6	3	3	1	0	1
$M(p_2)$	1	2	4	2	5	0	0	0	0	0	1	0
$M(p_3)$	3	3	6	3	4	3	2	1	1	1	0	1
	3	3	6	3	4	1	2	1	1	1	0	1
$M(p_4)$	5	2	4	1	2	1	1	0	0	1	1	0

Таким образом, каждая строка i -й подтаблицы соответствует некоторому минимальному по включению разбиению пути $p_i, i = [1, 4]$.

Таблицу, полученную объединением подтаблиц $M(p_i), i = [1, m]$, обозначим через $M(\mathbb{P})$. Заведем столбец p , в котором будем хранить информацию о номере соответствующей подтаблицы. То есть в столбце p матрицы $M(\mathbb{P})$ будут одинаковые значения $i \in [1, m]$ для строк, соответствующих возможным разбиениям пути $p_i, i \in [1, m]$.

Рассмотрим строку i -й подтаблицы таблицы $M(\mathbb{P})$. Она по построению имеет вид

$$v_1(i) \ s_1(i) \ v_2(i) \ s_2(i) \ \dots \ s_{l-1}(i) \ v_l(i) \ x_1(i) \ \dots \ x_K(i) ,$$

где $v_k(i) \in [1, n] \cup \{0\}$, $s_k(i) \in [1, K] \cup \{0\}$, $x_k(i) \in \{0, 1\}$. Определим условие инвертируемости строк следующим образом: если для строки i -й подтаблицы выполняется

$$v_{k(i)}(i) < v_1(i) , \tag{4.71}$$

включая случаи $k(i) = l$ и $k(i) < l$, то строки i -й подтаблицы инвертируемы. Заведем столбец Ind для таблицы $M(\mathbb{P})$ и присвоим метку «1» в этом столбце для инвертируемых строк и метку «0» — для не инвертируемых. При этом саму строку с меткой «1» в столбце Ind перепишем в виде

$$\begin{cases} i \ 1 \ v_{k(i)}(i) \ s_{k(i)-1}(i) \ \dots \ v_2(i) \ s_1(i) \ v_1(i) \ 0 \ \dots \ 0 \ x_1(i) \ \dots \ x_K(i) , & \text{если } k(i) < l , \\ i \ 1 \ v_l(i) \ s_{l-1}(i) \ \dots \ v_2(i) \ s_1(i) \ v_1(i) \ x_1(i) \ \dots \ x_K(i) , & \text{если } k(i) = l . \end{cases} \quad (4.72)$$

Факт инвертируемости строк i -й подтаблицы свидетельствует о том, что для некоторых подпутей в разбиении пути $p_i, i \in [1, m]$, могут быть найдены взаимно обратные.

Поясним условие инвертируемости строк вида (4.72) на примере таблицы, построенной ранее.

Пример 4.9. Рассмотрим подтаблицы $M(p_i), i = [1, 4]$, из Примера 4.8. Объединяя эти подтаблицы, получим таблицу $M(\mathbb{P})$, для которой заведем столбцы p и Ind . Исследуем на инвертируемость строки каждой подтаблицы $M(p_i)$.

Для подтаблицы $M(p_1) k(1) = l$, причем условие (4.71) не выполняется. Значит, строки подтаблицы $M(p_1)$, которые соответствуют всем возможным минимальным по включению разбиениям пути p_1 , не инвертируемы. Рассуждая аналогично и следуя (4.72), получаем результаты, представленные ниже.

Таблица 4. Инвертируемость строк

p	Ind	v_1	s_1	v_2	s_2	v_3	s_3	v_4	s_4	v_5	\bar{g}_1	\bar{g}_2	\bar{g}_3
1	0	1	1	2	3	4	3	6	3	3	1	0	1
1	0	1	1	2	1	4	3	6	3	3	1	0	1
2	0	1	2	4	2	5	0	0	0	0	0	1	0
3	1	1	1	2	3	4	3	6	3	3	1	0	1
3	1	1	1	2	1	4	3	6	3	3	1	0	1
4	1	1	1	2	1	4	2	5	0	0	1	1	0

Решение задачи о декомпозиции множества путей состоит в том, чтобы из каждой i -й подтаблицы (то есть такой подтаблицы, в которой в столбце p стоят одинаковые значения) выбрать только одну строку. Чтобы хранить информацию о тех подтаблицах, для которых уже выбрана строка, заведем

столбец mk и положим значение «1» для всех строк таблицы. При этом выбор и фиксация (включение в решение) некоторой строки i -й подтаблицы влечет значение «2» в столбце mk для этой строки и значение «0» — для всех остальных строк i -й подтаблицы. Таким образом, выбрав по одной строке для каждой i -й подтаблицы, мы получим набор разбиений для всех путей $p_i, i = [1, m]$, заданных строками таблицы $M(\mathbb{P})$, то есть декомпозицию множества путей $\mathbb{P} = \{p_i : i = [1, m]\}$.

Вернемся к рассмотрению таблицы $M(\mathbb{P})$ в общем виде. Упорядочим строки таблицы $M(\mathbb{P})$ лексикографически относительно $k(i)$ и значений в столбцах Ind, s_k . Тогда строки, соответствующие путям меньшей длины, будут иметь меньший порядковый номер в таблице. Перенумеруем строки от 1 до M и наведем столбцы: c и bal_s, N_s для всех $s = [1, K]$.

В столбце c для каждой строки с номером $nom, nom \in [1, M]$, соответствующей минимальному по включению разбиению некоторого пути, хранится информация о количестве подграфов в поднаборе для этого разбиения:

$$c(nom) \triangleq \sum_{k=1}^K x_k(nom) . \quad (4.73)$$

Рассчитаем далее значения в столбцах $N_s, s = [1, K]$, для всех строк по правилу:

$$N_s(nom) \triangleq \frac{\sum_{k=1}^{l-1} \{s_k(nom) : s_k(nom) = s\}}{s} , \quad (4.74)$$

где $s_k(nom) \in [1, K]$. Другими словами значения в столбцах $N_s, s = [1, K]$, соответствуют количеству дуг в подпутях, попавших в подграф $\vec{G}_s, s \in [1, K]$, при фиксированном разбиении, заданном строкой с номером nom . Наконец, для всех строк таблицы $M(\mathbb{P})$ положим

$$bal_s(nom) \triangleq 0, s = [1, K] , \quad (4.75)$$

где запись $bal_s(nom)$ характеризует значение в столбце bal_s строки с абсолютным номером nom таблицы.

Пусть зафиксирована некоторая строка таблицы вида

$$\begin{aligned} \text{nom } p(\text{nom}) \ 2 \ \text{Ind}(\text{nom}) \ v_1(\text{nom}) \ s_1(\text{nom}) \ \dots \ v_l(\text{nom}) \\ x_1(\text{nom}) \ \dots \ x_K(\text{nom}) \ c(\text{nom}) \ 0 \ \dots \ 0 \ N_1(\text{nom}) \ \dots \ N_K(\text{nom}) \ , \end{aligned}$$

где nom — абсолютный номер строки в таблице. Заметим, что значение $mk(\text{nom}) = 2$ обусловлено фиксацией строки, что влечет также значение «0» в столбце mk для всех строк $\text{nom}_i: p(\text{nom}_i) = p(\text{nom})$. Для каждой строки с номером $\text{nom}_i \neq \text{nom}$ рассчитаем значения в столбцах $bal_s, s = [1, K]$, следующим образом. Если для пары строк выполняется

$$\left\{ \begin{array}{l} mk(\text{nom}_i) = 1 \ , \\ \text{Ind}(\text{nom}) \neq \text{Ind}(\text{nom}_i) \ , \\ v_{k+1}(\text{nom}) = v_{k+1}(\text{nom}_i) \ , \ s_k(\text{nom}) = s_k(\text{nom}_i) \ , \ k = [b_1, b_2]: 1 \leq b_1 \leq b_2 \leq l \ , \\ bal_s(\text{nom}) = 0, s: \exists s_k(\text{nom}_i) = s \ , \end{array} \right.$$

то

$$bal_s(\text{nom}_i) = 1 \ \forall s: \exists s_k(\text{nom}_i) = s \ , \ k \in [b_1, b_2], s \in [1, K] \ . \quad (4.76)$$

Заметим, что ограничение $mk(\text{nom}) = 1$ в этом правиле означает то, что поиск взаимно обратных подпутей для фиксированного разбиения некоторого пути p производится только среди еще незафиксированных строк, то есть среди еще не просмотренных путей.

Продemonстрируем вышеописанную процедуру введения дополнительных столбцов и расчета значений в них согласно (4.73)–(4.76) на примере таблицы, построенной ранее.

Пример 4.10. В таблице $M(\mathbb{P})$ из Примера 4.9 упорядочим строки лексикографически относительно $k(i)$ и значений в столбцах $\text{Ind}, s_k, k = [1, 4]$, и перенумеруем строки упорядоченной таблицы от единицы до M . Имеем:

Таблица 5. Упорядоченная таблица путей

nom	p	Ind	v_1	s_1	v_2	s_2	v_3	s_3	v_4	s_4	v_5	\bar{G}_1	\bar{G}_2	\bar{G}_3
1	2	0	1	2	4	2	5	0	0	0	0	0	1	0
2	4	1	1	1	2	1	4	2	5	0	0	1	1	0
3	1	0	1	1	2	1	4	3	6	3	3	1	0	1
4	1	0	1	1	2	3	4	3	6	3	3	1	0	1
5	3	1	1	1	2	1	4	3	6	3	3	1	0	1
6	3	1	1	1	2	3	4	3	6	3	3	1	0	1

Заведем столбцы mk, c и bal_s, N_s для всех $s = [1, 3]$ и рассчитаем значения в этих столбцах для всех строк, если зафиксирована строка 2. Согласно (4.73)–(4.76) имеем:

Таблица 6. Дополнительные столбцы таблицы

nom	p	mk	Ind	v_1	s_1	v_2	s_2	v_3	s_3	v_4	s_4	v_5	\bar{G}_1	\bar{G}_2	\bar{G}_3	c	bal_1	bal_2	bal_3	N_1	N_2	N_3
1	2	1	0	1	2	4	2	5	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2	0
2	4	2	1	1	1	2	1	4	2	5	0	0	1	1	0	2	0	0	0	2	1	0
3	1	1	0	1	1	2	1	4	3	6	3	3	1	0	1	2	1	0	0	2	0	2
4	1	1	0	1	1	2	3	4	3	6	3	3	1	0	1	2	1	0	0	1	0	3
5	3	1	1	1	1	2	1	4	3	6	3	3	1	0	1	2	0	0	0	2	0	2
6	3	1	1	1	1	2	3	4	3	6	3	3	1	0	1	2	0	0	0	1	0	3

В терминах путей значение «1» в столбце bal_s для некоторого $s \in [1, K]$ означает, что в пути, заданном рассматриваемой строкой, существует подпуть, взаимно обратный с некоторым подпутем в пути, заданном зафиксированной строкой. Причем эти взаимно обратные подпути при фиксированных разбиениях целиком лежат в подграфе с номером s . В рамках рассмотренного примера — в путях 4 (зафиксированная строка) и 1 (рассчитанные строки 4 и 5) есть взаимно обратные подпути, которые целиком лежат в подграфе \vec{G}_1 .

Заведем в таблице $M(\mathbb{P})$ столбец bal_Σ , в котором будем хранить суммарное значение в столбцах $bal_s, s = [1, K]$, для каждой строки таблицы. Положим

$$bal_\Sigma(nom) \triangleq \sum_{s=1}^K bal_s(nom),$$

где $bal_s(nom)$ по-прежнему соответствует значению в столбце $bal_s, s \in [1, K]$, для строки с номером $nom, nom \in [1, M]$.

Следующий эвристический алгоритм реализует принципы последовательной быстрой сортировки. Для P' — множества уже отобранных строк — в качестве критериев отбора служат столбцы c , bal_Σ и значение

$$N_\Sigma(D) \triangleq \max_s \sum_{nom \in P'} N_s(nom) - \min_s \sum_{nom \in P'} N_s(nom) .$$

При этом значения в столбце c вычисляются один раз перед началом работы и не зависят от того, сколько и какие строки будут отобраны в декомпозицию. Значения остальных элементов, напротив, зависят от выбранных в декомпозицию строк и вычисляются следующим образом. Для каждой строки со значением «0» в столбце mk считаются значения в столбце bal_Σ и значение $N_\Sigma(D)$ в условиях текущей декомпозиции (она состоит из уже выбранных строк и каждой из оставшихся, выступающих в качестве потенциальных строк набора). В начале алгоритма $P' = \emptyset$. Таким образом, после каждой выбранной в декомпозицию строки таблицы $M(\mathbb{P})$ значение в столбце bal_Σ и значение $N_\Sigma(D)$ пересчитываются для всех строк, в которых индикатор подтаблицы (то есть значение в столбце mk) не равен «0».

Алгоритм \mathcal{A}_1

1. Пусть для заданного множества путей \mathbb{P} и графа сети $\vec{G} = (V, E)$ построена вышеописанная таблица $M(\mathbb{P})$.
2. Если в столбце mk есть ненулевой элемент, то строки таблицы $M(\mathbb{P})$ сортируются последовательно:
 - (a) по убыванию значений в столбце mk ,
 - (b) по возрастанию значений в столбце c ,
 - (c) по убыванию значений в столбце bal_Σ ,
 - (d) по возрастанию значений $N_\Sigma(D)$.
 иначе идти к п. 5).
3. Верхняя строка таблицы $M(\mathbb{P})$ после произведенной сортировки в п. 2) включается в декомпозицию, то есть элементу в столбце mk этой строки присваивается значение «2».
4. присвоить значение «0» в столбце mk для всех строк с номерами nom , таких, что значения в столбцах p для вновь выбранной строки и строки, выбранной на предыдущем шаге, совпадают. Другими словами —

объявить «просмотренными» все строки подтаблиц, для которых уже выбраны ровно по одной строке.

5. Конец алгоритма. Построенная декомпозиция определяется строками, для которых значения в столбце mk равны «2».

Так как по самому построению алгоритма гарантировано, что из каждой подтаблицы будет выбрана одна и только одна строка и каждая такая строка однозначно задает разбиение соответствующего пути p на множестве сильно связных подграфов $\vec{G}_s, s = [1, K]$, то по окончании алгоритма будет построена декомпозиция множества путей. Таким образом, выбранные m строк таблицы $M(\mathbb{P})$ определяют декомпозиции множества $\mathbb{P} = \{p_i : i = [1, m]\}$. Восстановим из выбранных строк характеристики соответствующей декомпозиции.

Пусть выбран набор строк $d = \{nom_i, i = [1, m]\}$. Характеристики соответствующей декомпозиции $D \in \mathbb{D}$ определяются по построению следующим образом:

$$c(D) = \sum_{nom_i \in d} c(nom_i) ,$$

$$balance(D) = \frac{\sum_{s=1}^K \sum_{nom_i \in d} bal_s(nom_i)}{2} , \quad (4.77)$$

$$\Delta t_{\max}(D) - \Delta t_{\min}(D) = \max_s \sum_{nom_i \in d} N_s(nom_i) - \min_s \sum_{nom_i \in d} N_s(nom_i) .$$

Из принципов построения таблицы $M(\mathbb{P})$ следует, что из выбранных строк непосредственно восстанавливается набор разбиений для всех путей из заданного множества. При этом, если значение в столбце Ind для некоторой строки nom равно «1», то строка инвертирована и должна быть восстановлена, начиная со значений в столбце $v_{k(i)}$, где $i = p(nom)$.

Поясним Алгоритм \mathcal{A}_1 и вышеописанную процедуру восстановления декомпозиции на примере матрицы, построенной ранее.

Пример 4.11. Пусть для ориентированного графа из Примера 4.3 заданы множество путей и набор сильно связных подграфов из Примера 4.3, и пусть построена упорядоченная таблица $M(\mathbb{P})$ из Примера 4.10, для которой рассчитаны значения в столбцах $Ind, c, bal_s, bal_\Sigma, N_s$ для всех $s = [1, 3]$.

Результат работы Алгоритма \mathcal{A}_1 для этой таблицы в порядке включения строк в набор: $d = \{1, 2, 3, 5\}$. При этом сами строки имеют вид:

Таблица 7. Сортировка строк таблицы путей

nom	p	mk	Ind	v_1	s_1	v_2	s_2	v_3	s_3	v_4	s_4	v_5	\bar{G}_1	\bar{G}_2	\bar{G}_3	c	bal ₁	bal ₂	bal ₃	bal _Σ	N_1	N_2	N_3
1	2	2	0	1	2	4	2	5	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2	0
2	4	2	1	1	1	2	1	4	2	5	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	2	1	0
3	1	2	0	1	1	2	1	4	3	6	3	3	1	0	1	2	1	0	1	2	2	0	2
4	1	0	0	1	1	2	3	4	3	6	3	3	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	3
5	3	2	1	1	1	2	1	4	3	6	3	3	1	0	1	2	0	0	1	1	2	0	2
6	3	0	1	1	1	2	3	4	3	6	3	3	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	3

Таким образом, по построению таблицы имеем следующий набор разбиений для путей:

$$p_1 = (p_{1_1} = (v_1, v_2, v_4), p_{1_2} = (v_4, v_6, v_3)) , p_2 = (p_{2_1} = (v_1, v_4, v_5)) ,$$

$$p_3 = (p_{3_1} = (v_3, v_6, v_4), (v_4, v_2, v_1)) , p_4 = (p_{4_1} = (v_5, v_4), p_{4_2} = (v_4, v_2)) .$$

И, следуя (4.77), получаем характеристики найденной декомпозиции:

$$c(D) = 7 , balance(D) = 2 , \Delta t_{max}(D) - \Delta t_{min}(D) = 3 .$$

Сравнивая полученные результаты с результатами, представленными в Примерах 4.4–4.6 (в Примере 4.5 условие нормировки по $N_s, s = [1, 3]$, не принимается во внимание), можно заключить, что декомпозиция множества путей, найденная посредством Алгоритма \mathcal{A}_1 , имеет наименьшую сложность, что, согласно (4.68), является приоритетным ограничением.

Важной особенностью Алгоритма \mathcal{A}_1 выступает его сложность. Полный перебор всех декомпозиций при заданных n — количество вершин в графе $\vec{G} = (V, E)$, m — количество путей и K — количество сильно связанных подграфов, в экстремальном случае требует $\mathcal{O}(m \cdot K^{mn})$ итераций. При тех же размерах исходных данных исследуем сложность предложенного алгоритма. Построение таблицы $M(\mathbb{P})$ для заданного множества путей включает поиск всех минимальных по включению разбиений для каждого пути. Жадный поиск в этом случае влечет $\mathcal{O}\left(\frac{n}{K}\right)$ способов размещения

каждой вершины пути по подграфам. Тогда таблица $M(\mathbb{P})$ содержит $\mathcal{O}\left(m\left(\frac{n}{K}\right)^n\right)$ строк, что требует $\mathcal{O}\left(m\left(\frac{n}{K}\right)^n \log\left(m\left(\frac{n}{K}\right)^n\right)\right)$ итераций быстрой сортировки. Таким образом, реализация Алгоритма \mathcal{A}_1 существенно сокращает время поиска решения. Кроме того, эвристические критерии сортировки в Алгоритме \mathcal{A}_1 мотивированы практическими соображениями: выбор строк с наименьшим значением в столбце c и наибольшим значением в столбце bal_Σ соответствует критериям минимизации сложности и максимизации баланса искомой декомпозиции. В этой связи можно ожидать незначительное снижение качества решения в части оптимальности.

Представление данных в виде множества путей сильно связанного графа и последующая декомпозиция этого множества на множестве заданных сильно связанных подграфов определяет метод параллельной обработки данных такого типа. Как уже отмечалось, и как будет показано в следующей главе, такой подход оказывается эффективным в приложении к решению задачи организации грузовых железнодорожных перевозок на этапе назначения и перемещения локомотивов. С точки зрения практической реализации этого метода, сильно связанные подграфы находятся в соответствии с параллельно включенными процессорами в вычислительном комплексе. Тогда, с помощью управляющей программы, на каждый процессор передается соответствующий набор путей графа для последующей обработки посредством некоторого алгоритма (или нескольких алгоритмов). При этом для каждого процессора, и, следовательно, для каждого из идентичных алгоритмов, реализуемых на этих процессорах, размер входных данных существенно сокращается по сравнению с исходной задачей.

Выводы по Главе 4

В Главе 4 были разработаны численные методы решения ряда задач анализа несовместных систем условий. Эти методы определяют компоненту «Алгоритмы» математического обеспечения вычислительного комплекса и ориентированы на решение формализованных в Главе 1 задач выделения всех МСП и МНП системы, а также на решение связанных с ними задач распознавания образов в геометрической постановке и расшифровки монотонных булевых функций.

Выводы по Главе 4.

1. Установлена взаимосвязь цикла нечетной длины в графе МСП и комитета минимальной мощности несовместной системы линейных неравенств. Таким образом, классическая задача распознавания образов в геометрической постановке может быть решена графовыми методами с последующим представлением решения в терминах комитетов.

2. Введен дополнительный критерий оптимальности комитетной конструкции — мощность альтернативного покрытия. Показано, что в случае существования различных, но равномогных, комитетов, приоритетным является тот из них, соответствующее альтернативное покрытие которого имеет меньшую мощность.

3. Разработаны полиномиальные эвристические алгоритмы дихотомии для решения многоклассовой задачи распознавания образов в геометрической постановке на этапе разделения обучающей выборки. Эффективность разработанных алгоритмов показана в сравнении с алгоритмами полного перебора всех возможных решений и подтверждается результатами вычислительных экспериментов для случайных наборов векторов с подробным описанием генератора случайности.

4. Разработаны точные и приближенные комбинаторные и комбинаторно-графовые алгоритмы выделения всех МСП системы линейных неравенств с использованием симплекс-метода линейного программирования. При этом разработка приближенных алгоритмов приобретает особую актуальность, ввиду того, что с практической точки зрения часто оказывается достаточным выделение только некоторого связного подграфа графа МСП, содержащего цикл нечетной длины.

5. Введен новый естественный критерий оптимальности расшифровки монотонной булевой функции (МБФ), нормированный на общее количество верхних нулей и нижних единиц МБФ. Для МБФ, порождаемых несовместными системам линейных неравенств, построен оптимальный алгоритм по этому критерию с применением симплекс-метода в качестве оракула.

6. Разработан полиномиальный эвристический алгоритм расшифровки МБФ, порождаемых неориентированными графами, с абсолютной оценкой точности приближенного решения. Показана взаимосвязь задачи расшифровки МБФ и классической задачи комбинаторной оптимизации о наибольшем

независимом множестве. В этой связи адекватным инструментом тестирования разработанного алгоритма выступили известные графы библиотеки DIMACS, для которых показана эффективность разработанного алгоритма в сравнении с известными быстрыми алгоритмами.

5. Прикладные задачи анализа несовместных систем

В этой главе исследуются два класса прикладных задач: управление транспортными процессами в условиях противоречивости и управление технологическими маршрутами на дискретном производстве. Для решения этих задач используется вычислительный комплекс, математическое и программное обеспечение которого разрабатывается в настоящей работе. Здесь также разрабатываются методы параллельной обработки данных, возникающих в таких задачах. Отметим, что программная реализация этих методов лежит в основе разработки управляющих программ вышеупомянутого вычислительного комплекса.

5.1. Задача управления транспортными процессами в условиях противоречивости

В этом разделе исследуется прикладная задача управления транспортными процессами в условиях противоречивости и показано, что для ее решения может быть эффективно использован разрабатываемый вычислительный комплекс.

Исследуемая задача управления транспортными процессами состоит из двух этапов — формирование множества допустимых маршрутов следования поездов и выбор из него плана перевозок с последующим назначением локомотивов для исполнения этого плана. Особенность задачи заключается в том, что в условиях фиксированных ресурсов инфраструктуры и больших объемов перевозок, характерных для железнодорожного транспорта, возникают конфликтные ситуации.

В Параграфе 5.1.1 приводится формулировка задачи планирования грузовых железнодорожных перевозок на этапе формирования множества бесконфликтных наборов нормативных ниток. Здесь под нормативной ниткой понимается потенциальный маршрут следования поездов, а под бесконфликтностью некоторого набора — возможность одновременной и беспрепятственной реализации любой пары нормативных ниток из этого набора. Показано, что эта задача может быть сведена к задаче поиска

всех максимальных совместных подсистем несовместной системы условий. Таким образом, на первом этапе управления транспортными процессами (в рассматриваемом контексте) может быть использован разрабатываемый вычислительный комплекс. В частности, для решения этой задачи в вычислительном комплексе используются программы, реализующие алгоритмы поиска всех МСП, алгоритмы расшифровки МБФ (ввиду соответствия семейства верхних нулей и семейства максимальных совместных подсистем), а также алгоритмы поиска наибольшего независимого множества вершин в неориентированном графе (ввиду соответствия множества верхних нулей и семейства независимых множеств вершин).

В Параграфе 5.1.2 исследуется следующий этап организации грузовых железнодорожных перевозок — этап назначения и перемещения локомотивов. В работах [38,42,43] были разработаны методы математического моделирования и алгоритмы решения этой задачи. В частности были получены нижние оценки для числа локомотивов, необходимого для исполнения заданного плана, а также разработаны эффективные алгоритмы назначения и перемещения локомотивов.

Как уже было отмечено, задача управления транспортными процессами в условиях противоречивости, и, в частности, этап назначения и перемещения локомотивов, характеризуется большой размерностью и высокой комбинаторной сложностью. В этой связи актуальной представляется реализация массивной параллельной обработки данных в вычислительном комплексе для решения исследуемой прикладной задачи. Этой задаче будет посвящен Параграф 5.1.3 настоящего раздела.

5.1.1. Задача планирования грузовых железнодорожных перевозок

В теории управления перевозками грузов естественным образом возникают различные задачи формирования графика движения поездов. Рассмотрим способы формирования набора энергоэффективных нормативных ниток графика движения поездов, на основе которых далее будут формироваться расписания для выполнения плана грузовых перевозок с последующим планированием назначения локомотивов с целью исполнения этих планов.

Пусть имеется линейный участок железной дороги (s_1, \dots, s_n) с начальной станцией s_1 и конечной станцией s_n , для которого выполнены тяговые расчеты.

Для каждого ориентированного перегона (s_i, s_j) , на линейном участке дороги ориентированные перегоны между соседними станциями, т.е. $i, j = [1, n]$, $|i - j| = 1$, заданы:

1. профиль дороги $h_{i,j}$;
2. вес брутто поезда Q , допустимый к перевозке на перегоне;
3. максимальная допустимая скорость $v_{\max}(s_i, s_j)$ движения на ориентированном перегоне (s_i, s_j) ;
4. скорость $\vec{v}_H(s_i, s_j)$ отправления поезда со станции s_i ;
5. скорость $\vec{v}_K(s_i, s_j)$ прибытия поезда на станцию s_j ;
6. время $t_H(s_i, s_j)$ отправления поезда со станции s_i ;
7. время $t_{i,j}$ движения поезда на ориентированном перегоне (s_i, s_j) .

Для каждого ориентированного перегона (s_i, s_j) при заданных 1 – 7 можно выбрать график движения $g_{i,j}(t)$, как функцию расстояния, пройденного от станции s_i , от времени $t \in [t_H(s_i, s_j); t_H(s_i, s_j) + t_{i,j}]$, при этом каждому графику $g_{i,j}(t)$ соответствуют энергозатраты на перевозку $E(g_{i,j}(\cdot))$. Тогда для организации движения на ориентированном перегоне (s_i, s_j) при заданных 1 – 7 будем выбирать график $g_{i,j}(t)$ таким образом, чтобы $E(g_{i,j}(\cdot))$ были минимальны.

В рамках настоящей работы не рассматриваются способы задания $g_{i,j}(t)$ и расчета $E(g_{i,j}(\cdot))$.

Определение 5.1. *Энергоэффективной стратегией движения на ориентированном перегоне (s_i, s_j) называется набор параметров:*

$$\vec{E}(s_i, s_j) = \left(\vec{v}_H(s_i, s_j), \vec{v}_K(s_i, s_j), t_H(s_i, s_j), t_{i,j}, g_{i,j}(\cdot) \right).$$

Для различных $\vec{v}_H(s_i, s_j)$, $\vec{v}_K(s_i, s_j)$, $t_H(s_i, s_j)$ и $t_{i,j}$ имеем различные $g_{i,j}(\cdot)$ и соответствующие $E(g_{i,j}(\cdot))$, тогда

$$\vec{E}^k(s_i, s_j) = \left(\vec{v}_H^k(s_i, s_j), \vec{v}_K^k(s_i, s_j), t_H^k(s_i, s_j), t_{i,j}, g_{i,j}^k(\cdot) \right),$$

где $N_{i,j}$ – количество стратегий движения на ориентированном перегоне (s_i, s_j) и $k = [1, N_{i,j}]$, представляет собой k -ю энергоэффективную стратегию движения на ориентированном перегоне (s_i, s_j) .

Таким образом для каждого ориентированного перегона (s_i, s_j) может быть построено $E(s_i, s_j)$ множество энергоэффективных стратегий движения

$$E(s_i, s_j) = \{ \vec{E}^k(s_i, s_j) \}_1^{N_{i,j}} .$$

На участке (s_1, \dots, s_n) множество $\mathcal{E} = \bigcup_{\substack{i,j=[1,n] \\ |i-j|=1}} E(s_i, s_j)$ энергоэффективных стратегий движения порождает ориентированный мультиграф с $V = \{v_i\}$, $i = [1, n]$, множеством вершин и $E = \{(v_i, v_j)_k\}$, $i = [1, n]$, $k = [1, N_{i,j}]$, множеством ребер:

$$\vec{G} = (V, E),$$

где вершина $v_i \in V$ соответствует станции $s_i \in (s_1, \dots, s_n)$, и дуга $(v_i, v_j)_k \in E$ соответствует энергоэффективной стратегии движения $\vec{E}^k(s_i, s_j) \in E(s_i, s_j)$. Другими словами, k -я дуга, соединяющая соседние вершины v_i и v_j , соответствующие начальной и конечной станциям ориентированного перегона (s_i, s_j) , соответствует k -й энергоэффективной стратегии движения на ориентированном перегоне (s_i, s_j) .

В ориентированном мультиграфе \vec{G} определим допустимые (v_1, v_n) -пути как последовательности дуг графа $(v_i, v_j)_k \in E$ таким образом, чтобы соседние дуги $(v_{i-1}, v_i)_{k_1}$, $k_1 = [1, N_{i-1,i}]$ и $(v_i, v_{i+1})_{k_2}$, $k_2 = [1, N_{i,i+1}]$, следующие друг за другом в допустимом (v_1, v_n) -пути, были совместимы по скорости и времени. Условия совместимости выполнены, если энергоэффективные стратегии движения $\vec{E}^{k_1}(s_{i-1}, s_i)$ и $\vec{E}^{k_2}(s_i, s_{i+1})$, соответствующие дугам $(v_{i-1}, v_i)_{k_1}$ и $(v_i, v_{i+1})_{k_2}$ таковы, что

$$\begin{cases} \vec{v}_H^{k_2}(s_i, s_{i+1}) = \vec{v}_K^{k_1}(s_{i-1}, s_i) , \\ t_H^{k_2}(s_i, s_{i+1}) \geq t_H^{k_1}(s_{i-1}, s_i) + t_{i-1,i} . \end{cases}$$

Аналогично определяются допустимые (v_n, v_1) -пути.

Определение 5.2. *Нормативной ниткой графика движения поезда называется любой допустимый (v_1, v_n) - или (v_n, v_1) -путь. Множество нормативных ниток графика движения поезда будем обозначать \mathcal{N} .*

Здесь график движения поезда на участке (s_1, s_n) суть множество композиций графиков движения на ориентированных перегонах, построенных таким образом, что дуги ориентированного мультиграфа, соответствующие энергоэффективным стратегиям, содержащим в качестве параметров эти графики, образуют допустимые (v_1, v_n) - или (v_n, v_1) -пути.

На множестве \mathcal{N} нормативных ниток графика введем бинарное отношение «конфликтности».

Пусть для каждого ориентированного перегона (s_i, s_j) и нормативной нитки $n \in \mathcal{N}$ однозначно определен номер пути $W(s_i, s_j, n)$, по которому будет осуществляться движение поезда по нитке n на ориентированном перегоне (s_i, s_j) .

Обозначим через d_{\min} некоторое заданное минимальное расстояние, допустимое между поездами при движении на одном и том же ориентированном перегоне.

Определение 5.3. *Две нормативные нитки n_1 и n_2 имеют однонаправленный конфликт на ориентированном перегоне (s_i, s_j) , если $W(s_i, s_j, n_1) = W(s_i, s_j, n_2)$ и они проходят его в одном и том же направлении по стратегиям $\vec{E}_{k_1}(s_i, s_j)$ и $\vec{E}_{k_2}(s_i, s_j)$ соответственно, и существует момент времени t из периода планирования, для которого*

$$\left| g_{i,j}^{k_1}(t) - g_{i,j}^{k_2}(t) \right| \leq d_{\min} .$$

Определение 5.4. *Две нормативные нитки n_1 и n_2 имеют разнонаправленный конфликт на ориентированном перегоне (s_i, s_j) , если $W(s_i, s_j, n_1) = W(s_j, s_i, n_2)$ и одна из ниток проходит его в направлении (s_i, s_j) (для определенности, нитка n_1), а другая в направлении (s_j, s_i) (для определенности, нитка n_2) по стратегиям $\vec{E}_{k_1}(s_i, s_j)$ и $\vec{E}_{k_2}(s_j, s_i)$ соответственно, и существует момент времени t из периода планирования, для которого*

$$\left| g_{i,j}^{k_1}(t) - \left(|s_{i,j}| - g_{j,i}^{k_2}(t) \right) \right| \leq d_{\min} ,$$

где $|s_{i,j}|$ – общая длина пути с номером $W(s_i, s_j, n_1) = W(s_j, s_i, n_2)$ на ориентированном перегоне (s_i, s_j) .

Определение 5.5. Две нормативные нитки n_1 и n_2 называются конфликтными, если существует ориентированный перегон (s_i, s_j) , на котором они имеют однонаправленный или разнонаправленный конфликт.

Определение 5.6. Бинарное отношение конфликтности определяет неориентированный граф конфликтов

$$G = (\mathcal{N}, U),$$

где $\{n_i, n_j\} \in U$, если нормативные нитки n_i и n_j конфликтны.

Определение 5.7. Любое подмножество \mathcal{N}' множества нормативных ниток \mathcal{N} такое, что порожденный подграф графа конфликтов, множеством вершин которого служит $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$, пуст, т.е. не имеет ребер:

$$\langle \mathcal{N}' \rangle_G = (\mathcal{N}', \emptyset),$$

называется совместной системой нормативных ниток или бесконфликтным набором нормативных ниток.

Таким образом, задача формирования множества бесконфликтных наборов нормативных ниток сводится к исследованию соответствующей несовместной системы и поиску всех ее максимальных подсистем. При этом каждый бесконфликтный набор нормативных ниток может служить допустимым расписанием для осуществления перевозок.

Отметим, что для решения задачи планирования грузовых железнодорожных перевозок на этапе формирования множества бесконфликтных наборов нормативных ниток, в вычислительном комплексе реализованы алгоритмы поиска всех МСП, алгоритмы расшифровки МБФ, а также алгоритмы поиска наибольшего независимого множества вершин в неориентированном графе. Ввиду того, что любой бесконфликтный набор нормативных ниток является совместной подсистемой, для формирования всех таких наборов эффективными оказываются разработанные в Главе 4 численные методы решения задач анализа несовместных систем условий.

5.1.2. Задача о назначении и перемещении локомотивов

В этом параграфе будем считать решенной задачу формирования множества бесконфликтных наборов нормативных ниток. Ясно, что каждый поднабор любого бесконфликтного набора может служить допустимым расписанием для организации перевозок.

Рассмотрим ориентированный граф $\vec{\Gamma} = (S, E)$ железнодорожной транспортной сети, где множество вершин $S = \{s_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ — множество станций, и множество дуг $E \subseteq \{(s_i, s_j) : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n\}$ — множество ориентированных перегонов, связывающих соседние станции.

В ориентированном графе сети $\vec{\Gamma} = (S, E)$ любой простой ориентированный путь может быть задан как последовательность вида:

$$p = (s_{i_1}, (s_{i_1}, s_{i_2}), s_{i_2}, \dots, (s_{i_{k-1}}, s_{i_k}), s_{i_k}),$$

где $s_{i_k} \in S$ и $(s_{i_{k-1}}, s_{i_k}) \in E$ для всех $i_k \in \{1, n\}$.

Для решения задач управления грузовыми транспортными процессами для ориентированного графа сети $\vec{\Gamma}$ определяют размеры движения на планируемый период времени в виде матрицы корреспонденций:

$$\mathcal{R} = \left\| r(s_i, s_j) \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $r(s_i, s_j)$ — количество поездов, необходимое к отправке из станции s_i в станцию s_j в планируемый период времени, и план поездоформирования

$$\mathcal{P} = \bigcup_{(s_i, s_j) \in E} p(s_i, s_j),$$

где $p(s_i, s_j)$ — простой ориентированный путь в ориентированном графе сети $\vec{\Gamma}$, допустимый для выполнения перевозки из станции s_i в станцию s_j .

Пусть заданы бесконфликтный набор нормативных ниток графика движения поездов

$$\mathcal{N}(\mathcal{P}) = \{n_i = (s_n(n_i), t_n(n_i), s_k(n_i), t_k(n_i))\}, \quad i = 1, 2, \dots, |\mathcal{N}(\mathcal{P})|,$$

где $s_H(n_i), t_H(n_i)$ — станция начала, время начала движения по нитке n_i , и $s_K(n_i), t_K(n_i)$ — станция окончания, время окончания движения по нитке n_i , упорядоченный лексикографически относительно $t_H(n_i), t_K(n_i)$, каждый элемент которого соответствует некоторому пути из плана поездоформирования \mathcal{P} , и *вариантный график* движения поездов

$$\mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{P}),$$

устроенный таким образом, что для каждого элемента

$$r(s_i, s_j) \in \mathcal{R}: r(s_i, s_j) > 0, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n,$$

существует нормативная нитка

$$n \in \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}): s_H(n) = s_i, s_K(n) = s_j,$$

т. е. для каждой запланированной перевозки из размеров движения \mathcal{R} построена нормативная нитка из бесконфликтного набора $\mathcal{N}(\mathcal{P})$, такая что станция начала и станция окончания движения по нитке (начальная и конечная вершины в последовательности вершин и дуг простого ориентированного пути ориентированного мультиграфа энергоэффективных стратегий движения на ориентированных перегонах ориентированного графа сети) соответствуют начальной и конечной станциям перевозки.

Также введем в рассмотрение матрицу

$$\mathcal{R}^* = \left\| r^*(s_i, s_j) \right\|, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n,$$

такую, что

$$r^*(s_j, s_i) = 0, \text{ если } r(s_i, s_j) = 0, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n.$$

Вариантный график движения поездов

$$\mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}^*) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{P}),$$

устроен таким образом, что для каждого элемента

$$r^*(s_i, s_j) \in \mathcal{R}^* : r^*(s_i, s_j) > 0, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n,$$

существует нормативная нитка

$$n \in \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}^*) : s_n(n) = s_i, s_k(n) = s_j,$$

и любые нормативные нитки

$$n_i \in \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}), i = 1, 2, \dots, |\mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R})|, \text{ и } n_j \in \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}^*), j = 1, 2, \dots, |\mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}^*)|,$$

являются бесконфликтными.

Пусть имеется множество локомотивов

$$\mathcal{L} = \{L_i : i = 1, 2, \dots, l\},$$

заданное начальными условиями доступности локомотивов для назначения:

$$\begin{cases} s_0(L_i) \in S, \\ t_0(L_i) \end{cases}$$

где $s_0(L_i)$ и $t_0(L_i)$ – станция и время, начиная с которого локомотив L_i впервые доступен для назначения. На практике не всегда удастся выполнить заданный план перевозок посредством имеющегося парка локомотивов с заданными начальными условиями. Будем считать, что перевозки, осуществление которых локомотивами имеющегося парка с заданными начальными условиями невозможно, выполняются «фантомным» локомотивом

$$L_0 \in \mathcal{L}.$$

Множество всевозможных перемещений локомотивов по ориентированным перегонам сети:

$$\mathcal{T} = \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \cup \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}^*) = \{n_i = (s_n(n_i), t_n(n_i), s_k(n_i), t_k(n_i))\}, \quad (5.1)$$

где $i = 1, 2, \dots, |\mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \cup \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}^*)|$, упорядочено лексикографически относительно $t_{\text{н}}(\mathbf{n}), t_{\text{к}}(\mathbf{n})$, и является бесконфликтным набором нормативных ниток $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R})$, соответствующих заданиям на перевозку, и нормативных ниток $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}^*)$, соответствующих допустимым перемещениям локомотивов по ориентированным перегонам сети.

Пусть задано действительное число $\Delta > 0$.

Для любого $t \in [T_0, T]$, где T_0, T – время начала, время окончания периода планирования, обозначим:

$$\mathcal{T}(t) = \{ \mathbf{n} : \mathbf{n} \in \mathcal{T}, t_{\text{н}}(\mathbf{n}) \leq t \leq t_{\text{к}}(\mathbf{n}) \}.$$

Отображение $f: \mathcal{T} \rightarrow 2^{\mathcal{L} \cup \{L_0\}}$ будем называть *допустимым*, если

$$|f^{-1}(L_i)(t)| \leq 1, i = 1, 2, \dots, l,$$

и для каждого локомотива $L_i \in f(\mathcal{T})$ соответствующее множество $f^{-1}(L_i) \subseteq \mathcal{T}$ может быть линейно упорядочено

$$f^{-1}(L_i) = \{ \mathbf{n}_{i_1}, \mathbf{n}_{i_2}, \dots, \mathbf{n}_{i_k} \},$$

и для каждого локомотива $L_i \in \mathcal{L}$ и соответствующего множества $f^{-1}(L_i) \subseteq \mathcal{T}$ выполняются условия:

$$\begin{cases} s_{\text{н}}(\mathbf{n}_{i_1}) = s_0(L_i), t_0(L_i) \leq t_{\text{н}}(\mathbf{n}_{i_1}); \\ s_{\text{к}}(\mathbf{n}_{i_1}) = s_{\text{н}}(\mathbf{n}_{i_2}), \dots, s_{\text{к}}(\mathbf{n}_{i_{k-1}}) = s_{\text{н}}(\mathbf{n}_{i_k}); \\ t_{\text{к}}(\mathbf{n}_{i_1}) \leq t_{\text{н}}(\mathbf{n}_{i_2}) + \Delta, \dots, t_{\text{к}}(\mathbf{n}_{i_{k-1}}) \leq t_{\text{н}}(\mathbf{n}_{i_k}) + \Delta, \end{cases}$$

где $i_k = 1, 2, \dots, |f^{-1}(L_i)|$.

Рассмотрим цепочку включений $F \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq F_4$, где

$$F = \left\{ f: \mathcal{T} \rightarrow 2^{\mathcal{L} \cup \{L_0\}} \right\};$$

F_1 – множество допустимых отображений;

$$F_2 = \text{Arg max}_{f \in F_1} |f^{-1}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R})|;$$

$$F_3 = \mathit{Arg} \min_{f \in F_2} |f(\mathcal{T})| ;$$

$$F_4 = \mathit{Arg} \min_{f \in F_3} |f^{-1}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{N}(\mathcal{P}, \mathcal{R}^*)| , \quad (5.2)$$

где под $\mathit{Arg} \min$, $\mathit{Arg} \max$ понимаются множества всех объектов, на которых достигаются минимум, максимум соответствующей функции, в отличие от обозначений $\arg \min$, $\arg \max$, которые традиционно содержат лишь один некоторый объект, обладающий соответствующим свойством.

Задача 5.1. Для заданных \mathcal{T} и множества локомотивов \mathcal{L} с начальными условиями доступности, найти отображение $f \in F_4$.

Как уже было отмечено, для решения Задачи 5.1 в работах [38, 42, 43] были разработаны эффективные алгоритмы назначения и перемещения локомотивов и алгоритм покрытия множества вершин ориентированного графа минимальным числом максимальных по включению путей.

5.1.3. Параллельная обработка данных в задаче о назначении и перемещении локомотивов

В Разделе 4.3 была разработана модель массивно параллельной обработки данных. Основная идея при этом состоит в декомпозиции графовой конструкции на заданном множестве сильно связанных подграфов. В этом параграфе будет показано, что такой подход позволяет существенно снизить комбинаторную размерность и вычислительную сложность исследуемой прикладной задачи.

Вернемся к рассмотрению ориентированного графа железнодорожной транспортной сети $\vec{G} = (S, \mathcal{E})$ и множества локомотивов, доступных для назначения $\mathcal{L} = \{L_i, i = [1, l]\}$.

Пусть для каждого локомотива определена область обслуживания, в пределах которой этот локомотив может быть использован:

$$\mathit{dep}(L_i) = \{s_j, j \in [1, n]\} , i = [1, l] . \quad (5.3)$$

С технической точки зрения областям вида (5.3) соответствуют так называемые плечи обслуживания локомотивов. Множество всех различных плечей

обслуживания упорядочим относительно $s_{i_1} \in dep(L_i), s_{i_1} \in S, i = [1, l]$, и обозначим через $\{dep_s, s = [1, K]\}$.

Определение 5.8. *Образом нормативной нитки называется последовательность вершин графа сети, которые входят в последовательность дуг этой нитки (см. Определение 5.2).*

Рассмотрим множество образов нормативных ниток, упорядоченное лексикографически (аналогично (5.1)):

$$\tilde{N} = \left\{ \tilde{n}_i : \tilde{n}_i = (s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{k(i)}}), s_{i_j} \in S \right\}, \quad (5.4)$$

где количество вершин в образах — $k(i)$ — характеризует длину соответствующей нормативной нитки $n_i, i = [1, m]$.

Установим связь между задачей о декомпозиции множества путей и рассмотренной прикладной задачей:

1. граф сети $\vec{G} = (S, \mathcal{E})$ соответствует исходному ориентированному графу;
2. множество образов нормативных ниток вида (5.4) соответствует заданному множеству путей;
3. множество различных плечей обслуживания $\{dep_s, s = [1, K]\}$ соответствует заданному набору сильно связанных подграфов (заметим, что каждое плечо обслуживания действительно является порожденным сильно связным подграфом графа сети, поскольку не может содержать недостижимых вершин).

Следовательно, с помощью Алгоритма \mathcal{A}_1 множество образов нормативных ниток может быть декомпозировано по плечам обслуживания таким образом, чтобы каждый подобраз в полученном наборе разбиений целиком лежал в некотором плече обслуживания.

Таким образом, Задача 5.1 о назначении и перемещении локомотивов может быть рассмотрена в пределах каждого плеча обслуживания отдельно, что существенно сужает множество нормативных ниток, подлежащих назначению — каждая «новая» нитка, подлежащая назначению, будет представлена подниткой из полученной декомпозиции.

Рассмотрим декомпозицию множества образов нормативных ниток, которая по построению характеризуется свойствами:

- каждый образ разбит на наименьшее количество подобразов — критерий минимизации $c(D)$,
- в каждом плече обслуживания содержится наибольшее число взаимно обратных подобразов — критерий максимизации $balance(D)$,
- все подобразы равномерно распределены по плечам обслуживания — критерий минимизации $\Delta t_{\max}(D) - \Delta t_{\min}(D)$.

Пусть в условиях полученной декомпозиции D в некотором плече обслуживания $dep_s, s \in [1, K]$, целиком лежит набор подобразов. Следуя изложению на странице 4, обозначим:

$$dep_s(D) = \{ \tilde{n}_{i_j} : \tilde{n}_{i_j s} = \tilde{n}_{i_j}, i \in [1, m], j \in [1, n(i)] \}, s = [1, K],$$

где $n(i)$ — количество подобразов в разбиении \tilde{n}_i . При этом для каждого подобраза $\tilde{n}_{i_j} \in dep_s(D)$ может быть восстановлена нормативная поднитка — вершинам в последовательности присваиваются соответствующие время отправления и прибытия. Тогда задача о назначении и перемещении локомотивов для каждого плеча обслуживания состоит в том, чтобы для заданных

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(dep_s) &= \{ L_i : dep(L_i) = dep_s, i \in [1, l] \}, \\ \mathcal{N}(dep) &= \{ n_{i_j} : \tilde{n}_{i_j} \in dep_s(D), i \in [1, m], j \in [1, n(i)] \}, \end{aligned}$$

найти отображение вида (5.2), удовлетворяющее ограничениям на количество исполненных нормативных ниток, количество используемых локомотивов и количество локомотивов, назначенных для исполнения каждой нитки.

В реальных задачах о назначении и перемещении локомотивов предложенный алгоритм декомпозиции имеет особо важное значение для сетей со сложной топологией. Приведем результаты реализации разработанного в Главе 4 алгоритма декомпозиции для сети большой размерности на Московской железной дороге, которая является одной из самых сложных среди всех дорог РЖД.

Пример 5.1. Заданы граф сети $\vec{G} = (S, \mathcal{E})$, множество нормативных ниток $\mathcal{N} = \{ n_i, i = [1, 1215] \}$ и набор плечей обслуживания $\{ dep_s, s = [1, 16] \}$. Для соответствующего множества образов нормативных ниток $\tilde{\mathcal{N}} = \{ \tilde{n}_i, i = [1, 1215] \}$ с помощью алгоритма декомпозиции, следуя соотношениям

1)–3), были получены результаты:

$$c(D) = 1217, \text{balance}(D) = 557, \Delta t_{\max}(D) = 197, \Delta t_{\min}(D) = 12,$$

где показатели для критерия равномерности декомпозиции рассчитаны без учета нормирования по ресурсам сильно связанных подграфов. Заметим также, что в терминах прикладной задачи ресурсы плеч обслуживания задаются не только количеством ориентированных перегонов, целиком лежащих в них, но и временем прохождения этих перегонов.

Таким образом задача о назначении и перемещении локомотивов сводится к решению 16 подзадач для отдельных плеч обслуживания с размерностями 197 и 12 нормативных ниток (в сущности – подниток) для экстремальных случаев. Собственно алгоритмы решения задачи (подзадач) о назначении и перемещении локомотивов, то есть поиск отображения вида (5.2), удовлетворяющего набору ограничений, обсуждаются в работах [38, 42, 43].

Управляющая программа для организации массивно параллельной обработки данных в вычислительном комплексе реализует вышеописанный подход посредством вызова соответствующих программных модулей и компонент. В частности, управляющая программа получает сигнал о завершении алгоритма декомпозиции, передает результат каждой из параллельных программных компонент, и вызывает в этих компонентах программу для назначения и перемещения локомотивов (см. Глава 6).

5.2. Задача управления технологическими маршрутами на дискретном производстве

Многие прикладные задачи, возникающие в различных областях производства, характеризуются большой размерностью и вычислительной сложностью. К таким задачам относится и исследуемая в диссертационной работе задача управления технологическими маршрутами на дискретном производстве. Для решения этой задачи может быть использован разрабатываемый в диссертационной работе вычислительный комплекс. В общем случае вычислительный комплекс предназначен для решения задач

анализа несовместных систем условий. В этом разделе будет показано, как исследуемая прикладная задача управления технологическими маршрутами на дискретном производстве приводит к рассмотрению целого ряда несовместных систем условий.

Рассмотрение задачи управления технологическими маршрутами на дискретном производстве мотивировано ее особой значимостью для целей оптимизации производственных расходов. Так, изготовление бракованной продукции можно остановить раньше, если получение брака было спрогнозировано. Такой подход существенно снижает расходование как временных так и материальных ресурсов. Таким образом, задачу о переназначении технологического маршрута можно рассматривать как задачу о прогнозировании качества продукции, которая будет изготовлена в результате исполнения этого маршрута.

В настоящей работе предлагается подход к исследованию прикладной задачи, основанный на методах теории графов. Технологический маршрут может быть представлен в виде ориентированного пути в графе, вершинами которого являются агрегаты технологических линий. В процессе производственной деятельности происходит процесс непрерывного накопления информации о завершившихся технологических маршрутах, при этом накапливаемая информация имеет все признаки больших данных, а именно:

1. имеет значительные объемы, измеряемые многими терабайтами информации,
2. накопление информации происходит в потоковом режиме с большой скоростью,
3. накапливаемая информация характеризуется большим разнообразием и содержит значения нескольких тысяч и даже десятков тысяч различных параметров.

В результате обработки полученных данных исследование может быть сведено к решению классической задачи распознавания образов в геометрической постановке, когда необходимо построить решающее правило для отнесения входного вектора a_i к одному из m классов.

5.2.1. Общая постановка задачи

Рассмотрим дискретное производство, состоящее из определенного числа технологических переделов, осуществляющихся на соответствующих технологических агрегатах и линиях.

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — совокупность технологических агрегатов, задействованных в производстве.

Под единицей продукции (ЕП) понимается неделимая часть выходной или входной продукции, получаемой на агрегате или технологической линии. В качестве типичных примеров ЕП можно привести сталь, полученную в сталеплавильном агрегате и выпущенную в сталеразливочный ковш; слябы, получаемые после машины непрерывной разливки стали; горячекатаные рулоны, получаемые как конечный результат работы стана горячей прокатки; холоднокатаные рулоны, получаемые как конечный результат работы стана холодной прокатки.

Определение 5.9. Ориентированный граф $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$ с множеством вершин \mathcal{A} и множеством дуг $E \subseteq \mathcal{A}^2$ называется инфраструктурным графом, если $(A_1, A_2) \in E$ тогда и только тогда, когда выходная ЕП агрегата A_1 может служить входной ЕП для агрегата A_2 .

Определение 5.10. Технологической пирамидой $\text{Pir}(\vec{G}, v)$ с корневой вершиной $v, v \in \mathcal{A}$ инфраструктурного графа $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$ называется подграф, порожденный множеством вершин $\{v \cup \vec{G}(v) \cup \vec{G}^2(v) \cup \dots \cup \vec{G}^k(v)\}$ и такой, что любой ориентированный путь графа \vec{G} , начинающийся в вершине v , целиком лежит в этом подграфе.

Здесь через $\vec{G}^k(v)$ обозначено множество всех вершин $v', v' \in \mathcal{A}$, графа \vec{G} таких, что существует простой путь из вершины v в вершину v' длины $(k - 1)$.

Определение 5.11. Вершиной-развилкой инфраструктурного графа (или его технологической пирамиды) называется такая вершина $v \in \mathcal{A}$, что $|G(v)| > 1$.

Определение 5.12. Терминальной вершиной инфраструктурного графа (или его технологической пирамиды) называется вершина, из которой не выходит

ни одной дуги, лежащей в этом графе (или в технологической пирамиде соответственно).

Определение 5.13. Любой ориентированный путь в инфраструктурном графе $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$ вида

$$P_i = (A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{k(i)}}), \text{ где } A_{i_j} \in \mathcal{A} \text{ и } (A_{i_j}, A_{i_{j+1}}) \in E \text{ для всех } A_{i_j}, A_{i_{j+1}} \in P_i,$$

называется технологическим маршрутом (ТМ) рассматриваемого производства.

В определении 1.6 количество дуг инфраструктурного графа, входящих в последовательность ориентированного пути — число $(k(i)-1)$ — характеризует длину соответствующего ТМ P_i . При этом множество всех ТМ $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots\}$ составляет технологическую базу рассматриваемого производства.

Обозначим через $EP = \{ep_i, i = [1, n]\}$ множество всех возможных ЕП рассматриваемого производства.

Пусть каждая ЕП ep_i характеризуется набором параметров $P_i = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{n(i)}}\}$, где $i = [1, n]$ и $n(i) \in [1, K]$ — количество различных параметров для рассматриваемой ЕП.

Определение 5.14. Последовательность

$$AI_i = (A_{i_1}, P_{j_{i_1}}(AI_i), \dots, A_{i_s}, P_{j_{i_s}}(AI_i)),$$

где $P_{j_{i_k}}(AI_i)$ — набор значений параметров для ЕП ep_j в конкретной реализации A_{i_k} ТМ AI_i — называется исполненным технологическим маршрутом (ИТМ).

Пусть $U, U \subset \mathcal{A}$ — множество терминальных вершин некоторой технологической пирамиды $\text{Pir}(\vec{G}, v)$ с корневой вершиной $v, v \in \mathcal{A}$, инфраструктурного графа $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$. Для каждой терминальной вершины $u \in U, u \in \mathcal{A}$, существует некоторая ЕП $ep_i \in EP$, являющаяся выходной ЕП для этой вершины, причем таких ЕП может быть несколько в зависимости от вида ИТМ, в результате которого они были получены.

Определение 5.15. ИТМ называется продуктовым, если ЕП на выходе терминальной вершины A_{i_s} ИТМ AI_i — обозначим эту вершину $\text{term}(AI_i)$ — является одним из видов конечного продукта, поставляемого на рынок.

Для большей наглядности приведем пример, иллюстрирующий понятия инфраструктурного графа, технологических маршрутов, включая продуктовые, технологической пирамиды и различных типов ее вершин.

Пример 5.2. Рассмотрим инфраструктурный граф $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$, представленный на рисунке (Рис. 6).

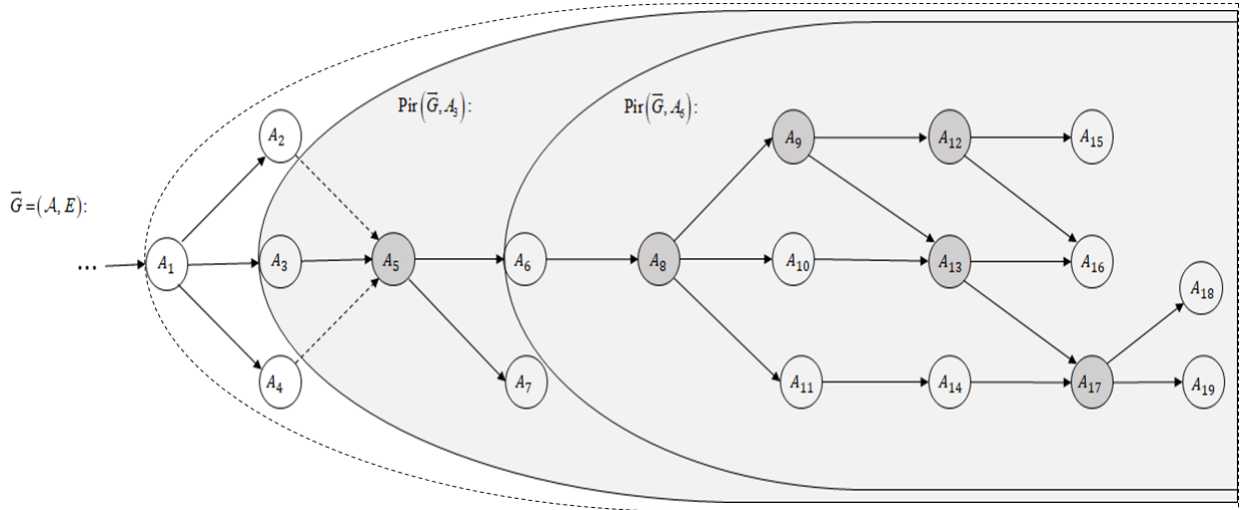


Рис. 6 Инфраструктурный граф и технологические пирамиды

Любой путь графа $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$ с началом, например, в вершине A_3 целиком лежит в подграфе, порожденном набором вершин $\{A_3, \dots, A_{19}\}$. Значит, по определению 1.3, подграф $\text{Pir}(\vec{G}, A_3)$ является технологической пирамидой с корневой вершиной A_3 . Рассуждая аналогично, получаем другую технологическую пирамиду для того же графа — технологическая пирамида $\text{Pir}(\vec{G}, A_6)$ с корневой вершиной A_6 . При этом для вершин $A_5, A_8, A_9, A_{12}, A_{13}$ и A_{17} выполняется условие $|\vec{G}(A_i)| > 1$ и, таким образом, по определению 1.4, вышеперечисленные вершины рассматриваемого инфраструктурного графа являются вершинами-развилками. В свою очередь, из вершин $A_7, A_{13}, A_{16}, A_{18}$ и A_{19} не выходит ни одной дуги. Тогда, по Определению 1.5, эти вершины являются терминальными.

Рассмотрим подробнее некоторый ориентированный путь в графе $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$, например, путь $P_i = (A_1, A_3, A_5, A_6, A_8, A_{10}, A_{13}, A_{16})$. Согласно определению 1.6, путь P_i является ТМ рассматриваемого производства (в данном случае — металлургического). При этом для удобства можно полагать, что ТМ P_i принадлежит технологической пирамиде $\text{Pir}(\vec{G}, A_1)$ с корневой вершиной A_1 .

Пусть некоторая ЕП $ep_j \in EP$ обрабатывается посредством ТМ P_i , то есть проходит через все его реализации $A_{i_k}, i_k = \{1, 3, 5, 6, 8, 10, 13, 16\}$, принимая соответствующие значения параметров $P_{j i_k}$. Тогда, по определению 1.7, получаем ИТМ вида

$$AI_i = \left(A_1, P_{j1}(AI_i), A_3, P_{j3}(AI_i), A_5, P_{j5}(AI_i), A_6, P_{j6}(AI_i), \right. \\ \left. A_8, P_{j8}(AI_i), A_{10}, P_{j10}(AI_i), A_{13}, P_{j13}(AI_i), A_{16}, P_{j16}(AI_i) \right). \quad (5.5)$$

Заметим, что посредством того же ТМ P_i могут обрабатываться любые другие ЕП $ep_s \in EP: ep_s \neq ep_j$. Тогда наборы значений параметров $P_{s i_k}(AI_i)$ для ЕП ep_s в каждой реализации A_{i_k} ИТМ AI_i будут индексироваться соответствующим номером s ЕП.

Ранее было показано, что вершина A_{16} инфраструктурного графа $\vec{G} = (A, E)$ является терминальной, причем она же является терминальной вершиной для ИТМ AI_i , представленного в (5.5), то есть $A_{16} = term(AI_i)$. Пусть при этом ЕП $ep_j \in EP$ с набором значений параметров P_j является одним из видов конечной продукции, поставляемой на рынок, и пусть $P_j = P_{j16}(AI_i)$. Тогда, по определению 1.8, ИТМ (5.5) является продуктовым.

В результате производственной деятельности рассматриваемого производства будет сгенерировано множество ИТМ на текущий момент времени t :

$$\mathcal{P}_{ИТМ}(t) = \{AI_i: i = [1, q(t)]\}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим множество (5.6) всех продуктовых ИТМ. Для каждого ИТМ AI_i можно определить два параметра для ЕП $ep_i = ep(term(AI_i))$ ее терминальной вершины: $Price(ep_i)$ — рыночная цена единицы измерения ep_i , и $C(ep_i)$ — себестоимость производства единицы измерения продукции ep_i .

Определение 5.16. Эффективностью множества $\{AI_i: i = [1, q]\}$ называется величина

$$Ef(\{AI_i: i = [1, q]\}) = \frac{\sum_{i=1}^q (Price(ep_i) - C(ep_i))}{\sum_{i=1}^q C(ep_i)}. \quad (5.7)$$

Обозначим через $\text{vol}(AI_i)$ — объемное значение ЕП $ep(\text{term}(AI_i))$, измеряемое, например, в тоннах.

Пусть задано разбиение $[1, q] = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_s$ такое, что если $i_1, i_2 \in I_i$ для некоторого $i \in [1, s]$, то $ep(\text{term}(AI_{i_1}))$ и $ep(\text{term}(AI_{i_2}))$ представляют одну и ту же продукцию. Предположим также, что имеются плановые задания на производство каждого вида продукции из S видов в виде:

$$\text{Plan}_i^{\min} \leq \sum_{i \in I_k} \text{vol}(AI_i) \leq \text{Plan}_i^{\max}, \quad i = [1, s].$$

Тогда может быть поставлена оптимизационная задача вида:

$$\begin{cases} \text{Ef}(\{AI_i : i \in [1, q]\}) \rightarrow \max, \\ \text{Plan}_i^{\min} \leq \sum_{i \in I_k} \text{vol}(AI_i) \leq \text{Plan}_i^{\max}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Отметим, что в рамках диссертационной работы рассматривается обобщённая задача назначения ТМ, в которой предполагается возможность управления выбором дальнейшего пути обработки ЕП в вершинах–развилках инфраструктурного графа \vec{G} . Это значит, что ТМ в процессе его исполнения может быть переназначен с целью повышения эффективности производства и снижения уровня брака.

Решение этой задачи может быть найдено с помощью разрабатываемого вычислительного комплекса для решения задач анализа несовместных систем с помощью методов и алгоритмов его математического обеспечения.

Пусть имеется набор продуктовых ИТМ таких, что начальные участки до вершины–развилки совпадают в части прохождения агрегатов. Тогда каждый продуктовый ИТМ может быть представлен в виде последовательности:

$$AI_i = (BI_i, CI_i), \quad i \in [1, q],$$

где BI_i — ИТМ из начальной вершины v_1 до рассматриваемой вершины–развилки v' и CI_i — ИТМ из вершины v' до терминальной вершины $\text{term}(AI_i)$. Поскольку каждый ИТМ AI_i следует некоторому ТМ — обозначим такой маршрут через $P(AI_i)$ — то множество всех ИТМ можно разбить на несколько

классов

$$\mathcal{P}_{\text{ИТМ}}(v,t) = \mathcal{P}_{\text{ИТМ}}^{(1)}(v,t) \dot{\cup} \mathcal{P}_{\text{ИТМ}}^{(2)}(v,t) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathcal{P}_{\text{ИТМ}}^{(l)}(v,t) \quad (5.9)$$

таких, что AI_i и AI_j принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $P(AI_i) = P(AI_j)$.

Обозначим через $P_i = P\left(\mathcal{P}_{\text{ИТМ}}^{(i)}(v,t)\right)$ ТМ, являющийся общим для всех ИТМ из $\mathcal{P}_{\text{ИТМ}}^{(i)}(v,t)$. Тогда задача состоит в определении того, какой из ТМ P_i следует выбрать для дальнейшего прохождения при достижении вершины-развилки v' .

Для каждого класса $\mathcal{P}_{\text{ИТМ}}^{(i)}(v,t)$ из (5.9) составим обучающую выборку

$$Z(P_i) : \left(\text{Ef}(AI_j) = \frac{\text{Price}(\text{term}(AI_j)) - C(\text{term}(AI_j))}{C(\text{term}(AI_j))}, i, BI_j \right), \quad (5.10)$$

где $AI_j \in \mathcal{P}_{\text{ИТМ}}^{(i)}(v,t)$, и значение эффективности $\text{Ef}(AI_j)$ разобьём на несколько дискретных интервалов E_1, E_2, \dots, E_m .

Далее представим выборку (5.10) в виде соответствующих многомерных векторов

$$\mathbf{a}_j = (a_{j0}, a_{j1}, a_{jm_1}, \dots, a_{jn}),$$

где $a_{j0} \in \{E_1, \dots, E_m\}$ — значение эффективности ИТМ, a_{j1} — идентификатор технологического маршрута данного ИТМ. Вектор $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ отнесём к классу K_i , если $a_{j0} \in E_i$. Тогда каждый вектор \mathbf{a}_j будет отнесен к одному из классов K_1, \dots, K_m и возникает известная задача распознавания образов в геометрической постановке, описанная в Параграфе ??.

Итак, для заданного множества (n) -мерных векторов

$$A = \{ (a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) : i \in [1, N] \},$$

и его разбиения на m классов

$$A = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_m,$$

необходимо построить решающее правило для отнесения вектора \mathbf{a}_i к одному из классов.

В последующих подразделах рассматриваются частные классы задач управления технологическими маршрутами на дискретном производстве и разрабатываются методы их численного решения в контексте анализа несовместных систем условий.

5.2.2. Задача прогнозирования брака в производстве

Наиболее простым и убедительным примером эффективности предлагаемого подхода является случай, когда прогнозируется брак ЕП при продолжении данного ТМ. Ясно, что в этом случае даже такое простое решение, как прекращение дальнейшего исполнения ТМ, выглядит целесообразным и, как минимум, экономит на затратах на продолжении работ на последующих агрегатах, которые могут достигать существенных значений.

Для каждой ЕП, после верификации ее качеств, можно определить множество наборов параметров корневой вершины, при которых получалось бы то или иное качество ЕП. Это будут суть классы в обучающей выборке. Соответственно, необходимо определить решающее правило в вершинах-развилках так, чтобы на обучающей выборке они правильно детерминировали вершины.

В этом случае для каждого применяемого ТМ $P = (A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k})$ формируется множество ИТМ на текущий момент времени t :

$$\mathcal{P}_{\text{ИТМ}}(t) = \{AI_i : i = [1, q(t)]\} .$$

Для каждого ИТМ из $\mathcal{P}_{\text{ИТМ}}(t)$ определены параметры конечной ЕП, выходящей после завершения выполнения этого ИТМ. На основе этих параметров может быть определено качество полученной единицы продукции. В простейшем случае это могут быть два класса: годные или бракованные единицы продукции.

Как было описано выше для любой вершины из маршрута P , являющейся вершиной-развилкой в технологическом графе $\vec{G} = (A, E)$ может быть составлена обучающая выборка вида (5.10), состоящая из двух классов: годные

и бракованные единицы продукции.

$$\begin{cases} AI_1 = (\text{Ind}_1, i_1, A_1, P_{11}, A_2, P_{12}, \dots, A_k, P_{1n}), \\ AI_2 = (\text{Ind}_2, i_2, A_1, P_{21}, A_2, P_{22}, \dots, A_k, P_{2n}), \\ \dots \dots \dots \\ AI_k = (\text{Ind}_k, i_k, A_1, P_{k1}, A_2, P_{k2}, \dots, A_k, P_{kn}), \end{cases}$$

где (A_1, A_2, \dots, A_k) — последовательность вершин технологического графа $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$, предшествующих вершине–развилке в маршруте P , и Ind_i — индикатор, принимающий значение 0, если единица конечной продукции при данном ИТМ получилась бракованной, и значение 1, если единица конечной продукции при данном ИТМ получилась годной.

Таким образом, в этом случае получается классическая задача обучения с учителем, в которой обучающая выборка разбита на два класса.

Пусть n — совокупное множество параметров для части ИТМ P , предшествующей рассматриваемой вершине–развилке v' . Тогда обучающая выборка в данной задаче может быть записана как два множества \mathcal{B}_0 и \mathcal{B}_1 n -мерных векторов:

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_0) & \begin{cases} (a_{11}, \dots, a_{1n}), \\ \dots \\ (a_{m1}, \dots, a_{mn}), \end{cases} \\ (\mathcal{B}_1) & \begin{cases} (a_{(m+1)1}, \dots, a_{(m+1)n}), \\ \dots \\ (a_{l1}, \dots, a_{ln}), \end{cases} \end{aligned}$$

где совокупность \mathcal{B}_0 — представляет бракованные ЕП, и \mathcal{B}_1 — годные ЕП.

Тогда задача распознавания образов в геометрической постановке будет сводиться к решению следующей системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n > 0, \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n > 0, \\ a_{(m+1)1} \cdot x_1 + \dots + a_{(m+1)n} \cdot x_n < 0, \\ \dots \\ a_{l1} \cdot x_1 + \dots + a_{ln} \cdot x_n < 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Если система (5.11) совместна и $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — её решение, то практическое использование этого решения состоит в том, что для вновь рассматриваемого ТМ при достижении вершины–развилки v' будут иметься конкретные значения параметров (a_{j1}, \dots, a_{jn}) , реализовавшиеся при данном маршруте.

В этом случае можно прогнозировать результат исполнения намеченного ТМ P : если $a_{j1} \cdot x_1 + \dots + a_{jn} \cdot x_n > 0$, то прогнозируется брак конечной ЕП, если же $a_{j1} \cdot x_1 + \dots + a_{jn} \cdot x_n < 0$, то прогнозируется получение годной ЕП при дальнейшей реализации рассматриваемого ТМ P .

Если же система (5.11) несовместна, то для решения задачи требуется разработка специальных методов и алгоритмов анализа несовместных систем, чему будут посвящены последующие главы.

Для заданного ТМ P указанная задача может решаться для каждой вершины–развилки графа $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$, входящей в маршрут P . Таким образом, при достижении каждой вершины–развилки можно вычислить прогноз по тому, будет ли получено годное изделие или бракованное изделие при реализации данного ТМ.

Предположим, что рассмотрены все используемые ТМ P и для каждой вершины–развилки технологического графа $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$ решены задачи прогнозирования результата дальнейшего исполнения ТМ. Тогда стратегия повышения эффективности производства на основе предлагаемого подхода состоит в следующем.

Пусть подлежит реализации ТМ

$$P = (A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}),$$

в котором содержится несколько вершин-развилок

$$(A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m})$$

технологического графа $\vec{G} = (\mathcal{A}, E)$. Процесс производства запускается до первой вершины-развилки A_{j_1} включительно:

$$(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{j_1}).$$

По завершении технологической операции на агрегате A_{j_1} фиксируется реализовавшийся набор параметров $(a_1, a_2, \dots, a_{n_1})$.

Пусть для данного маршрута P и вершины-развилки $v' = A_{j_1}$ было вычислено решающее правило

$$R(a_1, a_2, \dots, a_{n_1}) \in \{0, 1\},$$

которое дает прогноз по конечной продукции при дальнейшем продолжении маршрута P . Если $R(a_1, a_2, \dots, a_{n_1}) = 1$, то продолжается дальнейшая обработка продукции согласно ТМ до достижения следующей вершины-развилки A_{j_2} . Если $R(a_1, a_2, \dots, a_{n_1}) = 0$, то дальнейшее следование по ТМ нецелесообразно, поскольку в результате его исполнения ожидается получение брака. В этом случае необходимо проверить, существуют ли другие ТМ P_i , для которых уже исполненный на текущий момент времени подмаршрут маршрута P , включающий текущую вершину-развилку, также является подмаршрутом маршрута P_i .

Если таких маршрутов нет, то дальнейшую обработку полученной ЕП следует прекратить и отправить данную ЕП на повторное использование в качестве исходного сырья. Если же такие маршруты существуют, то необходимо для каждого такого маршрута P_i взять соответствующее правило R_{P_i} и выбрать те из них, для которых

$$R_{P_i}(a_1, a_2, \dots, a_{n_1}) = 1.$$

Далее, среди таких маршрутов следует отобрать наиболее эффективные по критерию (5.8), возможно, с учетом текущих планов производства.

5.2.3. Параллельная обработка данных в задаче управления технологическими маршрутами

Пусть по-прежнему $G = (V, E)$ — технологический граф. Пусть (p_i, v_j, v_k) — набор из начального участка технологического маршрута p_i , вершины-развилки v_j и терминальной вершины v_k продуктовых маршрутов.

Рассмотрим задачу прогнозирования брака.

Как мы видели ранее, каждому такому набору можно поставить в соответствие систему неравенств вида (5.11), которая моделирует постановку задачи распознавания брака при выполнении продуктовых технологических маршрутов после выполнения технологической операции на агрегате v_i . Этой системе неравенств, как мы видели выше, можно поставить в соответствие функцию $f_{(p_i, v_i, v_k)}(m)$ от m переменных, где m — число продуктовых маршрутов рассматриваемого вида.

Для вычислительного комплекса, специализированного на оптимизации технологических процессов на дискретном производстве, предлагается управляющая программа, организующая взаимодействие программных модулей решения задач распознавания образов в условиях непрерывно пополняющихся исходных данных, и запуск соответствующих классифицирующих модулей в каждый момент, когда технологический процесс проходит очередной агрегат, являющийся вершиной-развилкой.

Управляющая программа мониторит процесс накопления продуктовых маршрутов.

Любой исполненный продуктовый маршрут будет размещен в сервере хранения данных только после верификации единицы продукции, полученной в результате его исполнения. При этом для каждой тройки (p_i, v_i, v_k) ведется учет актуальных технологических маршрутов, которые соответствуют этой тройке. При этом в каждый момент времени для каждой тройки из \mathcal{P} определены два числа:

- $N_t(p_i, v_i, v_k)$ — количество технологических маршрутов, исполненных на момент времени t .

- $N_{rec}(p_i, v_i, v_k)$ — количество технологических маршрутов, исполненных на момент последнего пересчета решающих правил для задачи распознавания образов для троек (p_i, v_i, v_k) .

Для каждой тройки (p_i, v_i, v_k) задано число технологических маршрутов $\Delta(p_i, v_i, v_k)$ такое, что при наступлении события

$$N_t(p_i, v_i, v_k) - N_{rec}(p_i, v_i, v_k) \geq \Delta(p_i, v_i, v_k)$$

рекомендуется запустить пересчет задачи распознавания образов для тройки (p_i, v_i, v_k) .

После выполнения пересчета будет выполнено действие: вновь найденное решающее правило будет размещаться в базе решающих правил. Значение $N_{rec}(p_i, v_i, v_k)$ будет переопределено на $N_t(p_i, v_i, v_k)$.

Таким образом, возникает очередь задач распознавания образов для троек вида (p_i, v_i, v_k) .

В вычислительном комплексе имеется n процессоров, выполняющих решение задач классификации. Очередь при этом обрабатывается по правилу FiFo (first in first out).

В системе формируется сигнал об окончании выполнения технологической операции на агрегате тройки (p_i, v_i, v_k) . Формируется очередь таких сигналов. Для каждого такого сигнала формируется результат применения решающего правила и этот результат доступен оператору, ответственному за агрегат, соответствующий вершине v_i , для принятия окончательного решения.

Выводы по Главе 5

Выводы по Главе 5.

1. Разработана математическая модель для исследования прикладной задачи управления технологическими маршрутами на дискретном производстве, и показано, что эта задача может быть решена методами анализа несовместных систем с помощью разрабатываемого вычислительного комплекса. В частности, показано, что в процессе принятия решения о продолжении или переназначении текущего технологического маршрута возникает целая сеть задач распознавания образов в геометрической

постановке, состоящих в отнесении входного вектора (текущего технологического маршрута) к одному из классов обучающей выборки (классы эффективности конечной единицы продукции, формируемые на основе данных об исполненных ранее технологических маршрутах — технологической базе производства).

2. Разработана модель параллельной обработки данных об исполненных технологических маршрутах, в основе которой лежат эффективные способы сбора и представления данных и организации классов.

3. Разработана математическая модель для исследования прикладной задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости и показано, что эта задача может быть решена методами анализа несовместных систем с помощью разрабатываемого вычислительного комплекса. В частности, показано, что на этапе формирования множества бесконфликтных наборов нормативных ниток (потенциальных расписаний, допустимых для совместного исполнения) возникает задача расшифровки МБФ, порожденной неориентированным графом.

4. Разработан общий подход к декомпозиции набора ориентированных путей в графе на множестве сильно связанных подграфов этого графа. На основе этого подхода разработана модель параллельной обработки данных для задачи назначения локомотивов на исполнение ниток графика плана перевозок, имеющей высокую комбинаторную сложность. Важным преимуществом разработанной модели является существенное снижение размерности исследуемой задачи, что приобретает особую актуальность в условиях оперативной организации транспортных процессов.

6. Вычислительный комплекс для решения прикладных задач анализа несовместных систем

В предыдущих главах были разработаны методы математического моделирования и численного решения задач анализа несовместных систем, а также методы параллельной обработки данных с графовой и векторной структурой. В этой главе разрабатываются комплексы проблемно-ориентированных программ для решения задач управления технологическими маршрутами на дискретном производстве и транспортными процессами в условиях противоречивости. Все эти результаты лежат в основе математического и программного обеспечения вычислительного комплекса для решения задач анализа несовместных систем с массивно параллельной обработкой данных.

Структурная схема вычислительного комплекса представлена на Рис. 7.

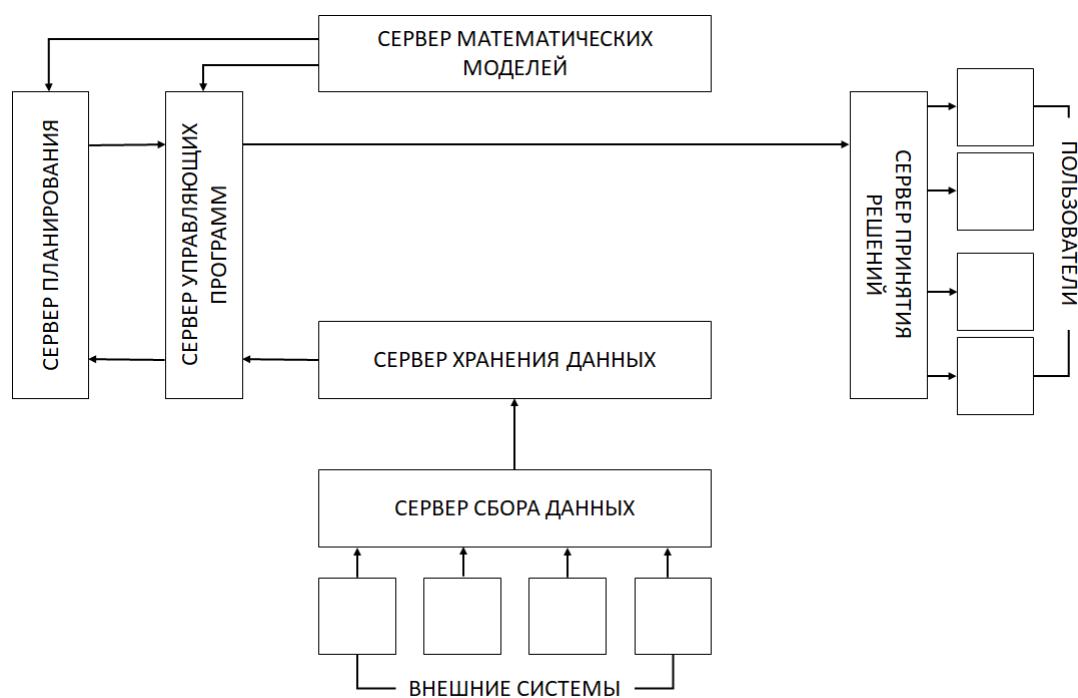


Рис. 7 Вычислительный комплекс

На схеме стрелками указаны направления взаимодействия программных компонент в вычислительном комплексе. При более детальном рассмотрении, которому будут посвящены последующие разделы, принципы взаимодействия программных компонент будут уточняться.

Математическое обеспечение вычислительного комплекса представляет собой программную реализацию численных методов решения задач анализа

несовместных систем. В рамках вышеприведенной схемы математическое обеспечение размещено на сервере математических моделей и включает программную реализацию разработанных в диссертационной работе алгоритмов. Условное разделение этих алгоритмов по классам прикладных задач может быть представлено следующим образом.

Алгоритмы, используемые программными модулями для решения задачи управления технологическими маршрутами на дискретном производстве:

- правило переобучения системы — на данном этапе считается заданным и определяет объем данных, подлежащих обработке;
- алгоритм дихотомии множества векторов обучающей выборки;
- алгоритм поиска МСП несовместных систем линейных неравенств — КОМБ, ПРАДЕРЕВО(\mathcal{A}), ГРАФ–КОМБ(L), приближенные алгоритмы;
- правило построения комитета несовместной системы линейных неравенств — решения, взятые по одному для каждой МСП из цикла нечетной длины графа МСП;
- альтернативные покрытия равномогных комитетов.

Таким образом, для решения этой задачи в вычислительном комплексе используется взаимосвязь задач анализа несовместных систем линейных неравенств с задачей распознавания образов в геометрической постановке.

Алгоритмы, используемые для решения задачи управления транспортными процессами планирования и организации грузовых железнодорожных перевозок:

- правило кластеризации неориентированного графа конфликтов;
- алгоритмы расшифровки МБФ, связанной с несовместной системой условий (системой нормативных ниток);
- алгоритм поиска наибольшего независимого множества с абсолютной оценкой точности приближенного решения;
- алгоритм декомпозиции множества путей ориентированного графа на заданном наборе сильно связных подграфов;
- алгоритм покрытия вершин ориентированного графа в задаче о назначении и перемещении локомотивов.

Соответственно, для решения этой задачи используется взаимосвязь задач анализа несовместных систем линейных неравенств с задачей расшифровки монотонных булевых функций (см. Главы 1 и 5).

Программное обеспечение вычислительного комплекса — это управляющие программы для реализации методов параллельной обработки данных и взаимодействия программных модулей в вычислительном комплексе, а также комплексы проблемно-ориентированных прикладных программ для решения задач управления технологическими маршрутами на дискретном производстве и транспортными процессами в условиях противоречивости. Детальное описание компонент программного обеспечения будет представлено в последующих разделах. В рамках вышеприведенной схемы управляющие программы располагаются на отдельном одноименном сервере, а комплексы проблемно-ориентированных программ частично (в зависимости от их функционала) располагаются на серверах сбора данных и планирования.

6.1. Управление технологическими маршрутами на металлургическом производстве

Вычислительный комплекс для решения задач анализа несовместных систем может быть использован для решения прикладной задачи управления технологическими маршрутами на металлургическом производстве. В предыдущих главах была обоснована взаимосвязь задач анализа несовместных систем с задачей распознавания образов в геометрической постановке. Последняя, в свою очередь, тесно связана с прикладной задачей. Таким образом, методы численного решения задач анализа несовместных систем могут быть эффективно использованы для построения решающих правил для задач распознавания.

Особенности прикладной задачи, в частности, непрерывное накопление данных и их колоссальные объемы, мотивировали разработку методов параллельной обработки данных в вычислительном комплексе. Рассмотрим подробнее реализацию этих методов. На Рис. 8 приводится схема функционирования вычислительного комплекса для решения задачи управления технологическими маршрутами на металлургическом производстве.

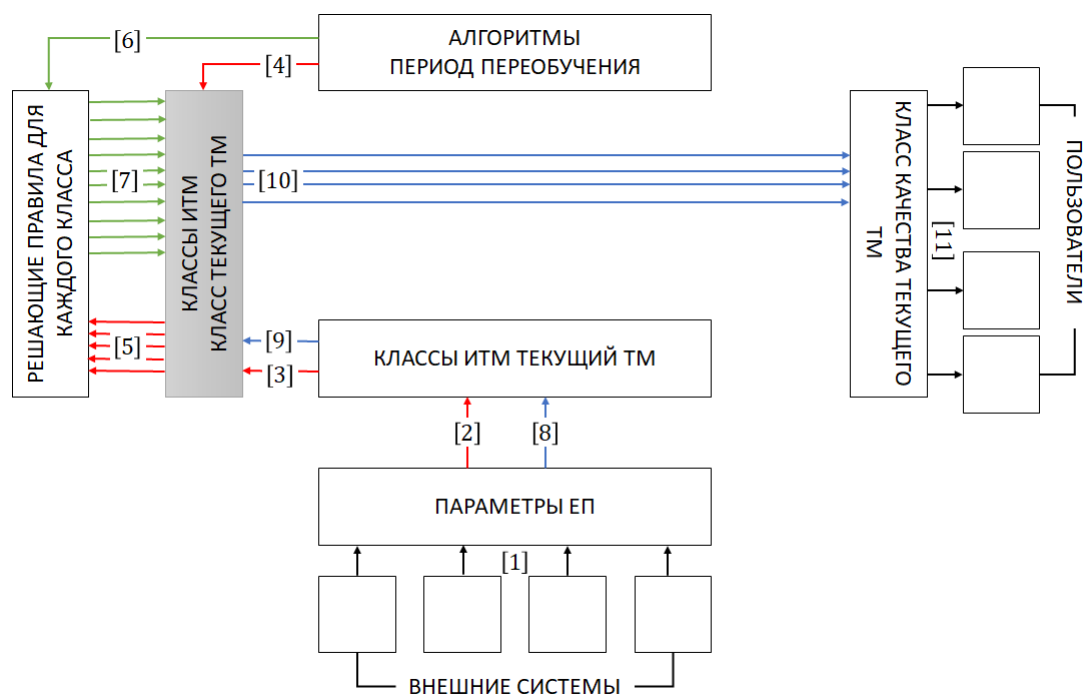


Рис. 8 Приложение вычислительного комплекса для решения задачи управления технологическими маршрутами на металлургическом производстве

Из вышеприведенной схемы видно, что параллельная обработка данных в вычислительном комплексе производится с помощью управляющей программы (которая, напомним, располагается на одноименном сервере) и является одним из промежуточных этапов его функционирования. Цветами отмечены этапы различных процессов: красный — процесс формирования обучающей выборки и реализация ее параллельной обработки, зеленый — процесс построение решающих правил для каждого класса обучающей выборки, и, наконец, синий — процесс прогнозирования качества конечной единицы продукции при продолжении текущего технологического маршрута в некотором классе обучающей выборки.

[1] Из внешних систем на сервер сбора данных поступают значения параметров обрабатываемой продукции. При этом данные поступают в неупорядоченном виде. На сервере сбора данных располагается программа, которая производит первичную обработку опытных данных — они преобразуются к виду векторов, фиксируются координаты, соответствующие технологическим агрегатам, вершинам–развилкам технологического графа, а также параметры терминальных вершин.

[2] Сервер сбора данных передает неупорядоченный набор векторов на сервер хранения данных. Здесь этот набор сортируется таким образом, что все векторы, имеющие одинаковую последовательность технологических агрегатов, образуют один класс исполненных технологических маршрутов (ИТМ) и получают метку соответствующего класса. Таким образом, на сервере хранения данных аккумулируются классы ИТМ. При этом для каждого вектора в каждом классе отмечены вершины–развилки и параметр качества полученной единицы продукции — параметр терминальной вершины. Другими словами, на сервере хранения данных неупорядоченный набор векторов, сформированный на сервере сбора данных, приобретает вид:

$$i\text{-й класс ИТМ: } \begin{cases} (i, \mathbf{A}_1, \mathbf{pr}'_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{pr}'_2, \dots, \mathbf{A}_k, \mathbf{pr}'_k, \dots, \mathbf{A}_n, \mathbf{pr}'_n, \mathbf{pr}'_m) , \\ \dots , \\ (i, \mathbf{A}_1, \mathbf{pr}''_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{pr}''_2, \dots, \mathbf{A}_k, \mathbf{pr}''_k, \dots, \mathbf{A}_n, \mathbf{pr}''_n, \mathbf{pr}''_m) , \end{cases}$$

где \mathbf{A} — вершины технологического графа (агрегаты), \mathbf{pr} — вектор параметров единицы продукции, полученных ей после прохождения соответствующего агрегата, и жирным шрифтом отмечены вершины–развилки и параметр качества конечной продукции.

Таким образом, для каждой вершины–развилки формируется набор векторов, совпадающих в части прохождения агрегатов от начальной вершины до этой вершины–развилки. Так, например, некоторая вершина–развилка может принадлежать ИТМ различных классов, которые совпадают от начальной вершины до вершины–развилки, но различаются в части прохождения агрегатов от этой вершины–развилки до следующей. Заметим также, что последняя вершина в любом векторе любого класса ИТМ — это некоторая вершина–развилка технологического графа, заданная вместе с соответствующим набором параметров. При этом последний параметр любого вектора в любом классе — это класс эффективности конечной единицы продукции, то есть параметр терминальной вершины ИТМ. Часть маршрута от вершины–развилки до терминальной вершины при этом не имеет значения, поскольку решение о продолжении или переназначении текущего технологического маршрута может быть принято только при достижении им некоторой вершины–развилки (подробнее см. Глава 5 Раздел 5.2).

Классы ИТМ, хранящиеся на сервере хранения данных, образуют обучающую выборку системы распознавания. Как уже было неоднократно отмечено, в случае металлургического производства, количество агрегатов и параметров продукции велико. Кроме того, сбор данных происходит непрерывно и с большой скоростью, что влечет накопление колоссального объема информации.

[3] Управляющая программа отслеживает количество ИТМ, собранных для каждого класса на сервере хранения данных.

[4] С точки зрения практики чрезмерно частое переобучение системы распознавания оказывается малоэффективным. В этой связи переобучение происходит по определенному правилу. Не теряя общности, можно полагать, что переобучение происходит, например, для каждых 10 тыс. ИТМ, принадлежащих одному и тому же классу. Это правило может в дальнейшем меняться, и даже может быть зависимой величиной, связанной с качеством получаемого решения. Правило располагается на сервере математических моделей и доступно управляющей программе.

[5] Как только для некоторых классов ИТМ выполняются условия вышеупомянутого правила, систему следует переобучить с учетом вновь приобретенных данных. Каждый такой класс ИТМ с помощью управляющей программы передается на параллельные процессоры, которые располагаются на сервере планирования.

[6] На сервере математических моделей хранятся алгоритмы для построения решающих правил распознавания. Они передаются на сервер планирования, где на каждом из параллельных процессоров строятся решающие деревья и комитеты для каждого класса ИТМ, подлежащего обработке. Рассмотрим отдельно взятый такой процесс.

На Рис. 9 приводится схема обработки данных для некоторого класса ИТМ. Здесь алгоритмы, реализуемые в вычислительном комплексе, и выходные данные каждого алгоритма выделены в цветные зеленые и серые блоки соответственно. Входными данными для вычислительного процесса является набор векторов некоторого класса ИТМ — прямоугольный блок со сплошном контуром. Промежуточные результаты вычислений (промежуточные выходные данные алгоритмов, подлежащие преобразованиям или дальнейшей обработке с помощью других алгоритмов) представлены в прямоугольных блоках с

пунктирным контуром. Таким образом, вычислительный процесс получает на вход некоторый класс ИТМ и, после обработки с помощью трех различных алгоритмов, возвращает решающее дерево и комитет. Отметим, что в совокупности они образуют решающее правило для этого класса.

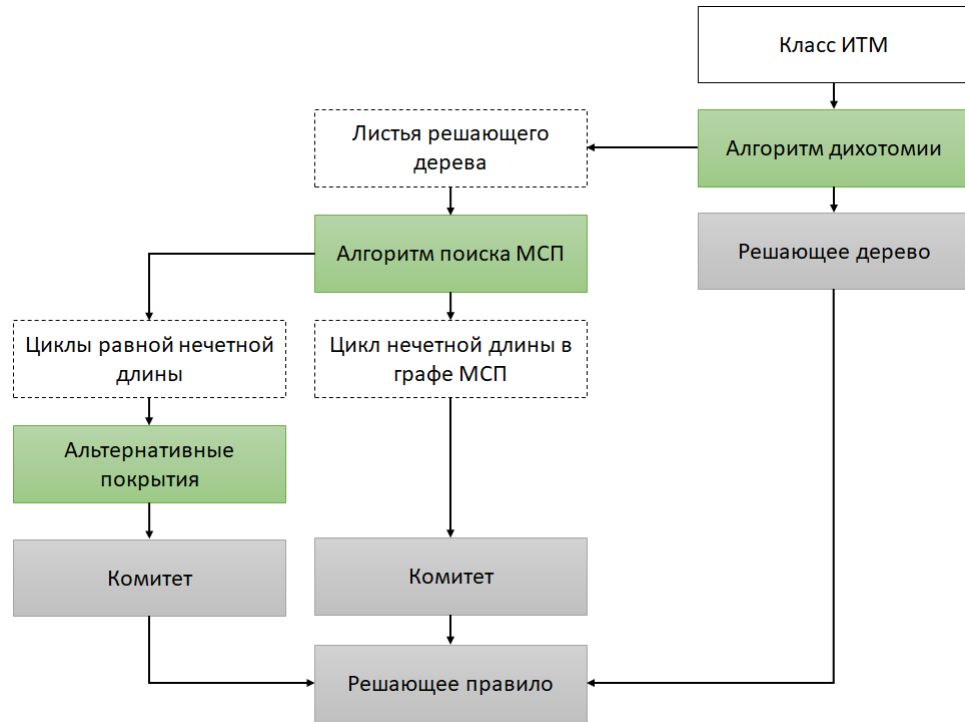


Рис. 9 Решающее дерево и комитет для отдельно взятого класса ИТМ

Обучающая выборка для некоторого класса подвергается обработке с помощью алгоритма дихотомии. В результате работы алгоритма дихотомии формируется решающее дерево.

Листья полученного решающего дерева представлены наборами векторов, каждый из которых, в терминах прикладной задачи, может быть отнесен к некоторому классу эффективности конечной единицы продукции (ЕП). Эти векторы преобразуются в несовместную систему линейных неравенств вида

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n > 0, \\ \dots \\ a_{k1} \cdot x_1 + \dots + a_{kn} \cdot x_n > 0, \\ a_{(k+1)1} \cdot x_1 + \dots + a_{(k+1)n} \cdot x_n < 0, \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n < 0, \end{array} \right.$$

где \mathbf{a} — векторы–листья решающего дерева, а \mathbf{x} — такой вектор, для которого все векторы \mathbf{a} , соответствующие бракованным ЕП, удовлетворяют условию $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle < 0$.

С помощью алгоритма поиска МСП системы формируется цикл нечетной длины графа МСП, а решения, взятые по одному для каждой МСП из этого цикла, определяют комитет исходной несовместной системы. При этом для различных циклов формируются различные комитеты. Тогда, в случае формирования равномогущих комитетов, для каждого из них строится альтернативное покрытие и выбирается приоритетный, с этой точки зрения, комитет исходной несовместной системы.

[7] Таким образом, для каждого класса ИТМ на сервере планирования формируется решающее дерево и комитет для каждого листа решающего дерева. Все решающие деревья и соответствующие комитеты доступны управляющей программе. В совокупности они определяют набор решающих правил для каждого класса ИТМ.

[8] На сервере сбора данных для текущего технологического маршрута (ТМ) фиксируются технологические агрегаты, соответствующие параметры ЕП и вершина–развилка, в которой необходимо принять решение о продолжении или переназначении технологического маршрута. При этом класс ИТМ (то есть потенциальная последовательность агрегатов технологической линии) задается уже во внешних системах и также является параметром текущего технологического маршрута. В сервере хранения данных ТМ принимает вид вектора, сравнимого с векторами обучающей выборки. Другими словами, в сервере хранения данных параметры ТМ упорядочиваются согласно правилам, принятым в вычислительном комплексе.

[9] Управляющая программа получает следующие сведения о ТМ: класс ИТМ, в котором предполагается его продолжение, вершина–развилка технологического графа, в которой необходимо принять решение о дальнейших действиях. В распоряжении управляющей программы находятся решающие правила для каждого класса ИТМ (шаг [7] схемы функционирования вычислительного комплекса). Имея ввиду приоритетный класс продолжения ТМ, управляющая программа фиксирует соответствующий класс ИТМ. Кроме того, управляющая программа фиксирует также все классы ИТМ, содержащие такую же вершину–развилку, что и ТМ (одинаковые классы ИТМ совпадают

по всем вершинам–развилкам, но для различных классов только некоторые из них могут совпадать).

[10] Начиная с приоритетного класса ИТМ управляющая программа применяет соответствующее решающее правило (решающее дерево и комитет) для ТМ. Если при продолжении ТМ в приоритетном классе не прогнозируется брак конечной ЕП, то решение сразу передается на сервер принятия решений. В противном случае, для ТМ применяются решающие правила других классов. С точки зрения практики, это означает проверку качества конечной ЕП в случае переназначения ТМ в фиксированной вершине–развилке. Аналогично, для каждого просмотренного правила решение передается на сервер принятия решений. При этом нет необходимости проверки правила для каждого класса, поскольку ближайший найденный класс, при продолжении в котором брак не прогнозируется, является допустимым решением.

[11] Сервер принятия решений передает на уровень пользователей решение о продолжении ТМ в приоритетном классе ИТМ, или о его переназначении в фиксированной вершине–развилке с указанием класса переназначения.

Следует отметить, что шаги [1–2] и [8–11] схемы реализуются непрерывно в процессе производства, в то время, как переобучение [3] и [5–7] происходит только в случае выполнения правила [4].

Для реализации вышеописанных функций в вычислительном комплексе был разработан комплекс проблемно–ориентированных прикладных программ «Управление технологическими маршрутами на металлургическом производстве». Этот комплекс программ состоит из двух компонент и является частью прикладного программного обеспечения вычислительного комплекса наряду с управляющими программами для реализации методов параллельной обработки данных в вычислительном комплексе. На Рис. 10 представлена схема взаимодействия комплекса программ с другими компонентами вычислительного комплекса (компоненты комплекса программ выделены в блоки серого цвета).

В зависимости от реализуемого функционала, компоненты комплекса программ располагаются на серверах сбора и хранения данных и на серверах планирования и принятия решений.

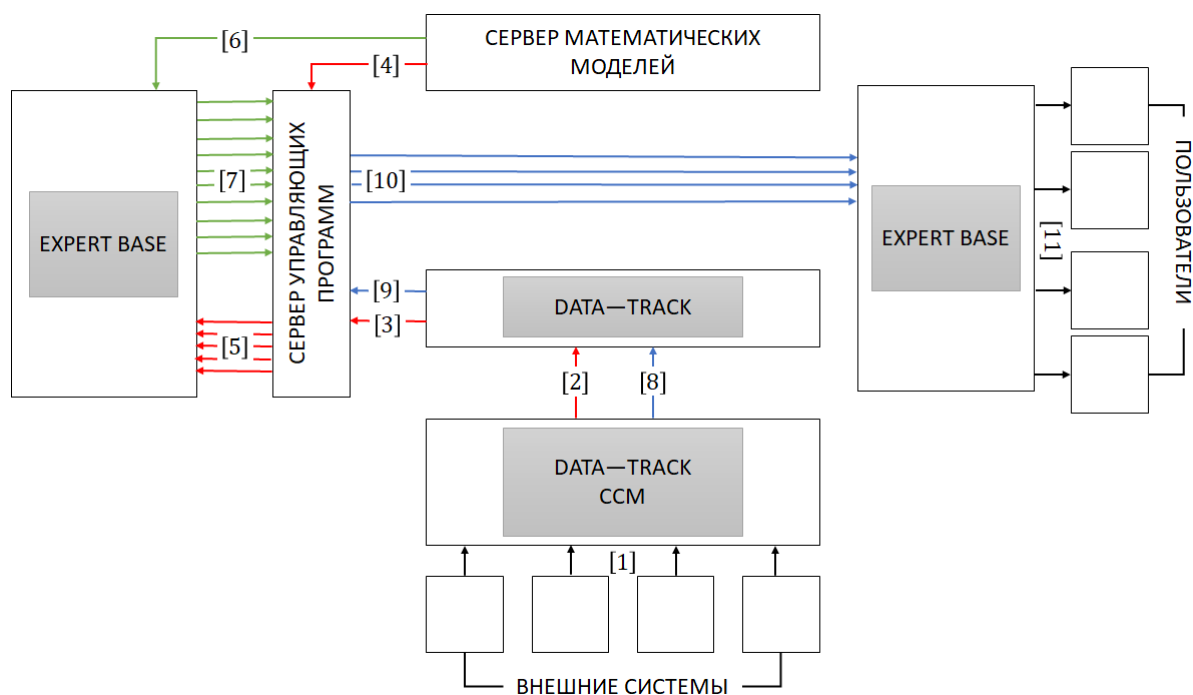


Рис. 10 Комплекс программ «Управление технологическими маршрутами на дискретном производстве»

Программа «DATA-TRACK» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014662444) располагается частично на серверах сбора и хранения данных. В процессе исполнения ТМ каждая ЕП приобретает определенный набор параметров для каждой его реализации (агрегата). Сбор, накопление и запись в базу данных информации об этих параметрах осуществляются с помощью системы слежения за материалом (ССМ) способами, подтвержденными авторскими патентами (патент на изобретение № 2261477, № 25773855). Важной особенностью при этом является хранение информации о самой ЕП, а не только о ее параметрах.

ССМ состоит из линий слежения. Каждая линия слежения — это участок агрегата, на котором ЕП последовательно проходит технологические узлы, рольганги и датчики движения. ССМ принимает сигналы с различных источников, в том числе с видео устройств, установленных на оборудовании, и автоматизированных систем управления технологическими процессами. Источники данных и их тип определяются в конфигурационном файле. При срабатывании датчиков, то есть при их переходе с одного уровня на другой, происходит коррекция положения координат в ССМ. Другими словами, для слежения важна смена состояния датчика. Затем данные привязываются к ЕП и передаются на сервер хранения данных.

Итогом работы программы «DATA-TRACK» является сменный рапорт, в котором отражается прохождение всех ЕП через технологические узлы и параметры производственного процесса для каждого агрегата технологической линии. Сменный рапорт преобразуется в обучающую выборку, для каждого элемента которой определено качество конечной ЕП. В терминах предшествующего изложения — это классы ИТМ, в которых для каждого вектора фиксированы идентификатор класса, последовательность агрегатов, вершины-развилки технологического графа, входящие в эту последовательность агрегатов, и идентификатор качества конечной ЕП (шаги [1–2] схемы функционирования вычислительного комплекса в приложении к решению задачи управления технологическими маршрутами).

Программа «EXPERT BASE» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011611453) получает на вход результат работы программы «DATA-TRACK» (шаг [5] схемы). Запуск программы выполняется по мере необходимости на каждом из параллельных процессоров, установленных на сервере планирования. В результате программа возвращает решающие правила для каждого класса ИТМ (шаги [6–7] схемы). При этом частота запуска контролируется управляющей программой с учетом сведений, полученных от программы «DATA-TRACK» (шаги [3–4] схемы).

Данные о текущем ТМ, подлежащем продолжению или переназначению, фиксируются программой «DATA-TRACK» и передаются в программу «EXPERT-BASE», где принимается соответствующее решение (шаги [8–10] схемы). Это решение передается на сервер принятия решений и преобразуется при помощи той же программы «EXPERT-BASE» в информацию рекомендательного характера, доступную пользователям (шаг [11] схемы).

Вычислительные эксперименты, проводимые с использованием разработанного вычислительного комплекса в приложении к решению задачи управления технологическими маршрутами на металлургическом производстве, выявили ряд недостатков традиционных методов изготовления металлургической продукции. Главным образом эти недостатки связаны с аналитическими трудностями обработки данных. В этой связи в рамках подхода, разработанного в диссертации для решения этой задачи, были разработаны специальные способы производства (патент на изобретение

№ 2250151, № 2260495), позволяющие оптимизировать процессы сбора и обработки информации и повысить тем самым его эффективность.

6.2. Управление транспортными процессами в условиях противоречивости

Вычислительный комплекс для решения задач анализа несовместных систем может быть эффективно использован для решения задач оптимизации процессов планирования и организации грузовых железнодорожных перевозок. Эта прикладная задача также характеризуется большой размерностью и высокой комбинаторной сложностью на каждом этапе. В этой связи в диссертации в Главе 4 были разработаны методы параллельной обработки данных с графовой структурой. В этом разделе мы подробно обсудим принципы реализации этих методов, а также приведем описание комплекса проблемно-ориентированных прикладных программ для решения вышеупомянутой прикладной задачи в вычислительном комплексе. Как уже было сказано в начале этой главы, управляющая программа, реализующая методы параллельной обработки данных с графовой структурой, а также разрабатываемый в настоящем разделе комплекс проблемно-ориентированных программ, являются компонентами прикладного программного обеспечения вычислительного комплекса.

Рассмотрим отдельно каждый этап решения задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости. На Рис. 11 представлена схема функционирования вычислительного комплекса в приложении к решению задачи оптимизации процессов планирования грузовых железнодорожных перевозок.

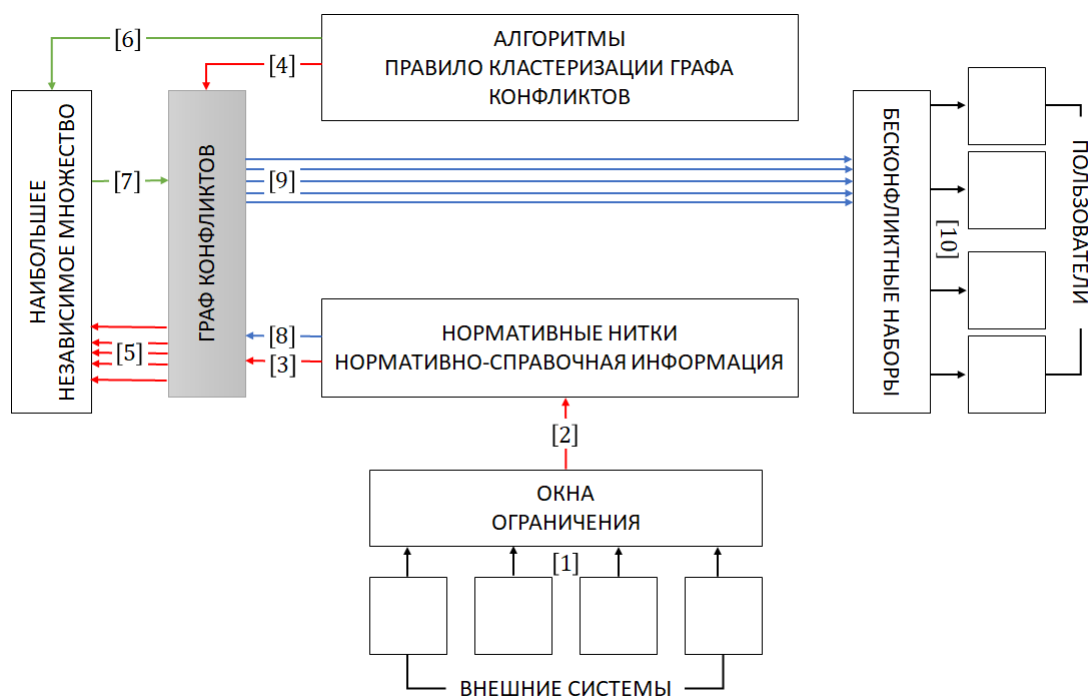


Рис. 11 Приложение вычислительного комплекса для решения задачи оптимизации процессов планирования грузовых железнодорожных перевозок

На этом этапе функционал управляющей программы (блок серого цвета, расположена на одноименном сервере управляющих программ) состоит в организации параллельной обработки вершин неориентированного графа конфликтов. В этом случае данные, подлежащие обработке в вычислительном комплексе, имеют графовую структуру.

[1] Из внешних систем на сервер сбора данных поступает информация о текущем состоянии инфраструктуры железнодорожной сети. В частности, сюда поступают сведения о так называемых окнах — периоды времени, доступные или недоступные для организации грузовых перевозок, а также сведения об ограничениях на использование путей, перегонов, сортировочных станций и т. п. ресурсов сети.

[2] Сервер сбора данных передает на сервер хранения данных информацию об условиях доступности сети. При этом на сервере хранения данных стационарно хранится множество всех нормативных ниток. В Главе 5 понятие нормативной нитки было формализовано в терминах теоретико-графовой модели прикладной задачи. Здесь отметим, что множество всех нормативных ниток представляет собой множество всех потенциальных маршрутов движения поездов. При этом для каждой станции в потенциальном маршруте заданы время и скорость отправления и прибытия поезда при

следовании по этому маршруту. Такие последовательности станций и соответствующих параметров формируются на длительный период времени без учета возможной конфликтности некоторых маршрутов (то есть при их построении не принимается во внимание реальная возможность исполнения любой пары).

С учетом полученной информации об ограничениях на использование ресурсов, в сервере хранения данных формируется уточненное множество нормативных ниток. Так, например, из множества нормативных ниток исключаются те из них, движение по которым подразумевает использование некоторых ресурсов сети внутри окон, выделенных для проведения регламентных работ. В результате на сервере хранения данных формируется уточненный граф конфликтов. Дальнейшая его обработка заключается в формировании наибольшего независимого множества вершин (см. Главу 5).

[3] Граф конфликтов, подлежащий обработке, передается в управляющую программу.

[4] Сервер математических моделей передает в управляющую программу правило кластеризации графа конфликтов.

[5] Управляющая программа передает на каждый из параллельных процессоров некоторое подмножество списка смежности вершин. Каждый такой список может обрабатываться независимо на каждом шаге алгоритма формирования независимого множества вершин.

[6] Сервер математических моделей передает на сервер планирования алгоритм формирования независимого множества вершин неориентированного графа с абсолютной оценкой точности приближенного решения и алгоритм расшифровки монотонной булевой функции (МБФ), связанной с несовместной системой условий, то есть с системой нормативных ниток.

Рассмотрим подробнее процессы, происходящие в сервере планирования на этом этапе функционирования вычислительного комплекса. Рассмотрим фрагмент алгоритма поиска независимого множества вершин с абсолютной оценкой точности приближенного решения (Рис. 12).

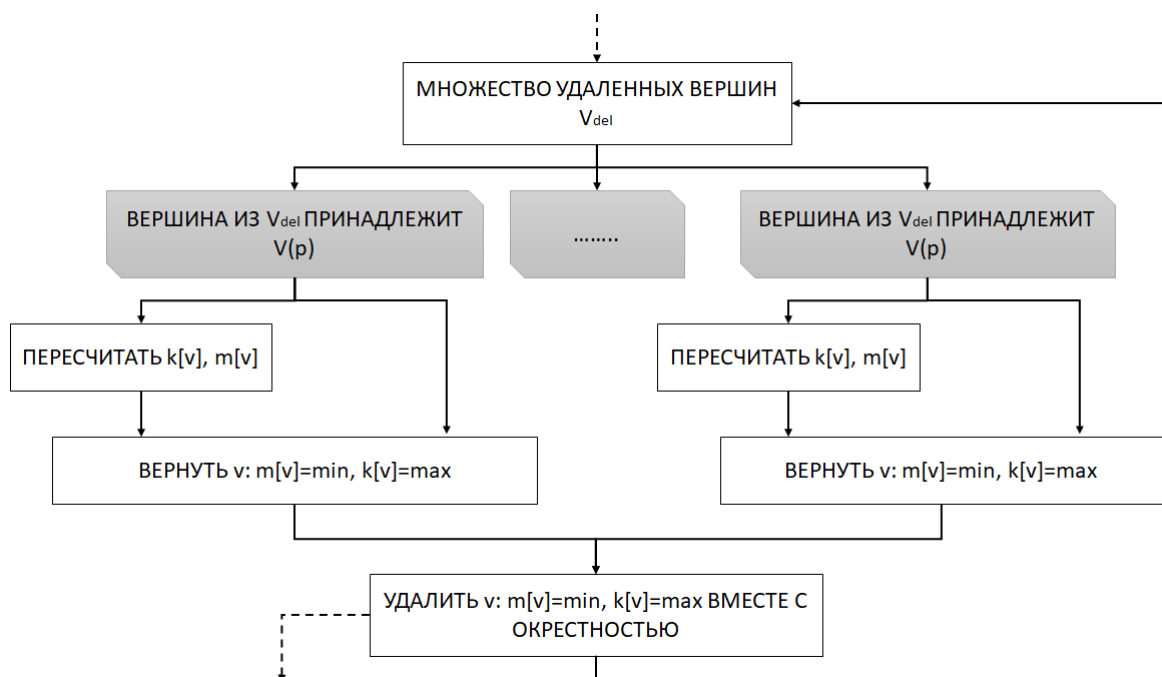


Рис. 12 Фрагмент алгоритма поиска наибольшего независимого множества

Как уже было отмечено, из управляющей программы на сервер планирования поступает неориентированный граф конфликтов, причем на ряд параллельных процессоров (отмечены блоками серого цвета) согласно правилу [4] поступают списки смежности некоторых вершин — шаг [5] схемы. В результате вычисления параметров k и m каждый процессор возвращает по одной вершине с наименьшим значением параметра m и наибольшим значением параметра k (при наличии нескольких вершин с одинаковым значением параметра m). Аналогично, среди полученных вершин, алгоритм выбирает одну с наименьшим значением параметра m и наибольшим значением параметра k (при наличии нескольких вершин с одинаковым значением параметра m). Выбранная вершина включается в строящееся независимое множество и исключается из текущего множества вершин вместе со своим списком смежности.

Все процессоры получают информацию об удаленных вершинах. Если множество вершин $V(p)$, подлежащее обработке в процессоре p , содержит хотя бы одну вершину из числа удаленных, то на следующей итерации от него требуется обновить значения параметров. В противном случае, без каких-либо действий возвращаются ранее полученные результаты. Таким образом, существенно сокращаются вычислительные затраты на реализацию алгоритма, поскольку сокращается не только размерность задачи для каждого процессора, но и общее количество действий.

В результате работы эвристического алгоритма поиска независимого множества вершин на сервере планирования формируется некоторое независимое множество графа конфликтов, которому соответствует бесконфликтный набор нормативных ниток. Аналогично, в случае реализации алгоритма расшифровки МБФ, связанной с несовместной системой условий, будет получен некоторый представитель семейства максимальных верхних нулей, которому также соответствует бесконфликтный набор нормативных ниток.

[7] Выбирая наилучший (максимальный по размеру) набор нормативных ниток, сервер планирования возвращает его в управляющую программу.

[8] Управляющая программа получает из сервера хранения данных нормативно-справочную информацию о принадлежности каждой станции некоторой зоне обслуживания сети (участки дорог).

[9] Имея ввиду полученную нормативно-справочную информацию, управляющая программа возвращает на сервер принятия решений бесконфликтные подмножества нормативных ниток с меткой их принадлежности конкретным участкам дорог.

[10] Сервер принятия решений возвращает бесконфликтные наборы нормативных ниток на уровень пользователей. При этом выбор независимыми пользователями любых нормативных ниток из полученных ими бесконфликтных наборов не противоречит их практическому исполнению.

Рассмотрим теперь приложение вычислительного комплекса для решения задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости на этапе организации грузовых железнодорожных перевозок. На Рис. 13 представлена схема функционирования компонент вычислительного комплекса на этом этапе решения задачи.

Как и раньше, управляющая программа располагается на сервере управляющих программ и предназначена для реализации метода параллельной обработки данных с графовой структурой, разработанного в Главе 4. В этом случае параллельная обработка данных в вычислительном комплексе мотивирована высокой комбинаторной сложностью задачи о назначении и перемещении локомотивов — на каждую нормативную нитку может быть назначено различное подмножество локомотивов для ее исполнения. Выбор оптимального назначения неизбежно влечет полный перебор всех возможных

комбинаций, что крайне малоэффективно с точки зрения оперативного управления перевозками. В рамках разработанного в диссертации метода параллельной обработки данных с графовой структурой, вариантный график, подлежащий исполнению, может быть декомпозирован по различным участкам обслуживания локомотивов. Тогда задача может быть решена для каждого участка независимо. Такой подход позволяет существенно сократить вычислительные затраты при несильном снижении качества приближенного решения.

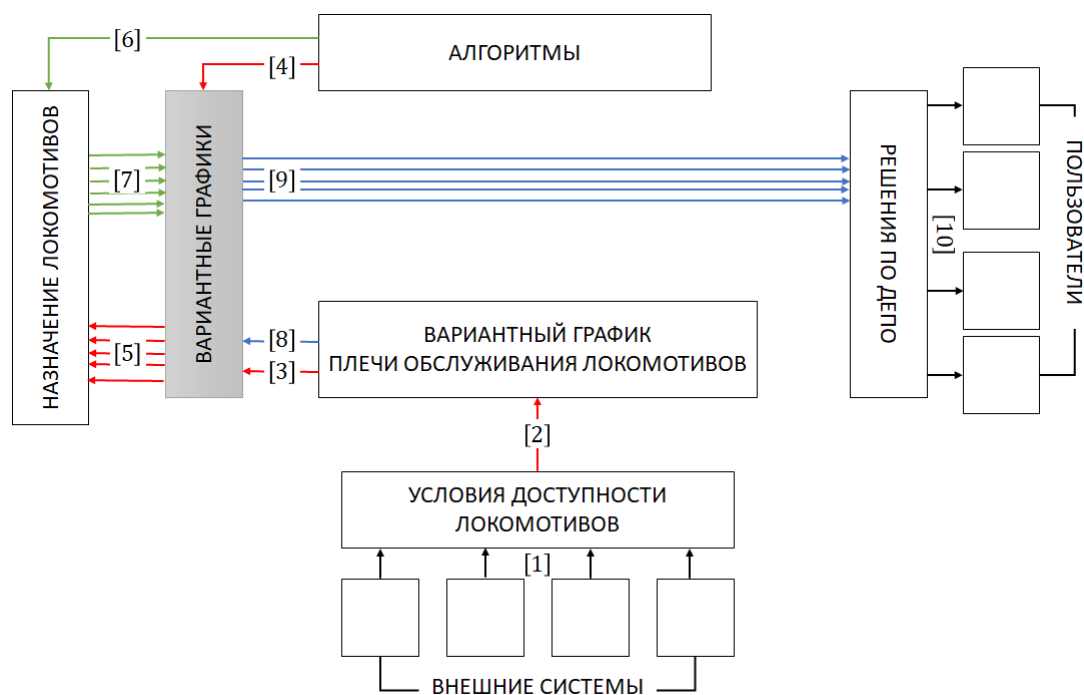


Рис. 13 Приложение вычислительного комплекса для решения задачи оптимизации процессов организации грузовых железнодорожных перевозок

На этом этапе решения задачи вариантный график, подлежащий исполнению, полагается заданным. В общем случае он формируется из найденного на предыдущем этапе бесконфликтного набора нормативных ниток с учетом фиксированного плана перевозок и пропускных способностей сети.

[1] На сервер сбора данных поступают сведения об условиях доступности заданного парка локомотивов. Важнейшими такими сведениями являются станция и время доступности каждого локомотива, информация об ограничениях на использование, данные о видах и сроках прохождения очередного технического обслуживания.

[2] На сервер хранения данных поступают сведения о локомотивах, доступных для назначения. Здесь же хранятся исходный ориентированный

граф сети и вариантный график, подлежащий исполнению. Вариантный график представляет собой бесконфликтный набор нормативных ниток. При этом для каждой нормативной нитки существенными параметрами являются только станция и время начала и окончания движения (параметры для каждой станции, входящей в нитку, не принимаются во внимание на этом этапе).

С учетом нормативно-справочной информации, на сервере хранения данных формируется набор путей ориентированного графа сети — максимальные по включению пути графа зависимостей нормативных ниток, и набор сильно связных подграфов этого графа заданных вместе со своими ресурсами — плечи обслуживания локомотивов, доступных для назначения. В терминах прикладной задачи ресурсы сильно связного подграфа характеризуют количество локомотивов и условиях их доступности для назначения в соответствующем плече обслуживания. Отметим, что сведения о принадлежности локомотивов некоторым плечам обслуживания стационарно хранятся в нормативно-справочной информации на сервере хранения данных. С учетом сведений, полученных из сервера сбора данных, эта информация уточняется.

[3] Управляющая программа получает на вход ориентированный граф сети, а также набор путей и набор сильно связных подграфов этого графа, заданных вместе со своими ресурсами.

[4] Сервер математических моделей передает в управляющую программу алгоритм декомпозиции множества путей ориентированного графа на множестве сильно связных подграфов.

[5] Управляющая программа реализует вышеупомянутый алгоритм декомпозиции для ранее полученных входных данных. Рассмотрим подробнее реализацию метода параллельной обработки данных на этом этапе функционирования вычислительного комплекса.

В результате реализации алгоритма декомпозиции заданное множество путей ориентированного графа сети преобразуется таким образом, что в каждом сильно связном подграфе целиком лежит некоторый подпуть. С учетом заданных ограничений — условие минимальной сложности, каждый путь декомпозируется на возможно меньшее число подпутей. Напомним, что в терминах прикладной задачи, это означает, что каждая нормативная нитка из вариантного графика будет исполняться наименьшим числом

локомотивов. Другое ограничение — условие максимального баланса, является менее приоритетным, однако его содержательный смысл имеет важное значение для исполнения всего вариантного графика возможно меньшим (общим) числом локомотивов. Баланс декомпозиции определяется количеством пар взаимно обратных (по дугам) подпутей, принадлежащих каждому сильно связному подграфу. В предположении, что пара взаимно обратных подниток может быть исполнена одним и тем же локомотивом, максимальность баланса способствует уменьшению числа задействованных локомотивов. Последнее ограничение — равномерность декомпозиции. Оно характеризует степень нагруженности каждого сильно связного подграфа, то есть, с точки зрения практики, количество нормативных подниток, подлежащих исполнению в каждом плече обслуживания. Равномерность декомпозиции нормируется по заданным ресурсам подграфов. Таким образом, минимизируя равномерность мы достигаем в некотором смысле оптимального распределения задания по всем плечам обслуживания. Это условие тесно связано с практической организацией грузовых железнодорожных перевозок. В частности, равномерная загрузка всего локомотивного парка является более щадящим режимом его эксплуатации, по сравнению с максимальной загрузкой некоторых локомотивов и простоем других.

[6] Управляющая программа передает полученные наборы подпутей и заданные ресурсы соответствующих сильно связных подграфов на сервер планирования. При этом каждый сильно связный подграф, его ресурс и набор подпутей, целиком лежащих в этом подграфе, передается на отдельный процессор в качестве входных данных для алгоритма покрытия.

[7] Сервер математических моделей передает на каждый процессор в сервере планирования алгоритм покрытия вершин ориентированного графа множеством путей (подробнее см. в [43]). Рассмотрим реализацию этого алгоритма в отдельно взятом процессоре.

Алгоритм сначала формирует ориентированный граф зависимостей нормативных ниток. Получая на вход набор подниток, заданных станциями и временем начала и окончания движения, алгоритм формирует ориентированный граф зависимостей подниток $\vec{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$. В этом графе

дугами связываются такие поднитки n_i, n_j , для которых выполняются условия:

$$(n_i, n_j) \in \mathbb{E}: \begin{cases} s^H(n_j) = s^K(n_j) , \\ t^H(n_j) \geq t^K(n_j) + \Delta , \end{cases}$$

для заданного положительного Δ . С практической точки зрения эти условия означают, что, в случае неограниченных возможностей использования локомотивов в пределах своих плечей обслуживания, нормативные поднитки n_i, n_j могут быть исполнены с помощью одного и того же локомотива. Таким образом, каждый путь в ориентированном графе зависимостей нормативных подниток, будет характеризовать множество нормативных подниток, на исполнение которых будет назначен один и тот же локомотив.

В результате работы алгоритма в каждом процессоре формируется набор максимальных по включению путей. Причем, согласно принятым эвристическим ограничениям, этот набор будет содержать как можно меньшее число путей и как можно меньшее число вершин, входящих в несколько путей из этого набора. В терминах прикладной задачи это означает, что в плече обслуживания формируется назначение нормативных подниток на заданное множество локомотивов. При этом общее число задействованных локомотивов — наименьшее. Количество локомотивов, задействованных для исполнения каждой нормативной поднитки — наименьшее. И, кроме того, количество нормативных подниток, на исполнения которых назначено несколько локомотивов, также наименьшее. Последнее условие — это так называемая минимизация холостого хода локомотивов. В частности, если на исполнение некоторой нормативной поднитки назначено несколько локомотивов, то только один из них выполняет непосредственно задание, а остальные просто используют ее в целях перемещения в нужную станцию.

Сервер планирования возвращает в управляющую программу решение задачи о покрытии для каждого сильно связного подграфа.

На Рис. 14 приводится общая структура шагов [5–7] схемы функционирования вычислительного комплекса. Здесь, как и раньше, цветными блоками выделены алгоритмы. Прямоугольными блоками серого цвета (в том числе с пунктирным контуром) отмечены параллельные

процессоры, реализующие алгоритмы независимо для соответствующего набора входных данных.

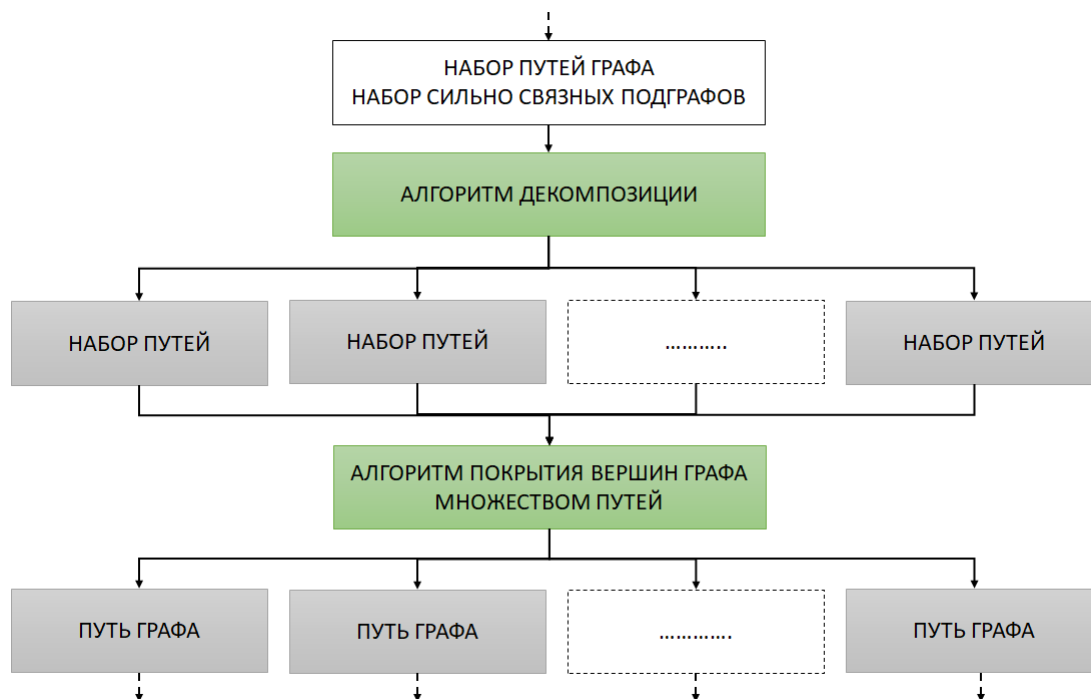


Рис. 14 Параллельная обработка данных в задаче о назначении и перемещении локомотивов

Подход, реализуемый в вычислительном комплексе для параллельной обработки данных с графовой структурой, позволяет существенно снизить вычислительные затраты на поиск приближенного решения исследуемой задачи высокой комбинаторной размерности.

[8] Управляющая программа получает нормативно-справочную информацию о принадлежности плечей обслуживания локомотивов различным участкам дорог (аналогично шагу [8] схемы функционирования вычислительного комплекса в приложении к решению прикладной задачи на этапе оптимизации процессов планирования грузовых железнодорожных перевозок).

[9] С учетом нормативно-справочной информации, полученной из сервера хранения данных, управляющая программа передает на сервер принятия решений назначения вида «НОРМАТИВНАЯ ПОДНИТКА — ЛОКОМОТИВ» с меткой соответствующего участка дороги.

[10] Сервер принятия решений преобразует полученные данные и передает на уровень пользователей в виде, доступном для дальнейшего использования.

Для реализации вышеописанных схем функционирования вычислительного комплекса был разработан комплекс проблемно ориентированных программ «Управление транспортными процессами в условиях противоречивости». Аналогично, этот комплекс программ, наряду с программной реализацией методов параллельной обработки данных с графовой структурой, является компонентой прикладного программного обеспечения вычислительного комплекса для решения задач анализа несовместных систем. В свою очередь, сам комплекс программ, также состоит из двух компонент. На Рис. 15, в рамках использования вычислительного комплекса для решения прикладной задачи, приводится схема взаимодействия этих компонент с другими компонентами.

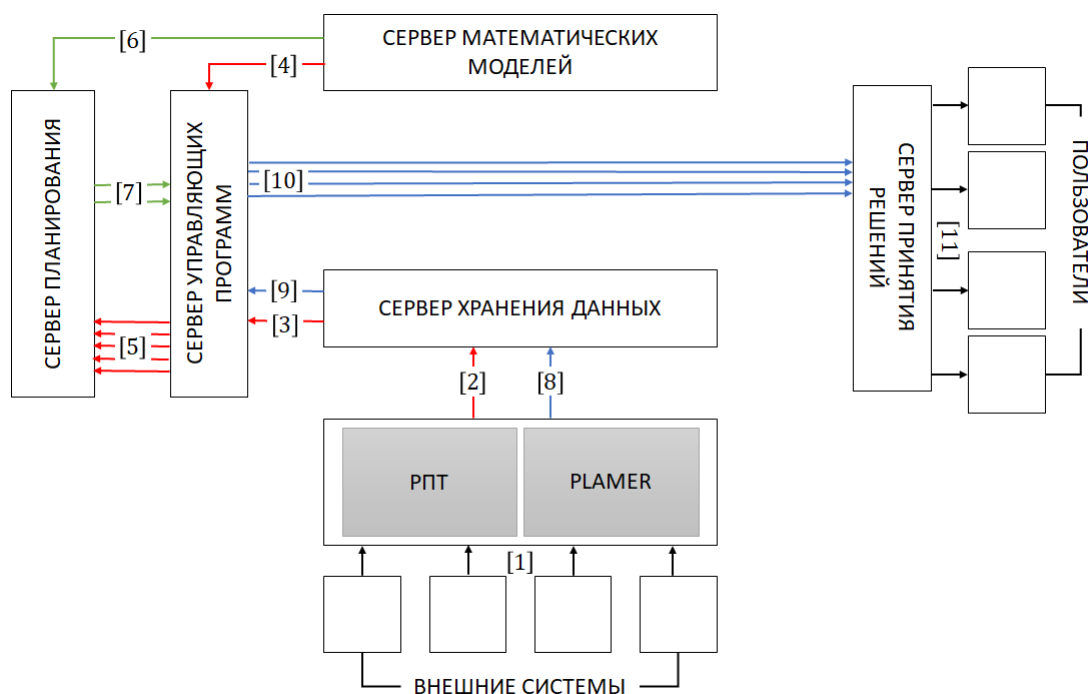


Рис. 15 Комплекс программ «Управление транспортными процессами в условиях противоречивости»

Программа «PLAMER» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612252) предназначена для почасового планирования местной работы. Функционал программы «PLAMER» состоит в следующем:

1. сбор информации о состоянии процессов грузоперевозки на станциях и парка подвижного состава,
2. формирование первичных сопроводительных документов грузов,
3. идентификация и дислокация подвижного состава,

4. контроль перемещений подвижного состава,
5. формирование выходных форм сопровождающих документов и отчетов,
6. своевременная передача информации на сервер хранения данных для оперативной ее доставки управляющему персоналу и на уровень пользователей.

Отметим, что в общем случае, информация, переданная из программы «PLAMER» на сервер хранения данных, может быть использована для формирования вариантного графика. Так, например, обработка этой информации является неотъемлемой составляющей этапа формирования размеров движения — количество перевозок, необходимых к отправке в заданном направлении и в заданный период времени.

Программа «Регистратор прохождения транспорта (РПТ)» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612253) используется на этапе планирования местной работы сортировочных станций. В частности, используя методы видеоанализа, программа «РПТ» осуществляет сбор информации о доступных ресурсах локомотивного парка и вагонов, готовых к формированию в состав. Все они имеют уникальный номер, который фиксируется в системе сканирования и сохраняется в базе данных. Программа «РПТ» оснащена также инструментами визуализации данных в формате, удобном для автоматизированных систем управления станционной работой (текстовый, xls, dbf и т.п.). На этапе мониторинга выполненных работ в программе предусмотрен автоматизированный учет движения железнодорожных вагонов. Режим функционирования программы «РПТ» может быть представлен следующим образом:

1. автоматическое определение прохождения вагонов и их подсчет на участке железнодорожного пути,
2. автоматическая видеосъемка проходящих вагонов и передача изображения каждого вагона на сервер хранения данных,
3. автоматический поиск на изображении номера вагона и его распознавание, а также передача номера на сервер хранения данных с возможностью последующего редактирования.
4. сбор информации о весе и типе вагона и передача этой информации на сервер хранения данных.

В результате работы программы «РПТ» в конце каждого отчетного периода автоматически формируется план перевозок для местной работы (в пределах сортировочных станций), формируется база данных о стадиях и уровнях исполнения этого плана, автоматическое перепланирование в случае не реализации ранее утвержденного плана, а также автоматическая посуточная оценка эффективности местной и станционной работы.

Выводы по Главе 6

В Главе 6 разрабатывается специальное программное обеспечение вычислительного комплекса. Приводится описание функционала и принципы взаимодействия программных средств, включая программную реализацию алгоритмов МО вычислительного комплекса. При этом специальное программное обеспечение, разрабатываемое в рамках диссертационной работы, включает комплексы программ для решения исследуемых прикладных задач и управляющие программы для реализации параллельной обработки данных в вычислительном комплексе.

Выводы по Главе 6.

1. Разработаны общая архитектура вычислительного комплекса и функционал составляющих элементов.

2. Разработана управляющая программа для организации параллельной обработки данных, возникающих в процессе управления технологическими маршрутами на дискретном производстве.

3. Разработан комплекс проблемно–ориентированных прикладных программ для решения задачи управления технологическими маршрутами на дискретном производстве, а также принципы его взаимодействия с другими компонентами вычислительного комплекса.

4. Разработана управляющая программа для организации параллельной обработки данных, возникающих в процессе управления транспортными процессами в условиях противоречивости.

5. Разработан комплекс проблемно–ориентированных прикладных программ для решения задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости, а также принципы его взаимодействия с другими компонентами вычислительного комплекса.

Заключение

В результате научного исследования, проведенного в диссертационной работе, получены следующие результаты.

1. Предложены новые методы разработки прикладного программного обеспечения, основанные на анализе несовместных систем и моделях массивно параллельной обработки данных. В рамках этих методов разрабатывается математическое и программное обеспечение вычислительных комплексов для решения задач в таких важных предметных областях как управление технологическими маршрутами на дискретном производстве и управление транспортными процессами в условиях противоречивости. Разработана общая архитектура вычислительного комплекса и функционал составляющих элементов.

2. Предложена структурная схема вычислительного комплекса, для которого в работе разрабатывается математическое и программное обеспечение. На этапе разработки математического обеспечения, вводится аксиоматическое определение монотонных несовместных систем условий общего вида. Рассмотрены основные классы моделей несовместных систем условий. Установлена взаимосвязь исследуемых задач анализа несовместных систем с задачей распознавания образов в геометрической постановке и с задачей расшифровки монотонных булевых функций.

3. Разработаны новые методы математического моделирования и анализа несовместных систем условий с позиций теории графов и комбинаторной оптимизации (графы систем независимости), комбинаторной геометрии (свойства семейств диагоналей и граней выпуклых многогранников) и теории булевых функций (максимальные верхние нули монотонных булевых функций).

4. Всесторонне рассмотрены свойства графов систем независимости для различных классов. Для ряда классов систем независимости, представляющих прикладной интерес, доказана связность графа системы независимости, вытекающая из связности соответствующего топологического пространства и являющаяся важнейшим свойством графа системы независимости. Это свойство эффективно используется при построении алгоритмов выделения экстремальных подсистем несовместных систем. Из этого результата выводится

целый ряд следствий о связности графов для различных классов систем независимости, в том числе для несовместных систем линейных неравенств.

5. Для класса систем независимости, порождаемых несовместными системами линейных неравенств, получены достаточные условия для более сильных типов связности графа МСП. Доказана теорема о существовании цикла нечетной длины в графе МСП. Получены оценки диаметра графа МСП, оценки степеней вершин графа МСП, а также оценка сверху длины нечетного цикла в графе МСП.

6. Впервые введено понятие G -диагонали выпуклого многогранника и установлена взаимосвязь между семействами МСП и МНП любой несовместной системы линейных неравенств и семействами G -диагоналей и граней соответствующего выпуклого многогранника, что позволило применить глубоко разработанный арсенал методов и средств комбинаторной геометрии для анализа несовместных систем линейных неравенств и получить оценки снизу для максимального числа МСП и новые результаты о комбинаторных свойствах выпуклых многогранников, которые описываются в терминах графов систем независимости двойственных конструкций. Показано, что классическая классификация многогранников по комбинаторному типу, определяемая изоморфизмом решеток граней, соответствует комбинаторной классификации по типу изоморфизма семейств G -диагоналей. Исследованы комбинаторные свойства конечномерных евклидовых пространств, представляющих все многообразие элементов семейства МНП несовместных систем линейных неравенств.

7. Построен новый приближенный алгоритм построения минимального комитета несовместной системы линейных неравенств и получена его оценка относительно решений, получаемых известными алгоритмами построения минимальных комитетов таких систем. Введен новый критерий оптимальности комитетной конструкции – мощность альтернативного покрытия. Предложено использовать минимальный комитет несовместной системы линейных неравенств, который имеет минимальную мощность в терминах альтернативных покрытий.

8. Построены новые полиномиальные эвристические алгоритмы дихотомии для решения многоклассовой задачи распознавания образов в геометрической постановке на этапе разделения обучающей выборки.

Эффективность разработанных алгоритмов показана в сравнении с алгоритмами полного перебора всех возможных решений и подтверждается результатами вычислительных экспериментов для случайных наборов векторов с подробным описанием генератора случайности.

9. Разработаны новые точные и приближенные комбинаторные и комбинаторно–графовые алгоритмы выделения всех МСП несовместных систем линейных неравенств. Актуальность приближенных алгоритмов связана с тем, что, с практической точки зрения оказывается достаточным выделение некоторого связного подграфа графа МСП, содержащего цикл нечетной длины.

10. Введен новый естественный критерий оптимальности алгоритма расшифровки монотонной булевой функции (МБФ), нормированный на общее число верхних нулей и нижних единиц МБФ и учитывающий объективную сложность задачи. Для МБФ, порождаемых несовместными системами линейных неравенств, построен оптимальный по этому критерию алгоритм.

11. Разработан новый полиномиальный эвристический алгоритм расшифровки МБФ, порождаемых неориентированными графами с абсолютной оценкой точности приближенного решения. Показана взаимосвязь задачи расшифровки МБФ и классической задачи комбинаторной оптимизации о наибольшем независимом множестве. Проведены вычислительные эксперименты на известных примерах графов из библиотеки DIMACS , для которых показана эффективность разработанного алгоритма в сравнении с известными быстрыми алгоритмами.

12. Разработан новый подход к оптимизации управления технологическими маршрутами на дискретном производстве, состоящий в формировании сети задач распознавания образов, решаемых с помощью разработанных в работе методов анализа несовместных систем.

13. Разработана модель параллельной обработки данных об исполненных технологических маршрутах, в основе которой лежат эффективные способы сбора и представления данных, а также способы организации классов.

14. Разработана новая математическая модель управления транспортными процессами в условиях противоречивости на примере задачи управления грузовыми железнодорожными перевозками и показано, что эта задача может быть решена методами анализа несовместных систем с помощью разрабатываемого в работе вычислительного комплекса. Показано,

что формирование множества бесконфликтных наборов нормативных ниток (потенциальных расписаний, допустимых для совместного исполнения) может быть сведено к расшифровке МБФ, порожденной неориентированным графом.

15. Разработан новый общий подход к декомпозиции набора ориентированных путей в графе на множестве сильно связанных подграфов этого графа. На основе этого подхода разработана модель параллельной обработки данных для задачи назначения локомотивов на исполнение ниток графика плана перевозок, имеющей высокую комбинаторную сложность. Важным преимуществом разработанной модели параллельной обработки является существенное снижение размерности задачи, что приобретает особую актуальность в условиях оперативной организации транспортных процессов.

16. Разработана управляющая программа для организации параллельной обработки данных в задаче управления технологическими маршрутами на дискретном производстве. Разработан комплекс проблемно-ориентированных прикладных программ для решения задач управления технологическими маршрутами на дискретном производстве, а также принципы его взаимодействия с другими компонентами вычислительного комплекса.

17. Разработана управляющая программа для организации параллельной обработки данных в задаче управления транспортными процессами в условиях противоречивости. Разработан комплекс проблемно-ориентированных прикладных программ для решения задачи управления транспортными процессами в условиях противоречивости, а также принципы взаимодействия его с другими компонентами вычислительного комплекса.

Список литературы

- [1] *Айгнер М.* Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982.
- [2] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977.
- [3] *Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А.* Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979.
- [4] *Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. Второе издание. — М.: Физматлит, 2012.
- [5] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. — М.: Бином, 2007.
- [6] *Андерсон Дж.* Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Издательский дом Вильямс, 2003.
- [7] *Андреев А. Е.* К проблеме минимизации дизъюнктивных нормальных форм // ДАН АН СССР, 1984, Т. 274, № 2, С. 265–269.
- [8] *Ансель Ж.* О числе монотонных булевых функций n переменных // Кибернетический сборник, 1968, № 5, С. 53–57.
- [9] *Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А., Шеврин Л. Н., Шульгейфер Е. Г.* Справочная математическая библиотека. — М.: Наука, 1991.
- [10] *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974.
- [11] *Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В.* Дискретная математика: Графы, матроиды, алгоритмы. — М.: РХД, 2001.
- [12] *Ашманов С. А., Тимохов А. В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1991.
- [13] *Баранов В. И., Стечкин Б. С.* Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. — М.: Физматлит, 2004.

- [14] *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — СПб.: Лань, 2008.
- [15] *Болтянский В. Г., Солтан П. С.* Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. — Кишинев: Штиинца, 1978.
- [16] *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и многообразия. — М.: Мир, 1977.
- [17] *Бренстед А.* Введение в теорию выпуклых многогранников. — М.: Мир, 1988.
- [18] *Бурбаки Н.* Элементы математики. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968.
- [19] *Бухштабер В. М., Панов Т. Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. — М.: Издательство МЦНМО, 2004.
- [20] *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988.
- [21] *Визильтер Ю. В., Буряк Д. Ю.* Автоматизированное конструирование процедур идентификации объектов, принадлежащих нескольким классам // Программирование, 2003, № 5(29), С. 3–10.
- [22] *Гайнанов Д. Н.* Комбинаторная геометрия и графы в анализе несовместных систем и распознавании образов. — М.: Наука, 2014. 173 с. ISBN 978-5-02-039095-9.
- [23] *Гайнанов Д. Н., Тягунов Л. И., Карапетян Э. Г., Мирзоев Р. Г.* Алгоритм выделения всех максимальных совместных подсистем несовместной системы линейных неравенств. Управление качеством промышленных изделий. — Л.: Издательство ЛГУ, 1977. С. 110–115.
- [24] *Гайнанов Д. Н., Федоров Е. В.* Планирование горнометаллургического производства: программы оптимизации. Вып. 7. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1977. С. 133–136.

- [25] *Гайнанов Д. Н.* Алгоритмы на графах, порождаемых противоречивыми системами условий, и их применение в задачах управления качеством. Дис. на соиск.уч.степ. канд. техн. наук. Свердловск, 1981.
- [26] *Гайнанов Д. Н.* О графах максимальных совместных подсистем несовместных систем линейных неравенств. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1981. 46 с. Деп. ВИНТИ № 229-81.
- [27] *Гайнанов Д. Н.* О разделении пространства семействами выпуклых конусов. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1981. 19 с. Деп. ВИНТИ 18.12.1980 № 230-81.
- [28] *Гайнанов Д. Н.* Двойственность минимальных несовместных подсистем несовместной системы линейных неравенств и кограней политопа. Методы математического программирования и их программное обеспечение. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1981. С. 39-40.
- [29] *Гайнанов Д. Н.* Разделение пространства выпуклыми конусами. Комбинаторные свойства выпуклых множеств и графов. — Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1983. С. 3-15.
- [30] *Гайнанов Д. Н.* Комбинаторные свойства систем независимости, порождаемых односторонними подмножествами точек на сфере // Первая конференция по комбинаторной геометрии и ее приложениям. — Батуми, 1985.
- [31] *Гайнанов Д. Н.* О связности графов некоторых классов систем независимости. Исследования по теории выпуклых множеств и графов. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 16-23.
- [32] *Гайнанов Д. Н., Новокшенов В. Ю., Тягунов Л. И.* О графах, порождаемых несовместными системами линейных неравенств // Математические заметки, 1983, Т. 33, № 2, С. 293-300.
- [33] *Гайнанов Д. Н.* Об одной критерии оптимальности алгоритма расшифровки монотонных булевых функций // ЖВМиМФ, 1984, Т. 8(24), С. 1250-1257.

- [34] *Гайнанов Д. Н.* О комбинаторных свойствах несовместных систем линейных неравенств и многогранников // Математические заметки, 1985, Т. 38, № 3, С. 463–474.
- [35] *Гайнанов Д. Н.* Теоретико-графовый алгоритм построения комитета несовместной системы линейных неравенств // ЖВМиМФ, 1986, Т. 9(26), С. 1431–1432.
- [36] *Гайнанов Д. Н., Гусак И. Я.* Комбинаторные свойства положительных базисов // Математические заметки, 1987, Т. 42, № 3, С. 463–474.
- [37] *Гайнанов Д. Н., Гусак И. Я.* Диагонали выпуклых многогранников // Математические заметки, 1991, Т. 49, № 4, С. 20–30.
- [38] *Гайнанов Д. Н., Коньгин А. В., Рассказова В. А.* Математическое моделирование грузовых железнодорожных перевозок методами теории графов и комбинаторной оптимизации // Автоматика и телемеханика, 2016, № 11, С. 60–79.
- [39] *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Алгоритм расшифровки монотонных булевых функций, порождаемых неориентированными графами // Вестник Южно-уральского государственного университета, 2016, № 9 (3), С. 17–30.
- [40] *Гайнанов Д. Н., Азанов В. М., Буянов М. В., Иванов С. В.* Алгоритмическое и программное обеспечение для назначения локомотивов с целью перевозки грузовых составов // Вестник Южно-уральского государственного университета, 2016, № 9 (4), С. 73–85.
- [41] *Гайнанов Д. Н., Кабаков П. З., Кабаков З. К., Бречалов А. С.* Системы управления качеством в металлургии: особенности, подходы и методы // Металлург, 2016, № 8, С. 4–8.
- [42] *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа в задаче о назначении и перемещении локомотивов // Труды МАИ, 2017, № 92. (электронный ресурс)
- [43] *Гайнанов Д. Н., Кибзун А. И., Рассказова В. А.* Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа минимальным числом простых

- ориентированных путей // Вестник компьютерных и информационных технологий, 2017, № 5, С. 51–56.
- [44] *Гайнанов Д. Н., Кибзун А. И., Рассказова В. А.* Задача о декомпозиции множества путей ориентированного графа и ее приложение // Автоматика и телемеханика (принята к публикации).
- [45] *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Теоретико–графовый алгоритм решения задачи о назначении и перемещении локомотивов // XLII международная научная конференция «Гагаринские чтения». — Москва, 2016. М.: МАИ. (2016) 1: 203–204.
- [46] *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Алгоритм вершинного покрытия для минимизации холостого хода в задаче назначения и перемещения локомотивов // XXI международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация». — Евпатория, 2016. М.: МАИ (2016): 133–134.
- [47] *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Покрытие вершин графа в задаче о назначении локомотивов // Всероссийская научная конференция «Управление большими системами». — Самара, 2016. М.: ИПУ РАН. (2016): 312.
- [48] *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Покрытие вершин графа в задаче оптимального назначения и перемещения локомотивов // Международная научная конференция «Математика, информатика и физика и их приложения в науке и образовании». — Москва, 2016. М.: МИРЭА. (2016): 83–85.
- [49] *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Математическое моделирование в задаче планирования железнодорожных перевозок // XLIII международная научная конференция «Гагаринские чтения». — Москва, 2017. М.: МАИ. (2017): 703–704.
- [50] *Гайнанов Д. Н., Рассказова В. А.* Покрытие вершин ориентированного графа в задаче о назначении и перемещении локомотивов // XXII международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация». — Евпатория, 2017. М.: МАИ. (2017): 121–122.

- [51] *Гайнанов Д. Н., Кибзун А. И., Рассказова В. А.* Декомпозиция путей ориентированного графа в задаче организации грузового железнодорожного движения // XXII международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация». — Евпатория, 2018.
- [52] *Гайнанов Д. Н.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011611453. Expert Base / Гайнанов Д. Н., Беренов Д. А. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 14.02.2011.
- [53] *Гайнанов Д. Н.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612252. PLAMER / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29.02.2012.
- [54] *Гайнанов Д. Н.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612253. РПТ / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29.02.2012.
- [55] *Гайнанов Д. Н.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014662444. Data-Track / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 01.12.2014.
- [56] *Гайнанов Д. Н.* Патент на изобретение № 2250151. Способ производства тонкого металлического листа из тонкой литой полосы и автоматизированная линия технологического оборудования для производства тонкого металлического листа из тонкой литой полосы / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Государственном Реестре изобретений 20.04.2005. Срок действия патента истекает 16.09.2023.
- [57] *Гайнанов Д. Н.* Патент на изобретение № 2260495. Способ производства качественной прутковой металлопродукции / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Государственном Реестре изобретений РФ 20.09.2005. Срок действия патента истекает 27.02.2024.
- [58] *Гайнанов Д. Н.* Патент на изобретение № 2261477. Способ и устройство автоматизированного видеоанализа темплетов при непрерывном литье заготовок на мнлз (система сват) / Гайнанов Д. Н. [и др.].

Зарегистрировано в Государственном Реестре изобретений РФ 27.09.2005.
Срок действия патента истекает 21.04.2023.

- [59] *Гайнанов Д. Н.* Патент на изобретение № 25773855. Способ слежения за перемещением материала на производстве и в складских помещениях / Гайнанов Д. Н. [и др.]. Зарегистрировано в Государственном Реестре изобретений РФ 23.12.2014. Срок действия патента истекает 22.08.2034.
- [60] *Гейл Д.* Соседние вершины выпуклого многогранника. Линейные неравенства и смежные вопросы. — М.: ИЛ, 1959.
- [61] *Гимади Э. Х., Цидулко О. Ю.* Асимптотически точный алгоритм для задачи нескольких коммивояжеров на случайных входных данных с дискретным распределением // Дискретный анализ и исследование операций, 2017, № 3, С. 5–19.
- [62] *Гимади Э. Х., Хачай М. Ю.* Экстремальные задачи на множествах перестановок. — Екатеринбург: Издательство УМЦ УПИ, 2016. — 220 с.
- [63] *Васильев Ю. Л., Глаголев В. В., Коробков В. К.* Метрические исследования в дискретном анализе // Проблемы кибернетики, 1973, № 27, С. 63–73.
- [64] *Гордеев Э. Н.* Новые оценки в задаче о покрытии // Моделирование и оптимизация сложных систем управления. М.: Наука, 1981. С. 116–121.
- [65] *Гретцер Г.* Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982.
- [66] *Гусак И. Я., Устинов Г. М.* Преобразования и диаграммы Гейла — метод комбинаторной геометрии // Комбинаторные свойства выпуклых множеств и графов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. С. 16–33.
- [67] *Еремеев А. В., Долгий А. Б., Сигаев В. С.* Анализ задачи многокритериальной оптимизации емкости бункеров в производственной линии // Автоматика и телемеханика, 2017, № 7, С. 125–140.
- [68] *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981.

- [69] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.
- [70] *Еремин И. И.* Линейная оптимизация и системы линейных неравенств. — М.: Издательский центр Академия, 2007.
- [71] *Еремин И. И.* Противоречивые модели оптимального планирования. — М.: Наука, 1988.
- [72] *Еремин И. И.* Противоречивые модели экономики. — Свердловск: Средне-Уральское книжное издательство, 1986.
- [73] *Еремин И. И.* Теория линейной оптимизации. — Екатеринбург: Экономико-математическая литература, 1999.
- [74] *Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Астафьев Н. Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. — М.: Наука, 1983.
- [75] *Журавлев Ю. И.* Алгоритмы построения минимальных ДНФ для функций алгебры логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. С. 67–82.
- [76] *Журавлев Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики, 1978, № 33, С. 5–68.
- [77] *Журавлев Ю. И.* Об алгоритмах упрощения дизъюнктивных нормальных форм // ДАН АН СССР, 1960, Т. 132, № 2, С. 260–263.
- [78] *Журавлев Ю. И.* Оценки сложности алгоритмов построения минимальных ДНФ для функций алгебры логики // Дискретный анализ, 1964, № 3, С. 41–47.
- [79] *Закревский А. Д.* К минимизации дизъюнктивных нормальных форм булевых функций // Известия АН СССР, 1970, № 4, С. 102–104.
- [80] *Закревский А. Д.* О сокращении переборов при решении некоторых задач синтеза дискретных автоматов // Изв. ВУЗов, 1964, Т. 8, № 1, С. 166–174.

- [81] *Зуев Ю. А.* Задача о покрытии: локальный подход и метод ветвей и границ // ЖВМиМФ, 1979, Т. 19, № 6, С. 1566–1576.
- [82] *Зыков А. А.* О некоторых свойствах линейных комплексов // Матем. сборник, 1949, Т. 24, № 2, С. 163–188.
- [83] *Зыков А. А.* Основы теории графов. — М.: Наука, 1987.
- [84] *Ипатов А. А.* CALS технологии — важный элемент реструктуризации отечественной автомобильной промышленности и средство ее интегрирования в мировую экономику // Автомобильная промышленность, 2002, № 12, С. 1.
- [85] *Ипатов А. А., Карницкий В. В., Минкин И. М.* АТС с комбинированными силовыми установками // Автомобильная промышленность, 2002, № 7, С. 36.
- [86] *Исаев И. В.* Задача синтеза корректного алгоритма распознавания как задача построения минимального покрытия // ЖВМиМФ, 1984, Т. 23, № 2, С. 467–476.
- [87] *Каркищенко А. Н., Гончаров А. В.* Исследование устойчивости знакового представления изображений // Автоматика и телемеханика, 2010, № 9, С. 57–69.
- [88] *Келли Дж. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1968.
- [89] *Кельманов А. В.* О сложности некоторых задач анализа данных // ЖВМиМФ, 2010, Т. 50, № 11, С. 2045–2051.
- [90] *Кельманов А. В., Долгушев А. В.* Приближенный алгоритм решения одной задачи кластерного анализа // Дискретный анализ и исследование операций, 2011, Т. 18, № 2(98), С. 29–40.
- [91] *Кибзун А. И., Иванов С. В., Осокин А. В.* Оптимизационная стохастическая модель назначения локомотивов для перевозки грузовых составов // Автоматика и телемеханика, 2016, № 11, С. 80–95.
- [92] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981.

- [93] *Коробков В.К.* О некоторых целочисленных задачах линейного программирования // Проблемы кибернетики, 1965, № 14, С. 297–299.
- [94] *Коршунов А.Д.* Монотонные булевы функции // Успехи математических наук, 2003, Т. 58, № 5(353), С. 89–162.
- [95] *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. — М.: Наука, 1975.
- [96] *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978.
- [97] *Лазарев А. А., Мусатова Е. Г., Гафаров Е. Р., Кварацхелия А. Г.* Теория расписаний. Задачи железнодорожного планирования. — М.: ИПУ РАН, 2012. — 92 с.
- [98] *Лазарев А. А., Мусатова Е. Г., Кварацхелия А. Г., Гафаров Е. Р.* Теория расписаний. Задачи управления транспортными системами. — М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012. — 159 с.
- [99] *Лазарев А. А., Бронников С. В., Герасимов А. Р., Мусатова Е. Г., Петров А. С., Пономарев К. В., Харламов М. М., Хуснуллин Н. Ф., Ядренцев Д. А.* Математическое моделирование планирования подготовки космонавтов // Управление большими системами, 2016, № 63, С. 129–154.
- [100] *Лазарев А. А., Гафаров Е. Р., Вернер Ф.* Алгоритмы решения задач максимизации суммарного запаздывания и максимизации количества запаздывающих требований для одного прибора // Автоматика и телемеханика, 2010, № 10, С. 63–79.
- [101] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.
- [102] *Лидл Р., Пилъц Г.* Прикладная абстрактная алгебра. — Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 1996.
- [103] *Логачев О. А., Сальников А.А., Яценко В.В.* Булевы функции в теории кодирования и криптологии. — М.: Издательство МЦНМО, 2004.
- [104] *Мазуров Вл. Д.* Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. — М.: Наука, 1990.

- [105] *Мазуров Вл. Д.* О комитете системы выпуклых неравенств // Труды ИСМ, 1966, № 14, С. 41.
- [106] *Мазуров Вл. Д.* О построении комитета системы выпуклых неравенств // Кибернетика, 1967, № 2, С. 56–59.
- [107] *Мазуров Вл. Д., Казанцев В. С., Белецкий И. Г., Кривоногов А. И., Смирнов А. И.* Вопросы обоснования и применения комитетных алгоритмов распознавания // Распознавание, классификация, прогноз, 1988, № 1, С. 114–148.
- [108] *Мазуров Вл. Д., Хачай М. Ю.* Комитетные конструкции // Известия Уральского гос. ун-та, 1999, Т. 14, № 2, С. 77–108.
- [109] *Мазуров Вл. Д., Хачай М. Ю.* Комитеты систем линейных неравенств // Автоматика и телемеханика, 2004, № 2, С. 43–54.
- [110] *Мазуров Вл. Д., Хачай М. Ю., Рыбин А. И.* Комитетные конструкции для решения задач выбора, диагностики и прогнозирования // Труды ИММ УрО РАН, 2002, Т. 8, № 1, С. 66–102.
- [111] *Марченков С. С.* Булевы функции. — М.: Физматлит, 2002.
- [112] *Матвеев А. О.* Комплексы систем представителей в исследовании комбинаторных свойств частично упорядоченных множеств и несовместных систем линейных неравенств. Дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Екатеринбург, 1994.
- [113] *Мельников А. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А., Скорняков Л. А., Шестаков И. П.* Общая алгебра. — М.: Наука, 1990.
- [114] *Минк Х.* Перманенты. — М.: Мир, 1982.
- [115] *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1990.
- [116] *Михайлюк М. В., Тимохин П. Ю., Мальцев А. В.* Метод тесселяции на GPU рельефа земли для космических видеотренажеров // Программирование, 2017, № 4, С. 39–47.

- [117] *Михайлюк М. В., Тимохин П. Ю., Торгашев М. А.* Метод реализации тонального отображения и эффекта заплывания в режиме реального времени // Программирование, 2015, № 5, С. 58–65.
- [118] *Михайлюк М. В., Торгашев М. А.* Моделирование и визуализация трехмерных пультов управления в тренажерах // Научная визуализация, 2014, Т. 6, № 4, С. 50–60.
- [119] *Михайлюк М. В., Торгашев М. А.* Визуализация динамики объектов управления в реальном времени // Научная визуализация, 2014, Т. 6, № 5, С. 69–80.
- [120] *Наумов А. В., Уланов С. В.* Учет риска в двухэтапных задачах оптимального распределения ресурсов // Автоматика и телемеханика, 2003, № 7, С. 109–116.
- [121] *Нигматуллин Р. Г.* Метод наискорейшего спуска в задачах на покрытие // Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов. Труды симпозиума. 5. — Киев, 1970. С. 116–126.
- [122] *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. — М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1991.
- [123] *Новоселов В. Г.* Минимизация булевых функций (обзор) // Итоги исследований по кибернетике. Томск, 1968. С. 40–60.
- [124] *Носов В. А., Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Комбинаторный анализ. Матричные проблемы. Теория выбора // Теоретическая вероятность. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 18. М.: ВИНТИ АН СССР, 1981. С. 53–93.
- [125] *Носов В. А., Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Комбинаторный анализ. Неотрицательные матрицы. Алгоритмические проблемы // Теоретическая вероятность. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 21. М.: ВИНТИ АН СССР, 1983. С. 120–178.
- [126] *Осис Я. Я.* Алгоритм нахождения квазиоптимального покрытия множества // Автоматика и вычислительная техника, 1969, № 2, С. 94–96.

- [127] *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985.
- [128] *Прасолов В. В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. — М.: Издательство МЦНМО, 2004.
- [129] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1993.
- [130] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. Метрическая теория. Спецкурс. — М.: МГУ, 1975.
- [131] *Сапоженко А. А.* О поиске максимального верхнего нуля монотонных функций на ранжированных частично упорядоченных множествах // ЖВМиМФ, 1991, Т. 31, № 12, С. 1871–1884.
- [132] *Сапоженко А. А.* Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. — М.: Физматлит, 2009.
- [133] *Сапоженко А. А., Чухров И. П.* Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Теоретическая вероятность. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 25. М.: ВИНТИ АН СССР, 1987. С. 68–116.
- [134] *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Издательство МЦНМО, 2004.
- [135] *Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Комбинаторика неотрицательных матриц // Прогресс теоретической и прикладной математики, т. 2. М.: Научное издательство ТВП, 2000.
- [136] *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984.
- [137] *Селиванов С. Г., Никитин В. В., Селиванова М. В., Габитова Г. Ф.* Нейросетевой и логико-генетический методы оптимизации межцеховых технологических маршрутов в автоматизированных системах технологической подготовки производства // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета, 2013, Т. 17, № 5(58), С. 55–62.

- [138] *Смирнов В. А.* Симплициальные и операдные методы в алгебраической топологии. — М.: Факториал Пресс, 2002.
- [139] *Соколов Н. А.* Об оптимальной расшифровке монотонных функций алгебры логики // ЖВМиМФ, 1982, 22, № 2, С. 449–461.
- [140] *Спенсьер Э.* Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.
- [141] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990.
- [142] *Тараканов В. Е.* Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. — М.: Наука, 1985.
- [143] *Тараканов В. Е.* Максимальная глубина произвольных классов (0,1)-матриц // Математический сборник, 1973, Т. 92(134), № 3, С. 472–490.
- [144] *Тараканов В. Е.* О глубине (0,1)-матриц с одинаковыми строчными и одинаковыми столбцевыми суммами // Математические заметки, 1983, Т. 34, № 3, С. 463–476.
- [145] *Татт У.* Теория графов. — М.: Мир, 1988.
- [146] *Тимофеева Г. А., Завалищин Д. С.* Задача управления запасами при неточно заданном распределении спроса // Экономика и менеджмент систем управления, 2015, Т. 18, № 4.3, С. 366–372.
- [147] *Тимофеева Г. А., Завалищин Д. С.* Динамическая постановка задачи построения оптимального маршрута мультимодальной перевозки в условиях неопределенности // Экономика и менеджмент систем управления, 2017, Т. 26, № 4.2, С. 294–300.
- [148] *Тимофеева Г. А., Бондарчук Д. В.* Математические основы метода категориальных векторов в интеллектуальном анализе данных // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения, 2015, № 4(28), С. 4–8.
- [149] *Тимофеева Г. А., Завалищин Д. С.* Транспортная сеть с неопределенными параметрами: оптимизация маршрута // Транспорт Урала, 2013, № 3(38), С. 3–6.

- [150] *Тришин В. Н.* Адаптивный алгоритм для решения многомерной задачи о ранге и распознавания монотонной булевой функции // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1982, № 4, С. 11–18.
- [151] *Тягунов Л. И.* О выделении последовательности максимальных совместны подсистем несовместной системы линейных неравенств. Математические методы планирования и управления в больших системах. ИММ УНЦ АН СССР, Свердловск. Деп. в ВИНТИ, № 7467-23. С. 152–162.
- [152] *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. — М.: Физматлит, 2006.
- [153] *Хамадеев Ш. А., Симонова Л. А., Илюхин А. К.* База прецедентов технологических маршрутов штамповочного производства в рамках MES-систем // Кузнечно-штамповочное производство, 2009, № 8, С. 29–35.
- [154] *Хамадеев Ш. А., Симонова Л. А., Костюк И. В.* Методика выбора технологического маршрута по комплексу критериев // Кузнечно-штамповочное производство, 2007, № 11, С. 38–45.
- [155] *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.
- [156] *Хачай М. Ю.* Об оценке числа членов минимального комитета системы линейных неравенств // ЖВМиМФ, 1997, Т. 37, № 11, С. 1399–1404.
- [157] *Хачай М. Ю.* О существовании комитета большинства // Дискретная математика, 1997, Т. 9, № 3, С. 82–95.
- [158] *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. — Киев: Вища школа, 1971.
- [159] *Черников С. Н.* Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.
- [160] *Чернышев Ю. О., Насекин В.Ю.* К решению задачи о покрытии градиентным алгоритмом // Кибернетика, 1976, № 4, С. 85–88.
- [161] *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
- [162] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

- [163] Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Труды Математического института АН СССР, 1958, Т. 51, № 2, С. 5–142.
- [164] Ablow C. M., Kaylor D. J. A committee solution of the pattern recognition problem // IEEE Transactions, IT-11, 1965, no. 3, pp. 452–455.
- [165] Ablow C. M., Kaylor D. J. Inconsistent homogeneous linear inequalities // Bulletin of the American Mathematical Society, 1965, vol. 71, no. 5, pp. 724.
- [166] Ageev M., Dobrov B., Loukachevitch N. Socio-political thesaurus in concept-based information retrieval // LNCS, 2006, no. 4022, pp. 141–150.
- [167] Altshuller A., Perles M. A. Quotient polytopes of cyclic polytopes // Israel Journal of Mathematics, 1980, vol. 36, no. 2, pp. 97–125.
- [168] Aurenhammer F. Using Gale transforms in computational geometry // Applications of mathematical programming (Tokyo, 1988). Math. Programming Ser. B, 1991, vol. 52, no. 1, pp. 179–190.
- [169] Bachem A., Euler R. Recent trends in combinatorial optimization // OR Spectrum, 1984, vol. 6, no. 1, pp. 1–21.
- [170] Boros E., Hammer P., Ibaraki T., Kawakami K. Polynomial time recognition of 2-monotonic positive Boolean functions given by an oracle // SIAM J. Comput., 1997, no. 26, pp. 93–109.
- [171] Bioch J. C., Ibaraki T., Makino K. Minimum self-dual decompositions of positive dual-minor Boolean functions // Discrete Applied Mathematics, 1999, no. 96–97, pp. 307–326.
- [172] Bit-Shun Tam Diagonals of convex sets // Tamkang Journal of Mathematics, 1983, vol. 14, no. 1, pp. 91–102.
- [173] Conn A. R., Scheinberg K., Vicente L. N. Introduction to derivative-free optimization. MPS/SIAM series on optimization, 8. Society for industrial and applied mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical programming society (MPS), Philadelphia, PA, 2009.

- [174] *Crama Y., Hammer P. L.* (eds.) Boolean models and methods in mathematics, computer science, and engineering. Encyclopedia of mathematics and its applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [175] *Davis C.* Theory of positive linear dependence // American Journal of Mathematics, 1954, vol. 76, no. 4, pp. 733–746.
- [176] *Dasgupta S., Papadimitriou C., Vazirani U.* Algorithms. — McGraw–Hill, 2006.
- [177] *Diestel R.* Graph theory. Graduate texts in mathematics. — Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [178] *Domingo C., Mishra N., Pitt L.* Efficient read-restricted monotone CNF/DNF dualization by learning with membership queries // Machine Learning, 1999, no. 37(1), pp. 89–110.
- [179] *Eckhoff J.* On a class of convex polytopes // Israel Journal of Mathematics, 1976, vol. 23, no. 3–4, pp. 332–336.
- [180] *Edmonds J., Fulkerson D. R.* Bottleneck extrema // Journal of Combinatorial Theory, 1970, no. 8, pp. 299–306.
- [181] *Eiter T., Makino K., Gottlob G.* Computational aspects of monotone dualization: A brief survey // Discrete Applied Mathematics, 2008, no. 156(11), pp. 2035–2049.
- [182] *Eremeev A., Guschinskaya O., Gurevsky E., Dolgui A.* Metaheuristic approaches for the design of machining lines // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2011, vol. 55, no. 1, pp. 11–22.
- [183] *Fiedler M., Ptak V.* Diagonals of convex sets // Czechoslovak Mathematical Journal, 1978, vol. 28(108), no. 1, pp. 25–44.
- [184] *Füredi Z.* Matchings and covers in hypergraphs // Graphs and Combinatorics, 1988, no. 4, pp. 115–206.
- [185] *Gainanov D. N.* Graphs for Pattern Recognition. Infeasible Systems of Linear Inequalities. — DeGruyter, 2016. 152 pp. ISBN 978-3-11-048106-8.

- [186] *Gainanov D. N., Matveev A. O.* Lattice diagonals and geometric pattern recognition problems // Pattern Recognition and Image Analysis, 1991, vol. 1, no. 3, pp. 277–282.
- [187] *Gainanov D. N.* Alternative covers and independence systems in pattern recognition // Pattern Recognition and Image Analysis, 1992, vol. 2, no. 2, pp. 147–160.
- [188] *Gainanov D. N., Matveev A. O.* Finite lattice diagonals and their relation to pattern recognition // Pattern Recognition and Image Analysis, 1993, vol. 3, no. 2, pp. 84–91.
- [189] *Gainanov D. N., Akimova E. N., Golubev O. A., Kolmogorcev I. D., Konygin A. V.* The problem of scheduling for the linear section of a single-track railway with independent edges orientations // CEUR Workshop Proceedings, 2015, vol. 1513, pp. 130–136.
- [190] *Gainanov D. N., Akimova E. N., Golubev O. A., Kolmogorcev I. D., Konygin A. V.* Optimal scheduling for the linear section of a single-track railway with independent edges orientations // Applied Mathematics and Information Sciences, 2016, vol. 10, no. 5, pp. 1763–1768.
- [191] *Gainanov D. N., Akimova E. N., Golubev O. A., Kolmogorcev I. D., Konygin A. V.* The problem of scheduling for the linear section of a single-track railway // AIP Conference Proceedings, 2016, vol. 1738, pp. 110005.
- [192] *Gainanov D. N., Berenov D. A.* Big Data Analytics and Pattern Recognition Methods in the Problem of Optimization of Technological Processes in Metallurgical Production // Journal of Physics: Conference Series (JPCS), 2017, vol. 913, no. 1, pp. 012003.
- [193] *Gainanov D. N., Berenov D. A.* Algorithm for Predicting the Quality of the Product of Metallurgical Production // CEUR Workshop Proceedings, 2017, vol. 1987, pp. 194–200.
- [194] *Gainanov D. N., Berenov D. A.* Algorithm for Predicting the Quality of the Product of Metallurgical Production Based on Technological Pyramids in Graphs // Optimization Letters (submitted).

- [195] *Gainanov D., Mladenovic N., Rasskazova V., Urosevic D.* Heuristic Algorithm for Finding the Maximum Independent Set with Absolute Estimate of the Accuracy // CEUR Workshop Proceedings. (submitted)
- [196] *Gainanov D., Mladenovic N., Berenov D.* Dichotomy algorithms in the multi-class problem of pattern recognition // Springer Proceedings in Business and Economics. (submitted)
- [197] *Gainanov D., Mladenovic N., Rasskazova V. A.* The Largest Independent Set in the Problem of Planning of the Freight Railway Transportations // Frontiers of Engineering Management (submitted).
- [198] *Gainanov D. N., Berenov D. A.* Algorithm for predicting the Quality of the product of Metallurgical Production // 3d International Conference and Expo «Big Data and Advanced Analytics». — Belarus', Minsk, 2017.
- [199] *Gainanov D. N., Berenov D. A.* Big Data Analytics and Pattern Recognition Methods in the Problem of Optimization of Technological Processes in Metallurgical Production // International Conference on Big Data and Its Applications (ICBDA 2017). — Moscow, 2017.
- [200] *Gainanov D. N., Berenov D. A.* Algorithm for Predicting the Quality of the Product of Metallurgical Production // VIII International Conference on Optimization Methods and Applications (OPTIMA 2017). — Montenegro, Petrovac, 2017.
- [201] *Gainanov D., Mladenović N., Rasskazova V., Urosević D.* Two-sided estimate of the maximum independent set of vertices in an undirected graph // XIII Balkan Conference on Operational Research (BALCOR-2018). — Serbia, Belgrade, 2018.
- [202] *Gainanov D., Mladenović N., Rasskazova V., Urosević D.* Heuristic algorithm for the maximum independent set with absolute estimate of the accuracy // VII Int. Conf. on Optimization Problems and Their Applications (OPTA-2018). — Omsk, 2018.
- [203] *Gainanov D., Mladenović N., Rasskazova V., Urosević D.* Constructive heuristic with guaranteed bounds (CHwGB) // VIII Int. Conf. on Optimization

- Methods and Applications (OPTIMA 2018). — Montenegro, Petrovac, 2018. (submitted)
- [204] *Gafarov E. R., Dolgui A., Werner F.* A new graphical approach for solving single-machine scheduling problems approximately // International Journal of Production Research, 2014, vol. 52, no. 13, pp. 3762–3777.
- [205] *Gimadi E. K., Glebov A. N., Skretneva A. A., Tsidulko O. Y., Zambalaeva D. Z.* Combinatorial algorithms with performance guarantees for finding several hamiltonian circuits in a complete directed weighted graph // Discrete Applied Mathematics, 2015, vol. 196, pp. 54–61.
- [206] *Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.* Geometric algorithms and combinatorial optimization. Algorithms and combinatorics. — Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [207] *Grünbaum B.* Convex polytopes. Graduate texts in mathematics. — New York: Springer-Verlag, 2003.
- [208] *Ding-Zhu Du, Pardalos P. M.* (eds.) Handbook of combinatorial optimization. — Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [209] *Kalai G.* Polytope skeletons and paths // CRC Handbook of discrete and computational geometry. Second edition, *J.E. Goodman* and *J. O'Rourke* (eds.), Ser. Discrete Math. Appl., CRC. — Boca Raton FL: CRC Press, 2004. pp. 455–476.
- [210] *Kalai G.* Some aspects of the combinatorial theory of convex polytopes // Polytopes: abstract, convex and computational (Scarborough, ON, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 440. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. pp. 205–229.
- [211] *Kalai G.* Rigidity and the lower bound theorem // Invent. Math., 1987, vol. 88, no. 1, pp. 125–151.
- [212] *Karkishchenko A. N., Mnukhin V. B.* Reflective symmetrization of images // Pattern Recognition and Image Analysis, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 33–40.
- [213] *Karkishchenko A. N., Bronevich A. G.* On a method of ranking questions in expert systems // Journal of Computer and Systems Sciences International, 1996, vol. 35, no. 2, pp. 315–320.

- [214] *Karkishchenko A. N., Bronevich A. G., Umanskiy V. I.* Statistical method of restoring the profile from laser scanning data // *Digital Signal Processing*, 2011, no. 4, pp. 42.
- [215] *Kibzun A. I., Khromova O. M.* Mathematical modelling of a transport system with minimal maintenance costs // *Bulletin of the South Ural State University*, 2016, no. 3(9), pp. 41–54.
- [216] *Kibzun A. I., Buyanov M. V.* Algorithm of effective transportation work for cargo traffic // *Bulletin of the South Ural State University*, 2018, no. 1(11), pp. 75–83.
- [217] *Kochetov Y. A., Kononova P. A.* The variable neighborhood search for the two machine flow shop problem with a passive prefetch // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2013, vol. 7, no. 1, pp. 54–67.
- [218] *Kochetov Y., Khmelev A.* A hybrid local search for the split delivery vehicle routing problem // *International Journal of Artificial Intelligence*, 2015, vol. 13, no. 1, pp. 147–164.
- [219] *Korte B., Vygen J.* Combinatorial optimization. Theory and algorithms. — Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [220] *Lazarev A. A., Musatova E. G.* The problem of trains formation and scheduling: integer statements // *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 12, pp. 2064–2068.
- [221] *Lazarev A. A., Musatova E. G., Tarasov I. A.* Two-directional traffic scheduling problem for a single-track railway with siding // *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 12, pp. 2118–2131.
- [222] *Lazarev A. A., Werner F.* A graphical realization of the dynamic programming method for solving NP-hard combinatorial problems // *Computers & Mathematics with Applications*, 2009, vol. 58, no. 4, pp. 619–631.
- [223] *Lawler E. L.* Combinatorial optimization. Networks and matroids. — New York: Dover Publications Inc., 2001.

- [224] *Lawler E. L.* Covering problems: duality relations and a new method of solution // *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1966, no. 14, pp. 1115–1132.
- [225] *Lehman A.* A solution of the Shannon switching game // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1964, no. 12, pp. 687–725.
- [226] *Li C.* (eds.) Combining MaxSAT Reasoning and Incremental Upper Bound for the Maximum Clique Problem // *IEEE 25th International Conference on Tools with Artificial Intelligence (2013)*: 939–946.
- [227] *Lovász L., Plummer M. D.* Matching theory. *Annals of discrete mathematics*. — Amsterdam: North Holland, 1986.
- [228] *Makino K., Ibaraki T.* A fast and simple algorithm for identifying 2-monotonic positive Boolean functions // *Journal of Algorithms*, 1998, no. 26(2), pp. 291–305.
- [229] *Makino K., Ibaraki T.* The maximum latency and identification of positive Boolean functions // *SIAM J. Comput.*, 1997, no. 26, pp. 1363–1383.
- [230] *Marcus D. A.* Gale diagrams of convex polytopes and positive spanning sets of vectors // *Discrete Applied Mathematics*, 1984, no. 4, pp. 47–67.
- [231] *Matoušek J.* Lectures on discrete geometry. — New York: Springer-Verlag, 2002.
- [232] *McMullen P.* Transforms, diagrams and representations. *Contributions to geometry*. — Basel: Birkhauser, 1979. P. 92–130.
- [233] *McMullen P., Shephard G. C.* Convex polytopes and the upper bound conjecture. Prepared in collaboration with *J.E. Reeve* and *A.A. Ball*. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 3. — Cambridge: Cambridge University Press, 1971.
- [234] *Mirsky L.* Transversal theory. — New York: Academic Press, 1971.
- [235] *Mirsky L., Perfect H.* Systems of representatives // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1966, no. 15, pp. 520–568.

- [236] *Nagel U.* Empty simplices of polytopes and graded Betti numbers // *Discrete Comput. Geom.*, 2008, vol. 39, no. 1-3, pp. 389–410.
- [237] *Nikolaev A., Batsyn M., San Segundo P.* Reusing the Same Coloring in the Child Nodes of the Search Tree for the Maximum Clique Problem // *LNCS*, 2015, no. 8994, pp. 275–280.
- [238] *Reay J. R.* Generalizations of a theorem of Carathéodory // *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1965, no. 54, pp. 253–261.
- [239] *Reay J. R.* Positive bases as a tool in convexity // *Proceedings of the Colloquium on Convexity. Copenhagen (1965)*: 255–260.
- [240] *Reay J. R.* Unique minimal representations with positive bases // *American Mathematical Monthly*, 1966, vol. 73, no. 4, pp. 253–261.
- [241] *Rotman J. J.* *An introduction to algebraic topology.* — New York: Springer-Verlag, 1988.
- [242] *San Segundo P et al.* Infra-chromatic Bound for Exact Maximum Clique Search // *Computers & Operations Research*, 2015, no. 64, pp. 293–303.
- [243] *Shephard G. C.* Diagrams for positive bases // *Journal of the London Mathematical Society*, 1971, vol. 4, no. 1, pp. 165–175.
- [244] *Schneider R.* *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- [245] *Stanley R. P.* *Combinatorics and commutative algebra.* — Boston: Birkhauser, 1983.
- [246] *Thomas R. R.* *Lectures in geometric combinatorics.* Student Mathematical Library, 33. IAS/Park City Mathematical Subseries. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2006.
- [247] *Torvik V. I.* *Data mining and knowledge discovery: A guided approach based on monotone Boolean functions.* PhD thesis, Louisiana State University, 2002.

- [248] *Torvik V. I., Triantaphyllou E.* Guided inference of nested monotone Boolean functions // Information Sciences, 2003, no. 151, pp. 171–200.
- [249] *Torvik V. I., Triantaphyllou E.* Inference of monotone Boolean functions. Encyclopedia of optimization 2nd ed. *Floudas C.A. and Pardalos P.M.* (eds.) — New York: Springer, 2009. P. 1591–1598.
- [250] *Triantaphyllou E.* Data mining and knowledge discovery via logic-based methods. Theory, algorithms, and applications. — New York: Springer, 2010.
- [251] *Valiant L.* A theory of the learnable // Commun. ACM, 1984, no. 27(11), pp. 1134–1142.
- [252] *Vizilter Y. V., Pyt'Ev Y. P., Chulichkov A. I., Mestetskiy L. M.* Morphological image analysis for computer vision applications // Intelligent Systems Reference Library, 2015, 73, pp. 9–58.
- [253] *Webster R.* Convexity. — New York: Oxford University Press, 1994.
- [254] *Wegener I.* The complexity of Boolean functions. — Stuttgart: B.G. Teubner, 1987.
- [255] *Ziegler G. M.* Lectures on polytopes. — New York: Springer-Verlag, 1995.